数理解析研究所講究録
第 490 巻 1983 年 216-226

ランダムなサービス率をもつ待ち行列の不変式

東京理科大(理工) 宮沢政清 (Masakiyo Miyazawa)

1、概要

単一窓口系(GI/GI/1やG/G/1など)の仮り待ち時間過程は、客の到着時点で、ジャンプする(標本関数が不連続となる)が、ジャンプ時点の間では、標本関数は、連続かつ確定的であると仮定される。このことは、問題を単純化する上で、非常に役立っている。複数窓口系などの他の待ち行列モデルや在庫問題などでも同様のことがいえる。しかしながら、ジャンプ時点の間でも、標本関数がランダムに変化する場合も十分にあり得る。たとえば、サービス率が、時々刻々ランダムに変化するかもしれない。この研究では、このように、ジャンプ時点間で、標本関数が、ランダムに変化する場合をどのように扱ったらよいかを考察する。

ここで扱う確率過程は、定常で、標本関数は、ジャンプを共ない、ジャンプ時点の間では連続であるとする。ただし、ジャン

プ時点間では、標本関数は、ランダムに変化してもよい。はじめに、一般論として，この定常確率過程について、任意時点での分布と、ジャンプ時点での分布の関係式を求める。この関係式は、広く成り立つという意味で不変式と呼ぶが、その成立条件から、保存式（conservation law）と呼んだ方が、適当かもしれない。得られた不変式は、仮り待ち時間過程に、すぐ適用できる。この結果は、König and Schmidt (1980) 等の拡張になっている。また、これを利用して，M/G/1待ち行列で、サービス率がランダムに変化する場合を、しない場合と比較して、確率的不等式を得た。

2．仮定及び定義

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$\{T_t\}_{t\in R}$ を Ω 上の $\mathcal{B}(R)$－可測半群作用素とする。ここに、$\{T_t\}$ が $\mathcal{B}(R)$－可測であるとは，$\forall A \in \mathcal{F}$ に対して，$\{(s, \omega);\ T_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(R)\times\mathcal{F}$ となることをいう。ここに，$\mathcal{B}(R)$ は、$R=(-\infty, +\infty)$ 上のボレル集合体である。さらに、P は、$\{T_t\}$ に関して定常であるとする。このとき，実数に値をとる確率過程 $\{X(t)\}_{t\in R}$ は，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において定義され，$\forall t, s \in R$ に対して

$$X(t)(T_s\,\omega) = X(t+s)(\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

を満たしているとする。明らかに、$\{X(t)\}$ は定常過程である。

また、$\{X(t)\}$ は、次の条件 (i), (ii) を満すとする。

(i) $X(t)$ のジャンプ時点は、有限時間内では、有限個であり それらの計数過程を U とする，すなわち，任意の区間 A に対して，

$$U(A) = A \text{ に含まれる } \{X(t)\} \text{ のジャンプ時点の数}$$

とするとき，$\lambda = EU(0,1) < +\infty$ である。ここに、E は、P に関する期待値を表す。

(ii) $X(t)$ は、任意の t に対して、右微分係数 $X^{+}(t)$ $(= \frac{d^{+}}{dt}X(t))$ をもつ。

(i), (ii) より、$\forall t>0$ に対して，

$$(1) \quad X(t) = X(0) = \int_0^t X^{+}(s)ds + \int_{0-}^{t+} \{X(s+) - X(s-)\} U(ds)$$

が、成り立つことがわかる。

また、U は、定義及び $\{X(t)\}$ の仮定から，定常点過程となり、$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P_0 が、次のように定義できる。

$$(2) \quad P_0(B) = \lambda P\left[\int_0^1 I_{T_s B}\, U(ds)\right] \qquad (\forall B \in \mathcal{F})$$

この定義においては，$\{T_s\}$ の $\mathcal{B}$-可測性が本質的に効いている。なお，I_B は集合 B の指示関数であり，$T_s B =$

$\{\omega : T_{-s}\omega \in D\}$ とする。P_0は、Palm 分布と呼ばれ，ジャンプ時点における（定常）分布を表わしている。

3．不等式の導出

補題1．$E|X^+(0)| < +\infty$ かつ，$E_0|X(0+) - X(0-)| < +\infty$ ならば，

$$(3) \quad E(X^+(0)) = \lambda E_0(X(0-) - X(0+))$$

この補題は，(1) 及び (2) より明らかである。ここに，E_0は，P_0に関する期待値を表わす。

定理1．$E|X^+(0)| < +\infty$ ならば，$E(X^+(0)|X(0)=x)$ が右連続となるすべての x について，

$$(4) \quad E(X^+(0)|X(0)=x)\frac{d^+}{dx}P(X(0)>x) = \lambda\{P_0(X(0+)>x) - P_0(X(0-)>x)\}$$

（証明の概略）

$\forall \varepsilon > 0$ に対して，

$$f_{\varepsilon,x}(u) = \int_{-\infty}^{\min(u,\, x+\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} I_{\{s>x\}}\, ds$$

