数理解析研究所講究録
第 489 巻 1983 年 84-96

Hermite対称空間のある極小部分多様体の安定性について

大阪大学教養部　竹内 勝 (Masaru Takeuchi)

コンパクト型Hermite対称空間$\bar{M}$のコンパクトな全実全測地的部分多様体Mでその次元が$\bar{M}$の複素次元に等しいものを考えて，その分類と極小部分多様体としての安定性を問題にする．ここでMが全実であるとは，$\bar{M}$の概複素構造をJとするとき各$p \in M$に対して$\langle JT_pM, T_pM \rangle = \{0\}$を満たすことをいう．ここで$T_pM$は接空間，$\langle\ ,\ \rangle$はRiemann計量を表わす．

§1 Hermite対称空間の全実全測地的部分多様体

はじめに上記の様な部分多様体の標準的構成（竹内[7]）について述べよう．

$(\mathfrak{g}, \tau)$を正値対称有階Lie代数とする．すなわち

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1, \quad [\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$$

は$\mathfrak{g}$が実半単純Lie代数である有階Lie代数で$\mathfrak{g}_0$が$\mathfrak{g}_{-1}$上効果的であるもの，τは$\mathfrak{g}$のCartan型回帰的自己同型で$\tau(\mathfrak{g}_p) = \mathfrak{g}_{-p}$ $(p = -1, 0, 1)$を満たすものとする．$\mathfrak{g}$の複素化を$\bar{\mathfrak{g}}$で表わす．G（または$\bar{G}$）を中心が自明で$\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$（$\mathrm{Lie}\, \bar{G}$

$=\bar{\mathfrak{g}}$）となる連結実（複素）Lie 群とし，$G\subset\bar{G}$ とみなす．ただし Lie・は Lie 代数を表わす．$\mathfrak{g}$ の部分代数 $\mathfrak{u}$ を

$$\mathfrak{u}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$$

によって定義し，その複素化を $\bar{\mathfrak{u}}$ で表わす．

$$U=N_G(\mathfrak{u}),\qquad \bar{U}=N_{\bar{G}}(\bar{\mathfrak{u}})\qquad（正規化群）$$

とおくと，$\mathrm{Lie}\,U=\mathfrak{u}$，$\mathrm{Lie}\,\bar{U}=\bar{\mathfrak{u}}$ となる．そこで

$$M=G/U,\qquad \bar{M}=\bar{G}/\bar{U}$$

とおく．$G\cap\bar{U}=U$ であるから $M\subset\bar{M}$ とみなすことができる．M は $(\mathfrak{g},\tau)$ に付属する対称R空間，$\bar{M}$ は M の複素化といわれる．$\bar{M}$ が複素化とよばれるのはつぎの理由からである．いま $\bar{G}$ の反正則自己同型で G 上では恒等写像となるものを σ とすれば，$\sigma(\bar{U})=\bar{U}$ であるから σ は $\bar{M}$ の反正則微分同相（これも σ で表わす）を引きおこす．このとき σ の不動点全体は M に一致する．

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\tau(X)=X\},\qquad \mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\tau(X)=-X\}$$

とおくと $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$（直和）で

$$\mathfrak{g}_u=\mathfrak{k}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{p}$$

は $\bar{\mathfrak{g}}$ のコンパクトな実形である．G_u（または K）を $\bar{G}$ の連結 Lie 部分群で $\mathrm{Lie}\,G_u=\mathfrak{g}_u$（$\mathrm{Lie}\,K=\mathfrak{k}$）であるものとする．$\bar{\mathfrak{g}}$ の Killing 形式 B を用いて

$$\langle X,Y\rangle=-B(X,Y)\qquad(X,Y\in\mathfrak{g}_u)$$

とおけば，$\langle\ ,\ \rangle$ は G_u 不変な $\mathfrak{g}_u$ 上の内積である．M の原点 U を o で表わして

$$K_u = \{a \in G_u \ ;\ a(o) = o\}, \qquad \mathfrak{k}_u = \mathrm{Lie}\, K_u,$$

$$\mathfrak{m}_u = \{X \in \mathfrak{g}_u \ ;\ \langle X, \mathfrak{k}_u \rangle = \{0\}\}$$

