数理解析研究所講究録
第 489 巻 1983 年 30-40

複素空間形への helical geodesic immersion について

東北大 理学研究科 大仁田義裕
(Yoshihiro Ohnita)

M^n, $\tilde{M}^N$ を connected Riemannian manifold とする.
isometric immersion $\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N$ が次の条件を満たすとき, φ は "helical geodesic immersion of order p" と呼ばれている:

(1) M^n の任意の geodesic γ に対して, $f \circ \gamma$ は $\tilde{M}^N$ 内の order p の Frenet curve でその曲率 $k_1, \cdots, k_{p-1} > 0$ が定数になる.

(2) $p, k_1, \cdots, k_{p-1}$ は γ に独立である.

(cf. Sakamoto [7]).

ambient space から見てその上の geodesic が単純な曲線になっているような部分多様体を研究することは, 興味あることである. helical geodesic immersion は, $\tilde{M}^N$ が実空間形 特に球面の場合 Harmonic manifold とも深く関連し, Sakamoto, Nakagawa, Tsukada らにより研究されている.

ここでは, $\tilde{M}^N$ が複素空間形の場合, helical geodesic immersion を分類するという問題を考えたい.

今、

$\tilde{M}^N[c]$: complex space form of constant holomorphic sectional curvature c of complex dimension N.

ここで、$c = -1, 0$ or 1.

$\bar{M}^N(c)$: real space form of constant sectional curvature c of real dimension N

とする.

$\tilde{M}^N[c]$ 内の典型的な部分多様体は、Kaehler部分多様体と totally real 部分多様体である.

$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ helical geodesic immersion of order p が Kaehler immersion である場合と totally real である場合について上の問題を考察し、得られている結果を報告する.

1. helical Kaehler immersion

M^n を complex dimension n の Kaehler manifold とし、$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ が helical geodesic でかつ Kaehler immersion であるとき、helical Kaehler immersion と呼ぶことにする.

まず、helical Kaehler immersion の例をあげる.

Example. $p \geqq 1$ integer とする.

$$\varphi_p \ : \ \mathbb{C}P^n(\tfrac{1}{p}) \longrightarrow \mathbb{C}P^{N(p)}(1) \qquad N(p) := \binom{n+p}{p} - 1 .$$

$$(z_0, z_1, \cdots, z_n) \longrightarrow \left(\sqrt{\frac{p!}{p_0! \cdots p_n!}} \cdot (z_0)^{p_0} \cdots (z_n)^{p_n} \right)_{\substack{p_0 + \cdots + p_n = p \\ p_i \geqq 0 \text{ integer}}}$$

(cf. Calabi [1]).

φ_p による geodesic の挙動を調べると次のことがわかる.

Thm 1.1.

(1) φ_p は helical Kaehler immersion of order p.

(2) $\mathbb{C}P^n(\frac{1}{p})$ の任意の geodesic γ に対して、 $f \circ \gamma$ は $\mathbb{C}P^{N(p)}(1)$ の p - dim. totally real totally geodesic submanifold に含まれる.

(3) $\mathbb{C}P^n(\frac{1}{p})$ の任意の 2つの geodesic γ_1, γ_2 に対して、 $\varphi \circ \gamma_1$ と $\varphi \circ \gamma_2$ は $\mathbb{C}P^{N(\varphi)}(1)$ のある holomorphic isometric で写り合う.

$\varphi \ : \ M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ を helical Kaehler immersion of order p としよう.

次の性質は、容易にわかる.

Prop. 1.2.

(1) φ は constant isotropic.

i.e. $\quad \| \alpha(X, X) \| = \kappa_1 \qquad (\forall X \in T_xM, \forall x \in M)$

ここで、 α は φ の第2基本形式.

(2) M^n は constant holomorphic sectional curvature c' を持つ.

今、次の定理を引用する.

Thm. 3. (Nakagawa and Ogiue [5])

$\varphi : \widetilde{M}^n[c'] \longrightarrow \widetilde{M}^N[c]$ Kaehler immersion

$c = 0$ or $-1 \Rightarrow \varphi$ totally geodesic.

$c = 1 \Rightarrow$ integer $r \geqq 1$ が存在して次のようになる.:

(i) $c' = \frac{c}{r}$.

(ii) $N(r) \leqq N$ で、$\varphi(\widetilde{M}^n[c'])$ は $\widetilde{M}^N[c]$ の totally geodesic Kaehler submanifold $\widetilde{M}^{N(r)}[c]$ に含まれる.

よって、$c = 1$ の場合は、Calabi の local rigidity theorem により、φ は φ_r と同値になる. Thm. 1. により、$p = r$ でなければならない. 従って、次の定理を得る.