とおくと，$f_{\varepsilon,x}(u)$ は，u の連続関数であり，

$$f^{+}_{\varepsilon,x}(u)=\frac{d^{+}}{du}f_{\varepsilon,x}(u)=\frac{1}{\varepsilon}I_{[x,\,x+\varepsilon)}(u)$$
$$f^{-}_{\varepsilon,x}(u)=\frac{d^{-}}{du}f_{\varepsilon,x}(u)=\frac{1}{\varepsilon}I_{(x,\,x+\varepsilon]}(u)$$

となる。ここで，$Y(t)=f_{\varepsilon,x}(X(t))$ とおいて新たな確率過程$\{Y(t)\}$を定義すると，$\{Y(t)\}$は，$\{X(t)\}$のすべての条件を満たしており，$f_{\varepsilon,x}$の有界性より，補題1の条件も満足している。したがって，

$$\left.\frac{d^{+}}{dt}Y(t)\right|_{t=0}=X^{+}(0)f^{+}_{\varepsilon,x}(X(0))I_{\{X(0)>0\}}+X^{-}(0)f^{-}_{\varepsilon,x}(X(0))I_{\{X(0)<0\}}$$

に注意して，補題1を，$\{Y(t)\}$に適用し，$\varepsilon\downarrow 0$とすれば，(4)が得られる。

系1．定理1の条件のもとで，$\forall x\in R$ に対して，
$P(X(0)=x)>0$ ならば，$P(X'(0)=0\mid X(0)=x)=1$．

注1）$E(X^{+}(0)\mid X(0)=x)$が，右連続でないときには，(4)が成立しないことがある。

注2）$\{X(t)\}$を仮り待ち時間，$X^{+}(t)$を$X(t)$の関数とするときには，König and Schmidt (1980) の結果に一致する（ただし，G/G/1 モデル）。

定理1と同様な証明により次の結果が得られる。

定理2。$\mathbb{X}(t)=(X_1(t),\cdots,X_n(t))$ を $\{T_t\}$ に関して定常な確率過程（状態空間は R^n）とし，各 $X_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は，条件(i),(ii)を満しているとする。このとき，$X_i(t)$ のジャンプ点の計数過程を U_i $(i=1,2,\cdots,n)$，$U=U_1+\cdots+U_n$ とするならば，定理1と同様な条件のもとで，$\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$ に対して，

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n}E(X_i^+(0)\mid X_i(0)=x_i,\ X_j(0)>x_j\ (j\neq i))\frac{\partial}{\partial x_i}P(\mathbb{X}(0)>x)$$
$$=\lambda\{P_0(\mathbb{X}(0+)>x)-P_0(\mathbb{X}(0-)>x)\}$$

が成り立つ。ここに，$U=U_1+\cdots+U_n$ は，$\forall A\in\mathcal{B}(R)$ に対し，$U(A)=U_1(A)+\cdots+U_n(A)$ で定義される。

注）$X_i^+(0)$ が $X_i(0)$ の関数であるとき，(5)式は $x=(x,x,\cdots,x)$ に対して，$\mathbb{X}(0)=x$ のとき，$X_1^+(0)=X_2^+(0)=\cdots=X_n^+(0)$ ならば，

$$(6)\quad E(X_1^+(0)\mid X_1(0)=x)\frac{d}{dx}P(X(0)>x+u\mathrm{I})=\lambda\{P_0(\mathbb{X}(0+)>x+u\mathrm{I})$$
$$-P_0(\mathbb{X}(0-)>x+u\mathrm{I})\}$$

と表わせる。ここに，$\mathrm{I}=(1,1,\cdots,1)$ である。

これは，König and Schmidt (1980) の G/G/1 における

仮り待ち時間ベクトル過程の不変式に一致する。彼らは，xが任意のときにも(6)の形の式が成り立つと主張しているが，これは正しくない。

4. ランダムなサービス率をもつ待ち行列

単一窓口系で，サービス率がランダムに変化するモデルを考える。時刻tにおけるサービス率を$\alpha(t)$で表わす。ただし，$\alpha(t)$は，客の到着過程や，サービス過程（i番目の客のサービス時間をS_iとする）とは独立で，窓口の単位時間当りの処理能力を表す。窓口に客がいなくとも$\alpha(t)$は，0とは限らない。この系に対する客の到着時点を$\cdots t_{-1} < t_0 \leq 0 < t_1 < t_2 \cdots$とする。また，客の仮り待ち時間を$V(t)$で表す。このとき，$t_i$は，$\{V(t)\}$のジャンプ時点であり，

$$\dot{V}(t) = \begin{cases} -\alpha(t) & : V(t) > 0 \\ 0 & : V(t) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。$\{V(t)\}$は，定常過程で，$\{X(t)\}$と同様の条件を満すものとする。到着過程とサービス過程が定常ならば，この条件は自動的に満たされる。$\{\alpha(t)\}$については次の仮定をおく。

(a.1)　$\{\alpha(t)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$は，定常過程である（Pについて）。

(a.2) $\quad E_0(\alpha(u) \mid V(0+)) = 1 \quad \text{for } 0<u<t_1 \quad \text{a.s. } P_0$

