

## Einstein 計量と Riemann サブマージョン

東工大理 松沢忠幸 (Tadayuki Matsuzawa)

Hopf ファイブレーションは、その標準的な計量とあわせて、Riemann サブマージョンの典型的な例となっている。他方、その計量は (等質的) Einstein 計量の典型的な例ともなっている。Einstein 計量とサブマージョンとの関連との立場から、以下の結果に注目する。Jenzen [4] は Riemann 多様体  $(B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  上の主束  $P(B, G)$  の全空間  $P$  上に、射影  $\pi: P \rightarrow B$  が Riemann サブマージョンとなるような計量を与え、その計量が Einstein 計量となる条件を考察した: まず、 $P$  上に接続形式  $\gamma$ ,  $G$  上に両不変計量  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  を与え、 $P$  上の計量  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  ( $t > 0$ ) を

$$\langle E, F \rangle_t \equiv t \langle \gamma E, \gamma F \rangle_G + \langle \pi_* E, \pi_* F \rangle_B$$

と定めて、この計量が Einstein 計量となるような正値  $t$  の存在、非存在を問うた。より具体的には、コンパクト連結 Lie 群  $K$ , その連結閉部分群  $H$  ( $H$  は更にその閉正規部分群  $H_1, H_2$  の直積と局所的に同型となっているとする) をとり、 $P = K/H_2$ ,  $B = K/H$ ,  $G = H_1$ , 又接続形式としては  $\mathfrak{k}$  上に  $H_1, H_2$  の Lie 環が直交するような両不変計量を与えて  $\mathfrak{h}_1$  の Lie 環への射

影から  $P$  上に自然に定まる  $K$  不変接続をとって、議論する。

こうして奇数次元球面  $S^{4n+3}$  や Sasakian 多様体上に標準的でない Einstein 計量が見出された。

又、Ziller [8] は、球面や射影空間に等質的に作用する群の分類を利用して、これらの空間上の等質的 Einstein 計量を決定した。そして複素奇数次元射影空間  $\mathbb{C}P^{2n+1}$  上に標準的でない Einstein 計量が見出されたのであるが、この計量は次のファイブレーション  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{H}P^n$  と密接に関連している。

これらの構成を、Riemann サブマージョンの立場から見て、等質性の仮定をしないで、以下に述べる定理を得た： $\pi: M \rightarrow B$  を Riemann サブマージョンとする。全空間  $(M, \langle, \rangle_M)$  は連結、完備、各ファイバー  $\pi^{-1}(b)$  ( $b \in B$ ) は全測地的であると仮定する。このとき、Hermann [3] によれば、各ファイバーは互いに等長的であるので、例えば「ファイバーの Ricci テンソル」のような言葉使いに興味がある。今、全空間  $(M, \langle, \rangle_M)$ 、底空間  $(B, \langle, \rangle_B)$ 、及び各ファイバー  $(\pi^{-1}(b), \langle, \rangle_F)$  は Einstein 計量をもつとする。従って各空間の Ricci テンソルは、適当な定数  $\lambda^M, \lambda^B, \lambda^F$  をとって、

$$\text{Ric}^M = \lambda^M \langle, \rangle_M, \quad \text{Ric}^B = \lambda^B \langle, \rangle_B,$$

$$\text{Ric}^F = \lambda^F \langle, \rangle_F$$

と書ける。以上の仮定のもとで、

定理 ([6])  $t = \lambda^F / (\lambda^B - \lambda^F)$  の値が正値かつ 1 ではないとすると、値  $t$  に対応する全空間の計量のファイバー方向への相似変形  $\langle, \rangle_t$  は、全空間に今一つの Einstein 計量を与える。