Thm. 4

$\varphi : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^N[c]$ helical Kaehler immersion of order p

$c = 0$ or $-1 \Rightarrow \varphi$ totally geodesic. $(p = 1)$

$c = 1 \Rightarrow M^n = \widetilde{M}^n[\frac{1}{p}]$, $N(p) \leqq N$.

$\varphi : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^{N(p)}[c] \subset \widetilde{M}^N[c]$.

は φ_p と同値.

2. totally real helical geodesic immersion について

まず，complex space form の totally real submanifold の normal bundle の構造を調べる．この結果から，totall real submanifold を２つのタイプに分けることができる．

M^n を n-dimensional connected Riemannian manifold とする．$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ を totally real isometric immersion とする．φ の degree，osculating space の概念を述べる．

<u>Def.</u> α を φ の第２基本形式とする．φ の osculating space は次のように定義される．$x \in M$ とする．

$$O_x^0 M := T_x M.$$

$$O_x^1 M := \mathrm{span}\{X, \alpha(X_1, X_2) ; X, X_1, X_2 \in T_x M\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$O_x^i M := \mathrm{span}\{X, (\nabla^{*k-2}\alpha)(X_1, \cdots, X_k) ; X, X_1, \cdots, X_k \in T_x M,\ k = 2, \cdots, i+1\}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$O_x^i M = O_x^{i-1} M \oplus N_x^i M \quad (\text{直交直和分解}) \quad i = 1, 2, \cdots$$

とおく．$R_j \subset M$ $(j \geq 0)$ を帰納的に次のように定める．

$$R_0 := M, \quad R_j := \{x \in R_{j-1} ; \dim O_x^j M \text{ maximal in } R_{j-1}\}.$$

$O_x^{d-2} M \subsetneqq O_x^{d-1} M = O_x^d M = \cdots$ $(x \in R_d)$ となる integer $d \geq 1$ が存在する．ここで，$O_x^{-1} M = \{0\}$ とする．この d を f の "degree" と呼ぶ．

$c \neq 0$ と仮定する．

<u>Prop. 2.1.</u> $x \in R_d$ に対して、

$$N_xM = N_x^1M \oplus \cdots \oplus N_x^{d-1}M \oplus \nabla_xM \quad (\text{直交直和分解})$$

とおくとき、次のいずれかが成立する。

R) $J(T_xM) \subset \nabla_xM \qquad (\forall x \in R_d)$.

C) $J(T_xM) \subset N_x^1M \oplus \cdots \oplus N_x^{d-1}M \qquad (\forall x \in M)$.

<u>Def.</u>

R) が成立するとき、φ は "$\mathbb{R}$-totally real"、C) が成立するとき、φ は "$\mathbb{C}$-totally real" であると呼ぶことにする。

<u>Lem. 2.2.</u>

(1) φ $\mathbb{R}$-totally real $\Longrightarrow$ $J(O_x^dM) \subset \nabla_xM \quad (\forall x \in R_d)$.

(2) φ $\mathbb{C}$-totally real $\Longrightarrow$ $J(O_x^dM) \subset O_x^dM \quad (\forall x \in R_d)$.

この Lemma より、O_x^dM は Lie triple system になることがわかる。従って、次を得る。

<u>Prop. 2.3.</u>

$\varphi : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^N[c]$ を totally real helical geodesic immersion, $d = \mathrm{degree}\,\varphi$ とする。

(1) φ : $\mathbb{R}$ − totally real

$\Longrightarrow$ 次を満たす $\widetilde{M}^N[c]$ の totally real totally geodesic submanifold $\overline{M}^m(\frac{c}{4})$ が唯一つ存在する：

$$\varphi(M) \subset \overline{M}^m(\tfrac{c}{4})$$

$$O_x^dM = T_x\overline{M}^m(\tfrac{c}{4}) \qquad (\forall x \in R_d).$$

(2) φ : $\mathbb{C}$ - totally real

$\Rightarrow$ 次をみたす $\tilde{M}^N[c]$ の totally geodesic Kaehler submanifold $\tilde{M}^{N'}[c]$ が唯一つ存在する：

$$\varphi(M) \subset \tilde{M}^{N'}[c]$$

$$O^d_x M = T_x \tilde{M}^{N'}[c] \qquad (\forall x \in R_d).$$

$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ totally real helical geodesic immersion of order p を分類するという問題を扱う場合、$\mathbb{R}$ - totally real と $\mathbb{C}$ - totally real とに分けて考えていくことが都合の良いことである。$\mathbb{R}$ - totally real の時には、上の Prop. から real space form における問題に帰着される。