とおくと，$\bar{M} = G_u/K_u$，$T_o\bar{M} = \mathfrak{m}_u$ と同一視される．$T_o\bar{M}$ 上で $\langle\ ,\ \rangle | \mathfrak{m}_u \times \mathfrak{m}_u$ に一致する $\bar{M}$ 上の G_u 不変な Riemann 計量を $\bar{g}$ で表わし，$\bar{g}$ から引きおこされた M 上の K 不変な Riemann 計量を g で表わす．このとき $(\bar{M}, \bar{g})$ は連結なコンパクト型 Hermite 対称空間，(M, g) は連結コンパクトな Riemann 対称空間になつて，$I^0(\bar{M}, \bar{g}) = G_u$，$I^0(M, g) = K$ を満たす．ここで $I^0(\cdot\,\cdot)$ は等長変換群の（単位元の）連結成分を表わす．さらに $\bar{M}$ の回帰的反正則微分同相 σ は $(\bar{M}, \bar{g})$ の等長変換である．このことから M は $(\bar{M}, \bar{g})$ の全実全測地的部分多様体で $\dim M = \dim_{\mathbb{C}} \bar{M}$ を満たすことが導かれる．実際，各 $p \in M$ において

$$(T_p\bar{M})^{\pm} = \{x \in T_p\bar{M} \ ;\ \sigma_* x = \pm \sigma_* x\}$$

とおけば，$T_p\bar{M} = (T_p\bar{M})^+ \oplus (T_p\bar{M})^-$（直交直和），$(T_p\bar{M})^+ = T_pM$，よつて $(T_p\bar{M})^- = N_pM$（法空間）であるが，$J\sigma_* = -\sigma_* J$ より J は $(T_p\bar{M})^{\pm}$ を入れ換えるから，$\langle J T_pM, T_pM \rangle = \{0\}$ および $\dim M = \dim_{\mathbb{C}} \bar{M}$ を得る．また M は $(\bar{M}, \bar{g})$ の等長変換 σ の不動点集合であつたから全測地的である．これらの Riemann 計量 $\bar{g}$，g を標準的とよぶ．

ここで，$\bar{M}$ の o における概複素構造 J_o を与える $\mathfrak{k}_u$ の中心の元 H_0，すなわち $ad(H_0)|\mathfrak{m}_u = J_o$ を満たす元を用いて $Z=\sqrt{-1}H_0 \in \mathfrak{g}$ とおけば

$$\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} ; [Z, X] = pX\} \qquad (p = -1, 0, 1)$$

となることに注意しておく．

以後連結なコンパクト型Hermite対称空間$(\bar{M}, \bar{g})$と，連結なコンパクト全実全測地的部分多様体 M で $\dim M = \dim_{\mathbb{C}} \bar{M}$ を満たすものの対 $((\bar{M}, \bar{g}), M)$ を，簡単のため TRG対 とよぶことにしよう．

いくつかの TRG対$((\bar{M}_i, \bar{g}_i), M_i)$ $(1 \leq i \leq s)$ が与えられたとき，その直積$((\bar{M}, \bar{g}), M) = ((\bar{M}_1, \bar{g}_1), M_1) \times \cdots \times ((\bar{M}_s, \bar{g}_s), M_s)$ を $\bar{M} = \bar{M}_1 \times \cdots \times \bar{M}_s$, $\bar{g} = \bar{g}_1 \times \cdots \times \bar{g}_s$, $M = M_1 \times \cdots \times M_s$ によって定義する．２つの TRG対 $((\bar{M}, \bar{g}), M)$, $((\bar{M}', \bar{g}'), M')$ に対して，直積分解

$$((\bar{M}, \bar{g}), M) = ((\bar{M}_1, \bar{g}_1), M_1) \times \cdots \times ((\bar{M}_s, \bar{g}_s), M_s),$$
$$((\bar{M}', \bar{g}'), M') = ((\bar{M}'_1, \bar{g}'_1), M'_1) \times \cdots \times ((\bar{M}'_s, \bar{g}'_s), M'_s)$$

と相似双正則写像 $\varphi_i : (\bar{M}_i, \bar{g}_i) \longrightarrow (\bar{M}'_i, \bar{g}'_i)$ $(1 \leq i \leq s)$ が存在して直積写像 $\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_s : \bar{M} \longrightarrow \bar{M}'$ が $\varphi(M) = M'$ を満たすときこれらは同値であるとよばれる．

定理 1　上記の対応 $(\mathfrak{g}, \tau) \rightsquigarrow ((\bar{M}, \bar{g}), M)$ は正値対称有階Lie代数の（明らかな意味での）同型類全体の集合から TRG対の同値類全体の集合への全単射を引きおこす．――