ここで、正値  $t$  に対応するファイバー方向への相似変形とは、次の様にして定まる Riemann サブマニフォールドに「自然」な計量の変形である (Berard Bergery and Bourguignon [ ]) を見よ):  $M$  の接空間に於いて、垂直方向 (ファイバーに接する方向)、水平方向 (垂直方向と直交する方向) への射影をそれぞれ  $\nu, \mathcal{H}$  とする。このとき  $M$  上の新しい計量  $\langle, \rangle_t$  を、

$$\langle E, F \rangle_t \equiv t \langle \nu E, \nu F \rangle + \langle \mathcal{H} E, \mathcal{H} F \rangle \quad (E, F \in T_m M)$$

で定める。

略証明 O'Neill [7] による曲率テンソルの公式によつて、計量  $\langle, \rangle_t$  の Ricci テンソルを計算してみると、

$$\text{Ric}_V^t W = (\lambda^F/t + t(\lambda^M - \lambda^F)) \langle V, W \rangle_t$$

$$\text{Ric}_V^t X = 0$$

$$\text{Ric}_X^t Y = (\lambda^B + t(\lambda^M - \lambda^B)) \langle X, Y \rangle_t$$

となる。ここで  $V, W$  は垂直方向、 $X, Y$  は水平方向のベクトルである。従つて  $\langle, \rangle_t$  が Einstein 計量を与えるならば  $t$  は 2 次方程式

$$\lambda^F/t + t(\lambda^M - \lambda^F) = \lambda^B + t(\lambda^M - \lambda^B)$$

を満たさねばならない。この方程式の解の一方は 1, 他方が定理に述べた値である。(証明終)

以下若干の計算例を与える。残念ながら、新しい Einstein 計量の例を与えることができないので、ここではよく知られた例を再確認するにとどめる。

i)  $S^3 \rightarrow S^{2n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$  :  $\lambda^B = 4(n+2)$ ,  $\lambda^F = 2$ . 従って  $t = 1/(2n+3)$ . これは Jensen [4] の例である。

ii)  $S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8(4)$  : 底空間は定曲率 4 の空間形であるから  $\lambda^B = 28$ ,  $\lambda^F = 6$ . 従って  $t = 3/11$ . これは Bourguignon-Karhner [2] の例である。

Ziller [8] によれば、球面上の等質的 Einstein 計量は、標準的なもの(他 i) 及び ii) でつづけている。他方 i) 及び ii) の Einstein 計量はそれぞれ  $\mathbb{H}P^{n+1}$ ,  $\mathbb{C}aP^2$  の距離球(測地球面)として実現されている: Bourguignon-Karhner [2]. 類似の事—部分多様体としての実現—は Jensen [4] の与えた, 他の Einstein 計量についても成立する場合がある: Jensen [5] を見よ。

iii)  $S^2(4) \rightarrow \mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{H}P^n$  :  $\lambda^B = 4(n+2)$ , ファイバーは定曲率 4 の空間形であるから  $\lambda^F = 4$ , 従って  $t = 1/(n+1)$ . これは Ziller [8] の例である。

再び, Ziller によれば, 射影空間  $\mathbb{K}P^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{C}a$ ) 上の等

質的 Einstein 計量は, 標準的なもの(他 III)でつぎている。

### 文 献

- [1] Bernard Bergery L. and Bourguignon J. P. : Laplacian and Riemannian submersions with totally geodesic fibres. Lecture Notes in Math. 838, 30-35 (1981)
- [2] Bourguignon J. P. and Karcher H. : Curvature operators: Pinching estimates and geometric examples. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4<sup>e</sup> série, t. 11 71-92 (1978)
- [3] Hermann R. : A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 236-242 (1960)
- [4] Jensen G. R. : Einstein metrics on principal fibre bundles. J. Diff. Geom. 8, 599-614 (1973)
- [5] " : Imbeddings of Stiefel manifolds into Grassmannians. Duke Math. J. Vol 42 397-407 (1975)
- [6] Matsuzawa T. : Einstein metrics and fibred Riemannian structures. to appear.
- [7] O'Neill B. : The fundamental equations of a submersion. Michigan Math. J. 13, 459-469 (1966)
- [8] Ziller W. : Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces. Math. Ann. 259, 351-358 (1982)