(a.1), (a.2) を満す $\{\alpha(t)\}$ の例をあげておこう。

(例1) $\alpha(t) \equiv 1$ の場合は、通常の確定的なサービス率をもつモデルになる。

(例2) $\alpha(u) = \alpha_i \quad (t_{i-1} \leq u < t_i) \quad (i=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

で、$\{\alpha_i\}$ が i.i.d.、$E_0(\alpha_i)=1$ の場合。このとき、α_t は、$V(0+)$ とは独立となる。

この場合は、各到着間隔において、サービス率が、独立に変化する場合で、ランダムなサービス率でも、最も単純なケースである。

(例3) $\alpha(u) = \alpha_i(u - t_{i-1}) \quad (t_{i-1} \leq u < t_i)$

で、$\{\{\alpha_i(u)\}_{u=0}^{+\infty}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ が、独立な同一分布をもつ確率過程列になる。また、$E_0(\alpha_i(u))=1 \quad (u \geq 0)$ となる場合。このときも、$\{\alpha_1(u)\}_{u \geq 0}$ は、$V(0+)$ と独立となる。

この場合は、(例2) を一般化したものである。

次に、GI/M/1 待ち行列で、サービス率が、(例2) の形で与えられる場合について、$E(V^+(0) \mid V(0)=x)$ を求めてみよう。この値が定まると、定理1より、$V(0)$ と実待ち時間 W (=

$V(0-)$ a.s. P_0）の分布の関係が求まる。ただし、ここでは、$V(0)$ と W の分布から定理1をもちいて逆に、その値を求めた。結果は次のようになる。

$$(7)\qquad E(V^+(0)\,|\,V(0)=x)=\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda+(1-\delta)a)u}\,du\,dP_0(\alpha_1\le a)\right)^{-1}$$

ここに，δ は，

$$(8)\qquad z=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda+(1-z)a)u}\,du\,dP_0(\alpha_1\le a)$$

の区間 $(0,1)$ における根である。このとき，(7)の右辺は1より小さくなることがわかる。特に、M/M/1 のときには、その値は、λ/δ になる（ただし，$\lambda<1$ とする）。

GI/M/1 で，(例2) のサービス率をもつ場合は，$V(0)$ と W の分布が求まる特殊な例であり、一般には、とても分布を求めることは不可能である（だからこそ，定理1の(4)式が意味をもつ）。では，$E(V^+(0)\,|\,V(0)=x)$ は、計算できるかというと、これも容易ではない。しかし，(a.1), (a.2) の仮定のもとで、次の不等式を得ることができる。

補題2、t_1 が $V(0)$ に独立(P_0-a.s.)であり、$\{\alpha(t)\}$ に関する条件が、すべて満されるとき，$\forall x>0$ に対して，

$$(9)\quad -E(V^+(0) \mid V(0)>x) \leqq 1$$

(証明)

定理1より，$\forall x>0$ に対して，

$$(10)\quad -E(V^+(0)\,;V(0)>x) = \lambda\{E_0(V(0)-x)^+ - E_0(V(0-)-x)^+\}$$
$$= \lambda E_0\{(V(0)-x)^+ - (V(0)-x-(V(0)-V(t_1-)))^+\}$$
$$= \lambda E_0\{\min((V(0)-x)^+, (V(0)-V(t_1-))^+)\}$$
$$= \lambda E_0\{\min((V(0)-x)^+, \int_0^{t_1}\alpha(u) I_{\{V(u)>0\}}du)\}$$
$$\leqq \lambda E_0\{\min((V(0)-x)^+, \int_0^{t_1}\alpha(u)du)\}$$

ここで，t_1 と $V(0)$ の独立性及び (a.2) より，

$$\leqq \lambda E_0\{\min((V(0)-x)^+, E_0(\int_0^{t_1}\alpha(u)du \mid V(0)))\}$$
$$= \lambda E_0\{\min((V(0)-x)^+, t_1)\}$$
$$= P(V(0)>x)$$

最後の等式は、点過程の逆変換公式(Miyazawa (1979) を参照)より得られる。　　　(証明終り)

この補題及び(10)式の最初の等式から，次の結果が得られる。

定理3、M/G/1 待ち行列で，サービス率 $\{\alpha(u)\}$ が条件 (a.1) (a.2) を満すならば，仮り待ち時間 $V(0)$ は，サービス率が 1 に恒等的に等しいときの仮り待ち時間 $V_d(0)$ より確率的に大きい。すなわち，$\forall x>0$ に対して，

$$(11) \quad P(V(0)>x) \geqq P(V_d(0)>x)$$

が成り立つ。

定理3は，直感的な考えとよく合う。同様なことが，GI/G/1 や M/G/s 等でも成立しそうであるが，証明は，難かしい。$\{\alpha(u)\}$ の条件をゆるめることも含め，今後，上記のような一般化についても考えてみたい。

（参考文献）

[1] König,D. and Schmidt,V. (1980) Imbedded and non-imbedded stationary characteristics of queueing systems with varying service rate and point processes. J. Appl. Prob. 17,753-767

[2] Miyazawa,M. (1979) A formal approach to queueing processes in the steady state and their applications. J. Appl. Prob. 16, 332-346.