上記定理の前者の集合は完全に決定されている（小林－長野［3］，竹内［7］）．

例(1)　$\overline{M} = G_{p,q}(\mathbb{C})$（$\mathbb{C}^{p+q}$ の p 次元部分空間全体のなす複素 Grassmann 多様体），$M = G_{p,q}(\mathbb{R})$，$\mathfrak{g}$ は Plücker の埋め込みで M を実射影空間 $P_N(\mathbb{R})$（$N = \binom{p+q}{p} - 1$）の代数部分多様体とみなしたときの M の射影変換群の Lie 代数．

例(2)　$\overline{M} = Q_n(\mathbb{C}) = \{[z] \in P_{n+1}(\mathbb{C})\ ;\ -z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0\}$ $(n \geqq 2)$．ここで $[z]$ は同次座標が $(z_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ の点を表わす．$M = \{[x] \in P_{n+1}(\mathbb{R})\ ;\ -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0\}$．M は対応

$$[x] \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_0}\right)$$

によって S^n と微分同相になる．$\mathfrak{g}$ は S^n の等角変換群の Lie 代数．

例(3)　$\overline{M} = G_{2p,2q}(\mathbb{C})$，$M = G_{p,q}(\mathbb{H})$（四元数 Grassmann 多様体），$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{H})$．

例(4)　M は連結なコンパクト型 Hermite 対称空間，M^* を M の基底実多様体に M と反正則な複素構造を導入したもの，$\overline{M} = M \times M^*$ とし，対角写像によって $M \subset \overline{M}$ とみなす．このとき $\mathfrak{g}$ は M の正則変換群の Lie 代数．

§2　TRG対の安定性

一般に f をコンパクトな多様体 M から Riemann 多様体 $(\overline{M}, \overline{g})$ への極小なはめ込みとし，NM をその法束とする．f に付属

する Jacobi 作用素を L で表わす.（Simons [6] を参照.） L は NM の断面の空間 $C^\infty(NM)$ に働く自己随伴な２階の楕円型微分作用素で，f の滑らかな変分 f_t に対する体積 $vol(f_t(M))$ の第２変分を記述する. L の負の固有値の重複度の和を $Index(f)$ で表わす. $Index(f)=0$ であるとき f は<u>安定</u>であるといわれる. よく知られているように，f が安定であるためには，f の任意の滑らかな変分 f_t（$f_0=f$）に対して

$$vol(f_t(M)) \geqq vol(M) \qquad (|t|<\varepsilon)$$

であることが必要十分である.

さてわれわれの TRG 対 $((\bar{M},\bar{g}),M)$ に対して包含写像 $f: M \longrightarrow (\bar{M},\bar{g})$ は極小な埋め込みであるが，その安定性はつぎの定理で与えられる.

<u>定理２</u>　TRG 対 $((\bar{M},\bar{g}),M)$ に対して，M（の包含写像）が安定であるためには M が単連結であることが必要十分である.——

例えば例(1)の M は安定でない. 実際，$G_{p,q}(\mathbb{R})$ の Killing ベクトル場 X より得られる $V=JX\in C^\infty(NM)$ はつねに

$$LV = -\frac{2}{p+q}V$$

を満たす. したがって

$$Index(M) \geqq \dim I^0(G_{p,q}(\mathbb{R})) = \dim SO(p+q) > 0$$

となる. 例(2),(3),(4)の M は安定である.

Lawson-Simons [4] は $M\subset P_n(\mathbb{C})$ が安定な極小部分多様体

であるためにはMが複素部分多様体であることが必要十分であることを証明し，一般のコンパクト型Hermite対称空間ではこれが成り立たないことを例をあげて示した．この例は例(4)で$M = P_1(\mathbb{C})$として得られる．この他にも$G_{p,q}(\mathbb{H}) \subset G_{2p,2q}(\mathbb{C})$等は安定であって複素部分多様体でない極小部分多様体の例を与える．

§3　定理1の証明

定理1の証明は，各TRG対$((\bar{M}, \bar{g}), M)$に対してある正値対称有階Lie代数$(\mathfrak{g}, \tau)$が存在して，$((\bar{M}, \bar{g}), M)$は$(\mathfrak{g}, \tau)$から定義されたTRG対と同値になることを示せば，後は容易である．これは以下のようにしてなされる．

$\bar{M}$の正則変換群の連結成分を$\bar{G}$，$G_u = I^0(\bar{M}, \bar{g}) \subset \bar{G}$，$\bar{\mathfrak{g}} = \mathrm{Lie}\,\bar{G}$，$\mathfrak{g}_u = \mathrm{Lie}\,G_u$とする．コンパクトなEinstein-Kähler多様体に関する松嶋の定理から$\mathfrak{g}_u$は$\bar{\mathfrak{g}}$のコンパクトな実形である．$\bar{\mathfrak{g}}$を$\bar{M}$上の実ベクトル場のなすLie代数の部分代数とみなして

$$\mathfrak{g} = \{ X \in \bar{\mathfrak{g}} \ ; \ X|M \text{ は } M \text{ に接する} \},$$

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_u, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap J\mathfrak{g}_u$$

とおくと，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$（直和）であって$\mathfrak{g}$は$\bar{\mathfrak{g}}$の一つの実形であることが示される．このとき$\tau|\mathfrak{k} = I_{\mathfrak{k}}$，$\tau|\mathfrak{p} = -I_{\mathfrak{p}}$によって定義される$\mathfrak{g}$の一次変換$\tau$は$\mathfrak{g}$のCartan型回帰的自

己同型になる. また$\mathfrak{k}$は$\bar{g}$から引きおこされたMのRiemann計量gに関するKillingベクトル場全体のLie代数と同型であることが証明される.

つぎに一点$o \in M$を固定して§1のようにCartan分解

$$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_u + \mathfrak{m}_u , \quad \mathfrak{m}_u = T_o\bar{M}$$

を定めて, $\bar{M}$の概複素構造を与える$H_0 \in \mathfrak{k}_u$を用いて$Z = JH_0 \in \bar{\mathfrak{g}}$とおけば$Z \in \mathfrak{g}$となることが示される. そこで

$$\mathfrak{g}_p = \{ X \in \mathfrak{g} ; [Z, X] = pX \} \quad (p = -1, 0, 1)$$

とおけば, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ (直和) となつて$(\mathfrak{g}, \tau)$は正値対称有階Lie代数になる. これが求めるものであることは構成から明らかであろう.

§4 定理2の証明

まず, 安定性はTRG対の同値で不変であること, TRG対の直積が安定であるためにはその各成分が安定であることが必要十分であることがわかる. したがつて定理1より, TRG対$((\bar{M}, \bar{g}), M)$は$\mathfrak{g}$が単純であるような正値対称有階Lie代数$(\mathfrak{g}, \tau)$より定義され, 標準的Riemann計量$\bar{g}$をもつものと仮定してよい.

このとき内積$\langle , \rangle | \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$に付属する$\mathfrak{k}$のCasimir作用素をCで表わせばJacobi作用素Lは

$$L = C - \tfrac{1}{2} I_{NM}$$

となる．これは Chen-Leung-Nagano [1] の方法にしたがって L が Killing Jacobi 場を零化することを用いて証明される．したがって，同型

$$C^\infty(NM) \xrightarrow[J\cdot]{} C^\infty(TM) \xrightarrow[\vartheta]{} C^\infty(T^*M)$$

（TM, T^*M は接束，余接束を表わし，ϑ は Riemann 計量 g による双対同型を表わす．）によって L は $C^\infty(T^*M)$ 上の作用素

$$\hat{L} = \Delta - \frac{1}{2} I_{T^*M}, \quad \Delta \text{ は Laplace 作用素}$$

に移る．よって M が安定であるためには

$$E_\lambda = \{\omega \in C^\infty(T^*M) \,;\, \Delta\omega = \lambda\omega\}, \quad \lambda \geqq 0$$

とおくとき

$$E_\lambda = \{0\} \qquad \left(0 \leqq \lambda < \frac{1}{2}\right)$$

が必要十分である．E_λ を調べるために一般のコンパクト連結な Riemann 多様体 (M, g) に対する以下の諸定理を用いる．

(A) (Hodge 分解)

$$B_\lambda = \{\omega \in E_\lambda \,;\, d\omega = 0\},$$
$$C_\lambda = \{\omega \in E_\lambda \,;\, d^*\omega = 0\}, \quad (d^* \text{ は } d \text{ の随伴作用素})$$
$$F_\lambda = \{\varphi \in C^\infty(M) \,;\, \Delta\varphi = \lambda\varphi\}$$

とおくとき，各 $\lambda > 0$ に対して

$$E_\lambda = B_\lambda + C_\lambda \quad (\text{直和}),$$
$$d : F_\lambda \xrightarrow{\cong} B_\lambda .$$

(B)（矢野；小林 [2] を参照）(M, g) が Einstein：$S = cg$

（S は Ricci 曲率テンソルを表わす）の場合，C_{2c} は (M, g) 上の Killing ベクトル場全体のなす空間に同型である．

(C)（長野 [5]）(M, g) が Einstein : $S = cg\ (c > 0)$ のとき

$$C_\lambda = \{0\} \qquad (0 < \lambda < 2c).$$

さてわれわれの M については $\pi_1(M) = 0$, $\mathbb{Z}_2$ または $\mathbb{Z}$ である（竹内 [9]）．$\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ のときには $\dim E_0 = b_1(M) = 1$ であるから $E_0 \neq 0$．よって M は安定でない．したがって以後 M は $\pi_1(M) = 0$ または $\mathbb{Z}_2$ であるとしよう．以下分類表を用いてつぎの各場合に定理の主張を確かめる．

(I) (M, g) が Einstein : $S = cg$ の場合

Riemann 対称空間の場合は原点 o における Ricci 曲率テンソル S_o は $\mathfrak{k}$ の Killing 形式 $B_{\mathfrak{k}}$ を用いて

$$S_o = -\frac{1}{2} B_{\mathfrak{k}}$$

と表わされるから，定数 c を求めることができる．

(イ) $\pi_1(M) = 0$ のとき．Cartan-Helgason の定理と Freudenthal の公式（竹内 [8] を参照．）を用いて計算すると，$C^\infty(M)$ 上の Laplace 作用素 Δ の才 1 固有値は各 (M, g) について $\frac{1}{2}$ であることがわかる．よって (A) より

$$B_\lambda = \{0\} \qquad (0 < \lambda < \tfrac{1}{2}).$$

また上式より c を計算すると各 (M, g) について $2c \geqq \frac{1}{2}$ とな

ることがわかる．したがって (C) より

$$C_\lambda = \{0\} \qquad (0 < \lambda < \tfrac{1}{2})$$

となる．よって (A) より

$$E_\lambda = \{0\} \qquad (0 < \lambda < \tfrac{1}{2}).$$

また $\dim E_0 = b_1(M) = 0$ より $E_0 = \{0\}$ だから M は安定である．

(ロ) $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ のとき．各 (M, g) について $0 < 2c < \frac{1}{2}$ となる．したがって (A), (B) より

$$\dim E_{2c} \geqq \dim \mathfrak{k} > 0, \qquad 0 < 2c < \tfrac{1}{2}$$

であるから M は安定でない．

(II) (M, g) が Einstein でない場合

分類表によればこの場合は

$$M = Q_{p,q}(\mathbb{R}) = \{ [x] \in P_{p+q-1}(\mathbb{R})\ ;\ x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0 \},$$

$$\overline{M} = Q_{p+q-2}(\mathbb{C}) = \{ [z] \in P_{p+q-1}(\mathbb{C})\ ;\ z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2 = 0 \}$$

$$(3 \leqq p < q)$$

だけである．このときは $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ であって

$$(M, g) \sim (S^{p-1}, g_1) \times (S^{q-1}, g_2) \qquad (\text{局所等長})$$

$$K \sim SO(p) \times SO(q) \qquad (\text{局所同型})$$

となる．さらに (S^{p-1}, g_1) の Ricci 曲率テンソル S_1 は

$$S_1 = \frac{p-2}{2(p+q-2)} g_1, \qquad 0 < \frac{p-2}{p+q-2} < \frac{1}{2}$$

を満たす．したがって (A), (B) より

$$\dim E_{p-2/p+q-2} \geqq \dim C_{p-2/p+q-2} \geqq \dim SO(p) > 0$$

であるから M は安定でない.

文献

[1] B.Y. Chen - P.F. Leung - T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces III, プレプリント.

[2] S. Kobayashi, Transformation Groups in Differential Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[3] S. Kobayashi - T. Nagano, On filtered Lie algebras and geometric structures I, J. Math. Mech. 13 (1964), 875 − 908.

[4] H.B. Lawson Jr. − J. Simons, On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry, Ann. of Math. 84 (1973), 427 − 450.

[5] T. Nagano, On the minimum eigenvalues of the Laplacians in Riemannian manifolds, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo 11 (1961), 177 − 182.

[6] J. Simons, Minimal varieties in riemannian manifolds, Ann. of Math. 88 (1968), 62 − 105.

[7] M. Takeuchi, Cell decompositions and Morse inequalities on certain symmetric spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo I, 12 (1965), 81 − 192.

[8] 竹内勝, 現代の球関数, 岩波書店, 東京, 1975.

[9] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact

symmetric spaces II, Tsukuba J. Math. 3 (1979), 1–29.