まず、$p = 1$ のときは totally geodesic である。

$p = 2$ のときは、第2基本形式が parallel かつ isotropic という性質を持つことと同値である。$\mathbb{R}$ - totally real の場合は、Sakamoto の定理 [6] に帰着される。$\mathbb{C}$ - totally real の場合は Naitoh によって完全に分類されている。(cf. Naitoh [3])
Naitoh [2] は、次の対称空間 M^n の $\mathbb{C}P^n$ への order 2 の $\mathbb{C}$-totally real minimal helical geodesic immersion の例を構成した。：

$$S^1 \times S^{n-1}, \quad SU(3)/SO(3), \quad SU(3), \quad SU(6)/Sp(3), \quad E_6/F_4 .$$

$p = 3$ の場合は、φ が $\mathbb{R}$-totally real ならば Nakagawa [4] の定理が complete simply connected の仮定なしにその local version

も成り立つことに注意すれば、次を得る.

Thm. 2.4.

$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c]$ 　 $\mathbb{R}$-totally real minimal helical geodesic immersion of order 3

$\Rightarrow$ $c > 0$ で、$\varphi(M^n)$ は $\tilde{M}^N[c]$ のある totally real totally geodesic submanifold $\overline{M}^m(\frac{c}{4})$ に含まれて、φ は sphere $S^n(\frac{nc}{12(n+2)})$ から sphere への 3-rd standard minimal isometric immersion と同値である.

$\mathbb{C}$-totally real の場合については まだ何もわかっていないようである. $\mathbb{C}$-totally real helical geodesic immersion of order $p \geqq 3$ の例すらも、知られていないようである.

しかし、$\tilde{M}^N[c]$ の totally real submanifold で特別な場合、次の結果を得た.

Thm. 2.5.

$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^n[c]$ 　 totally real minimal helical geodesic immersion of order p

$\Rightarrow$ $p = 1$ or 2. さらに、$c \leqq 0$ ならば $p = 1$ でなければならない.

normal bundle の "f-structure" の概念を用いて、Thm. 2.5. のわずかな一般化を得ることができる.

$x \in M$ とする. $X \in N_xM$ に対して、$JX = PX + fX$

$pX \in T_xM$, $fX \in N_xM$ とおく. $f \in \mathrm{End}(NM)$ は $f^3 + f = 0$ を満たす. すなわち, f は totall real submanifold M の normal bundle NM の "f-structure" を定める. (cf. Yano and Kon [8])

Thm. 2.6.

$$\varphi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^N[c] \quad \text{minimal totally real helical geodesic immersion of order } p.$$

$$\nabla f = 0 \Rightarrow p = 1 \text{ or } 2.\ \text{さらに、} c \leqq 0 \text{ ならば、} p = 1.$$

3. 対称空間の球面への minimal かつ isotropic immersion について

今までの問題とは直接関係はないが, 最後に 対称空間の球面への minimal immersion の問題について述べたい.

isotropic immersion という概念はいかにも "等方的" という感じを表わしているが, その最も良く知られている例は, compact rank 1 対称空間の球面への standard minimal isometric immersion である. 先ほどの Naitoh の例は, すべて rank 2 の対称空間であり, 実は この例から rank 2 の対称空間の球面への minimal かつ isotropic immersion が存在することが容易にわかる.

そこで、球面への minimal かつ isotropic な isometric immersion を許す対称空間を分類するというのはおもしろい問題である。

こういう方向で、例えば 次の結果を得た。

Thm. 3.1.

M : compact irreducible symmetric space.

$\varphi : M \longrightarrow S^l$ equivariant minimal isotropic isometric immersion

$\Longrightarrow$ rank $M \leqq 8$.

この評価は、もっと良くできると思われる。この問題について、著者はさらに研究中である。

参考文献

[1] E. Calabi, Isometric imbedding of complex manifolds, Ann. of Math. 58 No.1. (1953) 1 - 23.

[2] H. Naitoh, Isotropic submanifolds with parallel second fundamental form in $P^m(c)$, Osaka J. Math. 18 (1981), 427 - 464.

[3] H. Naitoh, Parallel submanifolds of complex space forms I, II. preprint.

[4] H. Nakagawa, A characterization of the 3rd standard

immersions of spheres into a sphere, J. Diff. Geom. 16 (1981) 511 – 527.

[5] H. Nakagawa and K. Ogiue, Complex space forms immersed in complex space forms, Trans. Amer. Math. Soc. 219 (1976) 289 – 297.

[6] K. Sakamoto, Planar geodesic immersions, Tôhoku Math. J. 29 (1977) 25 – 56.

[7] K. Sakamoto, Helical immersions into a unit sphere, Math. Ann. 261 (1982) 63 – 80.

[8] K. Yano and M. Kon, Anti-invariant submanifolds, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel.