数理解析研究所講究録
第 491 巻 1983 年 36-56

古典的 H_1 と二進的 H_1 の同型定理
(Maurey の理論)

茨城大理 荷見 守助 (Morisuke Hasumi)

1. 序。 Martingale 理論の函数解析学方面への目覚ましい応用の最近の一例として、B. Maurey による古典的Hardy族 $H_1(\mathbb{D})$ と二進的 H_1 の同型定理とその帰結としての $H_1(\mathbb{D})$ の無條件基底の存在定理を紹介する。其後 Carleson, Wojtaszczyk により $H_1(\mathbb{D})$ の無條件基底の直接構成法が考案され、それを通じて古典的 H_1 と二進的 H_1 の同型性も証明されるやうにはなったが、Maurey の方法が依然として極めて有効で且つ興味深いことは確かである。問題の定理は次の通りである。

定理 A。 $H_1(\mathbb{D}) \cong H_1(\delta)$。右辺は二進的 H_1 である。

定理 B。 $H_1(\mathbb{D})$ は無條件基底を持つ。

詳しい定義は後で述べるが、Banach空間の基底の問題は、Banach の頃から既に大きな問題であった。正則函数の作る空間の基底に関しては、「disk algebra は基底を持つか?」が有名なBanachの本に出てゐる。具体的な空間についての最近ま

での結果が要領よくまとめられてゐるのはPełczyński[4]で例へば次の表はその一部である。（＋は存在，－は非存在.）

空間名	$A(\mathbb{D})$	$H^{\infty}_{\infty}(\mathbb{D})$	$H_p(\mathbb{D})$ $(1<p<\infty)$	$H_1(\mathbb{D})$	C/A_0
基底	+	−	+	+	+
無條件基底	−	−	+	?	?

これからも、上記のMaureyの結果の意味が窺へよう。我々のこゝでの興味はしかし結果よりもその方法にある。

2. 同型証明の一般論——Pełczyńskiの分解法。Martingaleに無関係のところから片附けておく。$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ をBanach空間とし次を仮定する。但し，× はBanach空間の直積を表はす。

1) $\mathbb{X} \cong \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$

2) $\exists \mathbb{X}', \mathbb{Y}'$: $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}'$, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{X} \times \mathbb{X}'$.

このとき，$\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$。何となれば、$\mathbb{X} \cong \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}' \cong \mathbb{Y} \times (\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}')$ $\cong \mathbb{Y} \times \mathbb{X} \cong \mathbb{X} \times \mathbb{X}' \times \mathbb{X} \cong \mathbb{X} \times \mathbb{X}' \cong \mathbb{Y}$。これはPełczyńskiの分解法と呼ばれるものである。古典的Hardy族 $H_1(\mathbb{D})$ と二進的Hardy族 $H_1(\delta)$ （定義は次節）について 1)は直ぐ分かるから、示すべき事は2)である。即ち、一方が他方のcomplemented subspaceに同型であることを示すことである。Maureyの方法の眼目はそこにある。

3. 二進的Hardy族$H_1(\delta)$の定義と性質。Haar函数系の定義から始める。$[0, 1]$ 上の函数 h_0, $h_{n,k}$ ($n = 1, 2, \cdots$; $k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}$) を、$h_0 \equiv 1$, $h_{n,k} = 2^{(n-1)/2}(\mathbb{1}_{[(2k-2)2^{-n}, (2k-1)2^{-n}]} - \mathbb{1}_{[(2k-1)2^{-n}, 2k \cdot 2^{-n}]})$ と定義し、Haar函数と呼ぶ。これは $L_2[0, 1]$ の正規直交基底をなす。次にHaar函数系から生成される$[0, 1]$ 内のσ集合族(二進集合族とでも呼んでおく) $(\mathcal{A}_n)_{n=0}^{\infty}$ を次で定義する:

$$\mathcal{A}_0 = \sigma(h_0) = \{\phi, [0, 1]\}, \quad \mathcal{A}_n = \sigma(h_{n,k} : k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}),$$

但し、$\sigma(\cdot\cdot)$ は括弧内の函数を可測にする最小のσ集合族を表はす。従って、$\mathcal{A}_n$は閉区間 $[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}]$ ($j = 0, 1, \cdots, 2^n - 1$) から生成されたものであり、$\mathcal{A}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ とおくと、$\mathcal{A}_\infty$はすべてのBorel集合より成る。また dt は $[0, 1]$ 上のLebesgue測度を表はすものとする。

定義。 $f \in L_1(dt)$ に対し、$f_n = \mathbb{E}[f / \mathcal{A}_n]$, $n = 0, 1, \cdots$ とし、

$$S(f) = \left(|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2\right)^{1/2}$$

を f の平方函数(square function)と呼ぶ。そして

$$H_1(\delta) = H_1([0, 1], (\mathcal{A}_n), dt) \equiv \{ f \in L_1(dt) : S(f) \in L_1(dt) \}$$

と定義する。$H_1(\delta)$ の normは

$$\| f \|_{H_1(\delta)} \equiv \| S(f) \|_1$$

とする。$H_1(\delta)$ はこの normについてBanach空間となる。

次に基底を定義する。複素Banach空間$\mathfrak{X}$内の点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\mathfrak{X}$ の基底であるとは、任意の $x \in \mathfrak{X}$ に対して複素数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$

が一意に存在して $x=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ を満たすことを云ふ。この右辺が常に無条件収束するとき、$\{x_n\}$ を $\mathfrak{X}$ の無條件基底(unconditional basis)と呼ぶ。(級数 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, $y_n \in \mathfrak{X}$, が無條件収束するとは、$\{y_n\}$ のすべての置換 $\{y_{\sigma(n)}\}$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} y_{\sigma(n)}$ が収束することをいふ。これはすべての $\theta_n \in \mathbb{C}$, $|\theta_n|=1$, に対して $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n y_n$ が収束することと同値である。)

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が無條件基底とすれば、すべての $x=\sum c_n x_n \in \mathfrak{X}$ に対し $|||x|||=\sup\{\|\sum \theta_n c_n x_n\| : |\theta_n|=1\}$ とおくと、$|||\cdot|||$ は $\|\cdot\|$ と同値な norm である. そして $K=\sup\{|||x||| : \|x\|=1\}$ を基底 $\{x_n\}$ の無條件性定数と呼ぶ.

命題 1。Haar 函数系 $\{h_0, h_{n,k}\}$ は $H_1(S)$ の無條件基底で、無條件性定数は 1 である。

証明。$f \in L_1(dt)$ に対し、$\alpha_0=\mathbb{E}[f h_0]$, $\alpha_{n,k}=\mathbb{E}[f h_{n,k}]$ とおけば、$f_n=\mathbb{E}[f/\mathcal{A}_n]=\alpha_0 h_0+\sum_{\nu=1}^{n}{}' \alpha_{\nu k} h_{\nu k}$ である。(こゝで $\sum_{\nu=1}^{n}{}'$ は $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{2^{\nu-1}}$ の略である。) 即ち、$f_n-f_{n-1}=\sum_k \alpha_{n,k} h_{n,k}$ となり、

$$S(f)=\left(|\alpha_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_k \alpha_{n,k} h_{n,k}\right|^2\right)^{1/2}=\left(|\alpha_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}{}' |\alpha_{n,k}|^2 h_{n,k}^2\right)^{1/2}。$$

従って

$$\|f\|_{H_1(S)}=\mathbb{E}\left(\left(|\alpha_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}{}' |\alpha_{n,k}|^2 h_{n,k}^2\right)^{1/2}\right)=\left\|\alpha_0+\sum{}' \alpha_{n,k} h_{n,k}\right\|_{H_1(S)}$$

$$=\left\|\alpha_0\theta_0+\sum{}' \alpha_{n,k}\theta_{n,k} h_{n,k}\right\|_{H_1(S)} \quad 但し\ |\theta_0|=|\theta_{n,k}|=1。$$

これから命題は明らかである。(証明終)

4. Martingale H_1 及び BMO. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率測度空間、$(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ 集合族の増加列とし、$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ とおく。$f \in L_1(\mathcal{F}_\infty)$ に対して、$f_n = \mathbb{E}[f/\mathcal{F}_n]$, $n = 0, 1, \cdots,$ とし、$S(f) = (|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2)^{1/2}$ とおき、martingale H_1 を

$$H_1[(\mathcal{F}_n)] = H_1(\Omega, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P}) = \{ f \in L_1(\mathcal{F}_\infty) : S(f) \in L_1(\mathcal{F}_\infty) \}$$

と定義する。norm は $\|f\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \equiv \|S(f)\|_1$ で与へる。

$f \in L_2(\mathcal{F}_\infty)$ に対し

$$\|f\|_{BMO[(\mathcal{F}_n)]} = \|\max\{|f_0|, \sup_{n\geq 1} (\mathbb{E}(|f - f_{n-1}|^2/\mathcal{F}_n))^{1/2}\}\|_\infty$$

とおき、martingale BMO を

$$BMO[(\mathcal{F}_n)] = BMO(\Omega, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P}) = \{ f \in L_2(\mathcal{F}_\infty) : \|f\|_{BMO[(\mathcal{F}_n)]} < \infty \}$$

と定義する。このとき、$H_1[(\mathcal{F}_n)]$ の双対空間は $BMO[(\mathcal{F}_n)]$ であることが Fefferman の定理から分かる。特に $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{A}_n$, $\mathbb{P} = dt$ の場合, $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ は $H_1(\delta)$ に等しい。また $BMO[(\mathcal{A}_n)]$ の代りに $BMO(\delta)$ と書く。

5. $H_1(\delta)$ が $H_1(\mathbb{D})$ の complement subspace に同型になること。

目標は $H_1(\mathbb{D})$ の中に Haar 函数系と同等な函数系を作り出すことである。問題は

1°) Haar 函数系と同等な系を与へるための條件の発見。

2°) $H_1(\mathbb{D})$ の中に具体的に構成すること。

の二点である。以下順次に述べる。

1°) Haar函数系変形の一般論. 先づHaar函数系の特性を列挙する。(1) $\mathcal{A}_{n-1}$ は $supp(h_{n,k})$ (= $h_{n,k}$ の closed support), $k=1, 2, \cdots, 2^{n-1}$, から生成される。(2) $h_{n,k}=\mathbb{E}[h_{n,k}/\mathcal{A}_n]$, $\mathbb{E}[h_{n,k}/\mathcal{A}_{n-1}]=0$, $k=1,2,\cdots,2^{n-1}$。(3) $\mathbb{E}[h_{n,k}]=0$, $\mathbb{E}[|h_{n,k}|^2]=1$, $n=1,2,\cdots$; $k=1,2,\cdots,2^{n-1}$。(4) $|h_{n,k}|=2^{(n-1)/2}\mathbb{I}_{supp(h_{n,k})}$ ($\forall n, k$)。(5) $\mathbb{P}\{h_{n,k}>0\}=\mathbb{P}\{h_{n,k}<0\}=2^{-n}$。(6) $\{h_{n,k}\}$ は $L_2(dt)$ の正規直交系をなす。これらの性質を如何に一般の場合に活かすかが問題の核心である。

まず $(\mathcal{A}_n)$ の代替を作る。$A_{1,1}=\Omega$ とし、$A_{n,k}$ ($k=1,2,\cdots,2^{n-1}$) が次の様に定義出来たとする: (α) $A_{n,k}\in\mathcal{F}_n$; (β) $\{A_{n,k}\}_k$ は互に素; (γ) $\bigcup_k A_{n,k}=\Omega$; (δ) $\mathbb{P}(A_{n,k})=2^{-(n-1)}$。このとき、$A_{n+1,k}\in\mathcal{F}_{n+1}$ ($k=1,2,\cdots,2^n$) を次で決める: (α') $A_{n+1,k}$ は互に素; (β') $A_{n,k}=A_{n+1,2k-1}\cup A_{n+1,2k}$ ($k=1,2,\cdots,2^{n-1}$); (γ') すべての $k=1,2,\cdots,2^{n-1}$ に対して、$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_{n+1,2k-1}}/\mathcal{F}_n]=\frac{1}{2}\mathbb{I}_{A_{n,k}}$。この方法で定義された集合系 $\{A_{n,k}\}$ を $(\mathcal{F}_n)$ tree と呼ぶ。そこで、

$$u_{n,k}=2^{(n-1)/2}\mathbb{I}_{A_{n,k}}$$

とおく。この $u_{n,k}$ は $|h_{n,k}|$ に対応するものと考へられる。この $u_{n,k}$ を梃子としてHaar函数からの歪みを測ることが出来る。

<u>定理 C.</u> ($A_{n,k}$; $n=1,2,\cdots$; $k=1,2,\cdots,2^{n-1}$) を $(\mathcal{F}_n)$ tree とし、$\phi_{n,k}\in L_\infty(\mathcal{F}_\infty)$ は次の性質を持つと仮定する: (a) $\phi_{n,k}$ は $L_2(\mathcal{F}_\infty)$ の直交系; (b) $\||\phi_{n,k}|-u_{n,k}\|_2\leq c4^{-n}$; (c) $|\phi_{n,k}|\leq u_{n,k}$

$+ c4^{-n}$; (d) $|\phi_{n,k} - (\mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{F}_{n-1}])| \leqq c4^{-n}$. このとき、$c$ が充分小さければ（例へば $c \leqq 1/16$ ），任意の $f = \alpha_0 + \sum \alpha_{n,k}\phi_{n,k}$, $g = \alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} h_{n,k}$ （有限和）に対して、$4^{-1}\|g\|_{H_1(\delta)} \leqq \|f\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqq 4\|g\|_{H_1(\delta)}$ 及び $\|f\|_{BMO[(\mathcal{F}_n)]} \leqq 4\|g\|_{BMO(\delta)}$ が成立つ。更に、1 と $\{\phi_{n,k}\}$ から生成された $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ の閉部分空間 $\mathbb{X}$ への（$H_1[(\mathcal{F}_n)]$ からの）直交射影 $Qf = \mathbb{E}(f) + \sum \mathbb{E}(f\bar{\phi}_{n,k})\phi_{n,k}$ は有界で、実際 $\|Q\| \leqq 18\sqrt{2}$ （$c \leqq 1/16$ として）。従って、$\mathbb{X}$ は $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ の complemented subspace である。

2°) 具体的構成。$H_1(\mathbb{D})$ の元にその境界値を対応させることにより次の $H_1(\mathbb{T})$ と同一視出来る：

$$H_1(\mathbb{T}) = \{f \in L_1(\mathbb{T}) : \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{ni\theta}\,d\theta/2\pi = 0, n = 1, 2, \cdots\}.$$

我々はこの $H_1(\mathbb{T})$ の中に定理Cの條件を満たす「変形Haar系」$\phi_{n,k}$ を構成する。即ち、$\mathcal{B}_n = \mathbb{T}$ 上の区間から生成された有限σ代数；$\phi_{n,k} = H_\infty(\mathbb{T})$ の直交系；$(A_{n,k}) = (\mathcal{B}_n)$ tree ；$R_n =$ 下で定義される乗法作用素 Q_{l_n}，を帰納的に定義して行く。そのために、Steinの乗数定理(multiplier theorem)を用ゐる。

<u>補題1</u>。定数 K，整数列 $0 \leqslant c_0 \leqslant a_0 \leqslant b_0 \leqslant d_0 < c_1 \leqslant \cdots < c_n \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant d_n < c_{n+1} \leqslant \cdots$ と $H_1(\mathbb{T})$ 上の線型作用素列 $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して、$\lim_n (b_n - a_n) = +\infty$; $Q_0 f = \int_0^{2\pi} f \cdot d\theta/2\pi$; $Q_n(e^{ik\theta}) = e^{ik\theta}$ ($k \in [a_n, b_n]$), $= 0$ ($k \notin [c_n, d_n]$)；且つすべての $f \in H_1(\mathbb{T})$ にすべての複素数列 $\{\theta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $|\theta_n| = 1$, に対し $\|\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n Q_n f\|_1 \leqq$

$K\|f\|_1$ が成立つ。(例へば、$c_n=\frac{3}{4}2^{2n}$, $a_n=2^{2n}$, $b_n=2^{2n+1}$, $d_n=\frac{5}{4}2^{2n+1}$ など。)

これを利用した具体的構成は次の通りである。まづ, $\mathcal{B}_0=(\phi,\mathbb{T})$, $R_0=Q_0$ とする。n 段階まで出来たとしてそれを

$$\mathcal{B}_n,\quad \phi_{n,k},\quad A_{n,k},\quad R_n=Q_{\ell_n}$$

とする。このとき $n+1$ 段階を構成するため、$A=A_{n,k}$ を任意に一つ取って固定する。この A を $\mathcal{B}_n$ の atom に分解して $A=\bigcup_\alpha B_\alpha$ とおく。この各 B_α は $\mathbb{T}$ 上の区間の形をしてゐる。そこで各 B_α を互に素で同じ長さの区間 B'_α, B''_α に分割し,

$$A_{n+1,2k-1}(=A')\equiv\bigcup_\alpha B'_\alpha,\quad A_{n+1,2k}(=A'')\equiv\bigcup_\alpha B''_\alpha$$

とおき, k を動かして $\{A_{n+1,j}: j=1,2,\cdots,2^n\}$ が出来た。次に $\phi_{n+1,j}$ を作るために、

$$u_{n+1,2k-1}=u'\equiv 2^{n/2}\mathbb{1}_{A'},\quad u_{n+1,2k}=u''\equiv 2^{n/2}\mathbb{1}_{A''}$$

とおき, これを三角多項式で L_2 近似する. 即ち、三角多項式 $P_{A'}$, $P_{A''}$ ($e^{ik\theta}$ の線型結合) で

$$\|u'-P_{A'}\|_2\leq c\,4^{-n-1},\quad |P_{A'}|\leq u'+c\,4^{-n-1}$$

$$\|u''-P_{A''}\|_2\leq c\,4^{-n-1},\quad |P_{A''}|\leq u''+c\,4^{-n-1}$$

を満たすものを選ぶ。また、$m', m''\in\mathbb{N}$, $\ell_{n+1}\ (>\ell_n)$ を充分大きく取り、$e^{im'\theta}P_{A'}$, $e^{im''\theta}P_{A''}$ (すべての $k=1,2,\cdots,2^{n-1}$ にわたって) のスペクトルは $[a_{\ell_{n+1}}, b_{\ell_{n+1}}]$ の互に素な部分集合になるやうにし,

$$\phi_{n+1,2k-1} = e^{im'\theta}P_{A'}, \quad \phi_{n+1,2k} = e^{im''\theta}P_{A''}, \quad R_{n+1} = Q_{l_{n+1}}$$

とおく。終りに、$\mathcal{B}_{n+1}$ は $\mathbb{T}$ の有限個の区間から生成された σ 集合族で $\mathcal{B}_n$ と $\{A_{n+1,j} : j = 1, 2, \cdots, 2^n\}$ を含み、且つスペクトルが $[0, d_{l_{n+1}}]$ に含まれるすべての三角多項式 g に対し

$$|g - \mathbb{E}[g/\mathcal{B}_{n+1}]| \leqq 2^{-n-1}\|g\|_1$$

を満たし、更に

$$|\phi_{n+1,j} - \mathbb{E}[\phi_{n+1,j}/\mathcal{B}_{n+1}]| \leqq c\,4^{-n-1} \quad (j = 1, 2, \cdots, 2^n)$$

も満たすものとする。これは区間を充分細かくすることにより常に可能である。これで帰納的定義は完結した。

構成法から我々の $\phi_{n,k}$ は次の性質を持つことが分かる：(a′) $\phi_{n,k}$ は $L_2(\mathbb{T})$ の直交系；(b′) $\|u_{n,k} - |\phi_{n,k}|\|_2 \leqq c\,4^{-n}$；(c′) $|\phi_{n,k}| \leqq u_{n,i} + c\,4^{-n}$；(d′) $|\phi_{n,k} - \mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_n]| \leqq c\,4^{-n}$。定理 C の條件と比較すると、残る問題は $\mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_{n-1}]$ の評価であるが、これは上の構成法では制御出来ない量であるから、別に工夫する。即ち、$\Omega = \mathbb{T} \times [0, 1]$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}_n \otimes \mathcal{A}_n$, $\mathbb{P} = \frac{d\theta}{2\pi} \otimes dt$ とし、$\tilde{A}_{n,k} = A_{n,k} \times [0, 1]$, $\psi_{n,k} = \phi_{n,k} \otimes r_n$（$r_n$ は Rademacher 函数），$T_n f = (R_n f) \otimes r_n$ $(\forall f \in H_1(\mathbb{T}))$ 且つ $Tf = \sum_{n=0}^{\infty} T_n f$ とおく。このとき，$(\psi_{n,k})$ は（$H_1(\mathbb{T})$ ではなく）$H_1[(\mathcal{F}_n)]$ の函数系で定理 C の條件を満たすものである．問題は條件 (d) だけであるが，

$$\mathbb{E}[\psi_{n,k}/\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_n] \otimes \mathbb{E}[r_n/\mathcal{A}_n] = \mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_n] \otimes r_n,$$

$$\mathbb{E}[\psi_{n,k}/\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\phi_{n,k}/\mathcal{B}_{n-1}] \otimes \mathbb{E}[r_n/\mathcal{A}_{n-1}] = 0$$

であるから、上の (d') と併せて (d) を得る。故に $\{1, \psi_{n,k}\}$ は Haar 函数系 $\{1, h_{n,k}\}$ と同等である。従って, $c \leqq 1/16$ として、$|\theta_0| = |\theta_{n,k}| = 1$ に対して

$$\| \alpha_0 \theta_0 + \sum \alpha_{n,k} \theta_{n,k} \psi_{n,k} \|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqq 4 \| \alpha_0 \theta_0 + \sum \alpha_{n,k} \theta_{n,k} h_{n,k} \|_{H_1(\delta)}$$
$$= 4 \| \alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} h_{n,k} \|_{H_1(\delta)} \leqq 16 \| \alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} \psi_{n,k} \|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]}$$

となるから, $\{1, \psi_{n,k}\}$ はそれから生成された $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ の閉部分空間の無条件基底で, その無条件性定数は $\leqq 16$ であることが分かった。これからまた

$$\| (|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\sum_k \alpha_{n,k} \psi_{n,k}|^2)^{1/2} \|_1 \leqq 16\sqrt{2} B \| \alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} \psi_{n,k} \|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]}$$

が出る。こゝで B は $\|g\|_1 \leqq B \|g\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]}$ $(\forall g \in H_1[\mathcal{F}_\infty])$ なる定数である。

一方、任意の $f \in H_1(\mathbb{T})$ に対し、$(T_n f)_{n=0}^{\infty}$ は次の意味で近似的 martingale をなす: $|T_n f - \mathbb{E}[T_n f / \mathcal{F}_n]| = |(R_n f - \mathbb{E}[R_n f/\mathcal{B}_n]) \otimes r_n|$ $\leqq 2^{-n} \|R_n f\|_1 = 2^{-n} \|T_n f\|_1$, $n = 1, 2, \cdots$, で, $T_0 f$ は定数。これから、$\|Tf\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqq \|\sum_{n=0}^{\infty} T_n f\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqq 5\sqrt{2} K \|f\|_1$ (K は補題 1 の定数) が得られる。即ち、$T: H_1(\mathbb{T}) \to H_1[(\mathcal{F}_n)]$ は連続である。

<u>命題 2.</u> $H_1(\delta)$ は $H_1(\mathbb{T})$ の complemented subspace に同型である。

<u>証明</u>。 1 と $(\phi_{n,k})$ から生成された $H_1(\mathbb{T})$ の閉部分空間を X とおく。いま $x = \alpha_0 + \sum \alpha_{n,k} \phi_{n,k}$ (有限和) とすれば、$R_n x = \sum_k \alpha_{n,k} \phi_{n,k}$ であるから、$y = \alpha_0 \theta_0 + \sum \theta_n R_n f$ $(|\theta_0| = |\theta_{n,k}| = 1)$

として、$\|x\|_1 = \|\sum \theta_n R_n y\|_1 \leqq K\|y\|_1 = K\|\theta_0\alpha_0 + \sum \theta_n \alpha_{n,k}\phi_{n,k}\|_1$.
ここで θ_n を Rademacher 函数 r_n に置きかへると、

$$\|x\|_1 = \int_0^1 \|x\|_1\,dt \leqq K\int_0^1 \|r_0(t)\alpha_0 + \sum_n r_n(t)\Big(\sum_k \alpha_{n,k}\phi_{n,k}\Big)\|_1\,dt$$
$$= K\,\mathbb{E}\Big[\int_0^1 |r_0(t)\alpha_0 + \sum_n r_n(t)\Big(\sum_k \alpha_{n,k}\phi_{n,k}\Big)|\,dt\Big]$$
$$\leqq K\,\mathbb{E}\Big[\Big(|\alpha_0|^2 + \sum_n |\sum_k \alpha_{n,k}\phi_{n,k}|^2\Big)^{1/2}\Big]$$
$$= K\,\mathbb{E}\Big[\Big(|\alpha_0|^2 + \sum_n |\sum_k \alpha_{n,k}\psi_{n,k}|^2\Big)^{1/2}\Big]$$
$$\leqq 16\sqrt{2}BK\,\|\alpha_0 + \sum \alpha_{n,k}\psi_{n,k}\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} = 16\sqrt{2}BK\,\|Tx\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]}.$$

また前に $\|Tx\|_{H_1[(\mathcal{F}_n)]} \leqq 5\sqrt{2}K\|x\|_1$ を示したから、$x \longmapsto Tx$ は $\mathfrak{X}$ から $H_1[(\mathcal{F}_n)]$ の中への同型対応であることが示された。T の像 $T(\mathfrak{X})$ は 1 と $(\psi_{n,k})$ から生成されたもので，それは $H_1(\delta)$ と同型になってゐたから，T は $\mathfrak{X}$ から $H_1(\delta)$ への同型対応であると言ってよい。最後に T の $\mathfrak{X}$ への制限の逆作用素を U と書けば、定理 C によって存在する Q により $P = UQT$ と定義すれば、P は $H_1(\mathbb{T})$ から $\mathfrak{X}$ の上への連続な射影で，従って $\mathfrak{X}$ が $H_1(\mathbb{T})$ の complemented subspace であることが分かった。(証明終)

6. $H_1(\mathbb{D})$ が $H_1(\delta)$ の complemented subspace に同型になること。目的を達成するために、$H_1(\mathbb{D})$ を離散 martingale 型の H_1 に変へる。そのために、$\mathbb{C}$ 上の Brown 運動で原点から出発するものを考へ X_t，$t \geqq 0$，と書く。方針は X_t の $\mathbb{D}$ 内の部分を離散過程 Z_n で近似し、Z_n から生成された集合族の系 $\tilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(Z_0, \cdots, Z_n)$

が二進集合族 $(\mathcal{A}_n)$ の中に同型に埋め込まれ、しかも任意の $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し、f の X_t に沿っての振舞は f の Z_n に沿っての振舞により誤差 ε 以内（正確には $\varepsilon\|f\|_1$ 以内）で近似されるように工夫することである。

さて、$0<\varepsilon<1/2$ を任意に固定し、$x \in \mathbb{D}$ に対して $\rho(x) = \varepsilon(1-|x|)^2/2$, $D(x)$ を中心 x, 半径 $\rho(x)$ の開円板, $S(x)$ を $D(x)$ の境界とする。この $\rho(x)$ が有効な理由は次にある。

<u>補題 2.</u> $y \in \overline{D(x)}$ ならば、$\rho(y) \geqq \rho(x)/2$ であり、すべての $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対して $|f(x)-f(y)| \leqq \varepsilon\|f\|_1$.

これは $D(x)$ 上での f の振動量が f の詳しい形には無関係に $\varepsilon\|f\|_1$ で抑へられることを示してゐて、従って $D(x)$ 内で X_t の道を多少変更しても f の行動の記述には支障がないことが分かる。さて $N=2^6$（2の大きい巾ならば何でもよい）とし、帰納的に次の構成を行ふ。

(a) stopping time の列 τ_n, $n=0,1,2,\cdots$.

(b) 確率変数の列 Z_n, $n=0,1,2,\cdots$。各 Z_n は $\mathbb{D}$ 内の有限個の値のみを取り、$\tilde{\mathcal{F}}_n \equiv \sigma(Z_0,\cdots,Z_n) \subseteqq \mathcal{F}_{\tau_n}$。但し $\mathcal{F}_t \equiv \sigma(X_s;\ s \leqq t)$ である。

(c) $n \geqq 1$ に対し, $S(Z_{n-1}(\omega))$ は N 個の区間 $\{I_j(Z_{n-1}(\omega))$, $j=1,2,\cdots,N$, に分割されて、$|I_j(Z_{n-1}(\omega))| \leqq \rho(Z_{n-1}(\omega))/2$ を満たし、$I_j(Z_{n-1}(\omega))$ の中点を $z_j(Z_{n-1}(\omega))$ と書くとき、Z_n は

$Z_n = z_j(Z_{n-1}) \Leftrightarrow X_{\tau_n} \in I_j(Z_{n-1})$ を満たす。更に $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ 内のすべてのatom B に対して、$\mathbb{P}(X_{\tau_n} \in I_j(Z_{n-1}) \mid B) = 1/N$ が成立つ。

<u>補題 3.</u> (a), (b), (c) を満たす構成は可能である。

<u>証明.</u> $\tau_0(\omega) \equiv 0$, $Z_0(\omega) \equiv 0$, 従って $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \{\phi, \Omega\}$ として帰納法を始める。まず第一段階を述べる。τ_1 を $S(0)$ への到達時刻 (hitting time) とする。次に、$S(0)$ を N 個の互に素で等長の区間 $I_j(0)$ に分割し、$I_j(0)$ の中点を $z_j(0)$ と書く。このとき、$|I_j(0)| = 2\pi\rho(0)/N < \rho(0)/2$. そこで、$Z_1(\omega)$ を $Z_1(\omega) = z_j(0) \Leftrightarrow X_{\tau_1(\omega)}(\omega) \in I_j(0)$ によって定義する。$\tilde{\mathcal{F}}_1 \equiv \sigma(Z_0, Z_1) = \sigma(Z_1)$ は N 個の atom $\{X_{\tau_1} \in I_j(0)\}$, $j = 1, \cdots, N$, より生成され, Brown運動の対称性から $\mathbb{P}(X_{\tau_1} \in I_j(Z_0)) = 1/N$, $j = 1, \cdots, N$, を得る。

さて第 n 段階まで構成出来たとして、第 $n+1$ 段階の構成を行ふ。そのため、$\tilde{\mathcal{F}}_n$ の atom B^* を任意に固定し, B^*を含む $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ の atomを B' と書く。このとき、Z_n, Z_{n-1} は夫々 B^*, B' の上で一定で、それを夫々 z^*, z' とおく。帰納法の仮定から、z^*は円周 $S(z')$ 上の区間 I $(= I_j(z'))$ の中点で、$|I| \leqq \rho(z')/2$ 且つ $\omega \in B'$ に対して $Z_n(\omega) = z^* \Longleftrightarrow X_{\tau_n(\omega)}(\omega) \in I$ を満たしてゐる。さて、$\omega \in B^*$ に対して

$$\tau_{n+1}(\omega) = \inf\{t > \tau_n(\omega) : X_t(\omega) \in S(z^*)\}$$

と定義する。補題 2 により $\rho(z')/2 \leqq \rho(z^*)$ であるから、I は中心 z^*, 半径 $\rho(z^*)/2$ の円板に含まれてゐる。従って、Brown

運動の到達確率についての角谷の定理と調和函数についての Harnack の不等式から、任意の $A \subset S(z^*)$ に対して

(*) $$P(A)/3 \leqq \mathbb{P}(X_{\tau_{n+1}} \in A \mid B^*) \leqq 3P(A)$$

が成立つ。即ち、$A \mapsto \mathbb{P}(X_{\tau_{n+1}} \in A \mid B^*)$ は $S(z^*)$ の弧長と比較可能となるから, $S(z^*)$ を N 個の区間 $I_j(z^*)$, $j=1,\cdots,N$, に分割して $\mathbb{P}(X_{\tau_{n+1}} \in I_j(z^*) \mid B^*) = 1/N$, $j=1,\cdots,N$, を成立せしめることが出来る。この区間の長さについては, (*) より $|I_j(z^*)| \leqq 3\cdot 2\pi\rho(z^*)\cdot\mathbb{P}(X_{\tau_{n+1}} \in I_j(z^*) \mid B^*) \leqq \frac{6\pi}{N}\rho(z^*) < \rho(z^*)/2$. 即ち、$\omega \in B^*$ に対して $|I_j(Z_n(\omega))| \leqq \rho(Z_n(\omega))/2$。終りに、函数 Z_{n+1} の B^* 上での値は $Z_{n+1}(\omega) = \zeta_j(z^*) \Leftrightarrow X_{\tau_{n+1}(\omega)}(\omega) \in I_j(z^*)$ で定義するものとする。この定義を $\tilde{\mathcal{F}}_n$ のすべての atom B^* に対して実行し、$\tilde{\mathcal{F}}_{n+1} = \sigma(Z_0,\cdots,Z_{n+1})$ とおく。このとき、(i) τ_{n+1} が $(\mathcal{F}_t)$-stopping time であること、(ii) Z_{n+1} は $\mathcal{F}_{\tau_{n+1}}$ 可測で、従って $\tilde{\mathcal{F}}_{n+1} \subseteqq \mathcal{F}_{\tau_{n+1}}$ であること、及び (iii) $\tilde{\mathcal{F}}_n$ のすべての atom B^* は同一の確率 $\mathbb{P}(B^*)/N$ を持つ $\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}$ の N 個の atom に分割させること、の三点が型通りの論法で示される。(証明終)

これだけの準備の下に、$H_1(\mathbb{D})$ を $H_1(\delta)$ の complemented subspace に二段に分けて埋込む。これを二節に分けて述べる。

7. $H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]$ **への埋込み。** X_t の単位円周への到達時刻を τ とする。即ち、$\tau(\omega) = \inf\{t>0 : |X_t(\omega)| = 1\}$。$F \in L_1(\mathcal{F}_\tau)$ に対し、$|||F|||_{H_1} = \mathbb{E}(\sup_{t \geqq 0} |\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau}]|)$ とおき、$H_1[(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})] = \{F \in L_1(\mathcal{F}_\tau) :$

$|||F|||_{H_1} < \infty\}$ と定義する。これは $|||\cdot|||_{H_1}$ を norm として Banach 空間となる。このとき、次の命題は既知である。

<u>命題3</u>。次の性質を持つ定数 $K>0$ が存在する。(i) 任意の $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し $f(X_{t\wedge\tau}) = \mathbb{E}[f(X_\tau) \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau}]$ で且つ $K^{-1}\|f\|_1 \leqq |||f(X_\tau)|||_{H_1} \leqq K\|f\|_1$. (ii) 上の f が $BMO(\mathbb{D})$ に属すれば $f(X_\tau) \in BMO[(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})]$ で且つ $K^{-1}\|f\|_{BMO} \leqq |||f(X_\tau)|||_{BMO} \leqq K\|f\|_{BMO}$.
但し、$|||f(X_\tau)|||_{BMO} = \|\max\{|f(0)|, \sup_{t\geqq 0}|\mathbb{E}(|f(X_\tau) - f(X_{t\wedge\tau})|^2 \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau})|^{\frac{1}{2}}\}\|_\infty$ である。

さて、τ_n の定義から

$$(**) \qquad \rho(Z_n)/2 \leqq |X_{\tau_{n+1}} - X_{\tau_n}| \leqq |X_{\tau_{n+1}} - Z_n| = \rho(Z_n)$$

であることが分かる。(X_{τ_n}) は有界な martingale だから a.s. 収束し、従って $\rho(Z_n) \to 0$ a.s. を得る。これから $|Z_n| \to 1$ a.s. 再び $(**)$ より、$|X_{\tau_n}| \to 1$ a.s. を得るから、$\tau_n \to \tau$ a.s.
そこで、$F_n = \mathbb{E}[X_\tau \mid \tilde{\mathcal{F}}_n]$, $n = 0, 1, \cdots$ とおくと、$\tilde{\mathcal{F}}_n$ の任意の atom B に対し $\{X_{\tau_n(\omega)}(\omega) : \omega \in B\}$ は半径 $\rho(Z_n(\omega'))/2$ $(\omega' \in B)$ の円板に含まれるから、$|F_n - X_{\tau_n}| = |\mathbb{E}[X_{\tau_n}] - X_{\tau_n}| \leqq \rho(Z_n)$ となり $\rho(Z_n) \to 0$ a.s. を用みて、$X_\tau = \lim X_{\tau_n} = \lim F_n$ a.s. 故に、X_τ は $\tilde{\mathcal{F}}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}_n$ について可測である。

そこで $H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]$ を考へる。これは norm を maximal function 型で入れることにして、

$$H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)] = \{F \in L_1(\tilde{\mathcal{F}}_\infty) : \mathbb{E}(\sup_n |\mathbb{E}[F \mid \tilde{\mathcal{F}}_n]|) < \infty\}$$

で定義される。norm は $\|F\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} = \mathbb{E}[\sup_n |\mathbb{E}[F|\tilde{\mathcal{F}}_n]|]$ である。

また、$\|F\|_{BMO[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} = \| \max\{|\mathbb{E}[F]|, \sup_n (\mathbb{E}(|F-\mathbb{E}[F|\tilde{\mathcal{F}}_{n-1}]|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n))^{1/2}\} \|_\infty$ として

$$BMO[(\tilde{\mathcal{F}}_n)] = \{F \in L_2(\tilde{\mathcal{F}}_\infty) : \|F\|_{BMO[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} < \infty\}$$

と定義する。

<u>補題 4.</u> $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し $f_n = \mathbb{E}[f(X_\tau)|\tilde{\mathcal{F}}_n]$, $n=0,1,\cdots$, として

$$|f_n - f(X_{\tau_n})| \leqq \varepsilon \|f\|_1 .$$

<u>証明.</u> B を $\tilde{\mathcal{F}}_n$ の任意の atom とすれば、$\tilde{\mathcal{F}}_n \subseteq \mathcal{F}_{\tau_n}$ だから、B 上では $f_n = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_\tau)|\mathcal{F}_{\tau_n}]|\tilde{\mathcal{F}}_n] = \mathbb{E}[f(X_{\tau_n})|\tilde{\mathcal{F}}_n]$ $= \mathbb{P}(B)^{-1}\int_B f(X_{\tau_n})$. $\omega \in B$ のとき $X_{\tau_n(\omega)}(\omega)$ は同一の $D(x)$ に含まれておるので、その上での f の振動量は $\varepsilon\|f\|_1$ 以下となり、求める結果を得る.（証明終）

本節の目的は次の命題である。

<u>命題 4.</u> $\varepsilon > 0$ を充分小さくすれば、次の性質を持つ定数 $M > 0$ が存在する。

(a) 任意の $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し、$M^{-1}\|f\|_1 \leqq \|f(X_\tau)\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} \leqq M\|f\|_1$。

(b) 任意の $g \in BMO(\mathbb{D})$ に対し、$\|g(X_\tau)\|_{BMO[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} \leqq M\|g\|_{BMO}$.

<u>証明.</u> (a) $f \in H_1(\mathbb{D})$ を任意に取る. $\tau_n(\omega) \leqq t \leqq \tau_{n+1}(\omega)$ ならば $X_t(\omega) \in D(Z_n(\omega))$ だから、$|f(X_t(\omega)) - f(X_{\tau_n(\omega)}(\omega))| \leqq \varepsilon\|f\|_1$ であり、従って, $\sup\{|f(X_t)| : \tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}\} \leqq |f(X_{\tau_n})| + \varepsilon\|f\|_1$。これから、補題 4 と命題 3, (i) を参照して

$$|||f(X_\tau)|||_{H_1} = \mathbb{E}[\sup_{t \geqq 0} |f(X_{t\wedge\tau})|] = \mathbb{E}[\sup_n [\sup\{|f(X_t)| : \tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}\}]]$$

$$\leqq \mathbb{E}[\sup_n |f(X_{\tau_n})|] + \varepsilon \|f\|_1 \leqq \mathbb{E}[\sup_n |f_n|] + 2\varepsilon K |||f(X_\tau)|||_{H_1}.$$

従って、 $\varepsilon \leqq 1/4K$ とすれば 命題3,(i)をもう一度使い、

$$K^{-1}\|f\|_1 \leqq |||f(X_\tau)|||_{H_1} \leqq 2\,\mathbb{E}[\sup_n |f_n|] = 2\|f(X_\tau)\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]}.$$

一方、補題4と命題3,(i)から

$$\mathbb{E}[\sup_n |f_n|] \leqq \mathbb{E}[\sup_n |f(X_{\tau_n})|] + \varepsilon\|f\|_1 \leqq \mathbb{E}[\sup_{t\geqq 0} |f(X_{t\wedge\tau})|] + \varepsilon\|f\|_1$$
$$\leqq (K+\varepsilon)\|f\|_1$$

を得るから，$M=2K$ として (a) が成立つ。

(b) $g \in BMO(\mathbb{D})$ とし、$|||g(X_\tau)|||_{BMO} \leqq 1$ を仮定する。$\gamma \leqq \tau$ なる stopping time γ に対し、$g(X_{t\wedge\tau}) = g(0) + \int_0^t g'(X_s)\,dX_{s\wedge\tau}$ より、$\mathbb{E}[g(X_\tau)|\mathcal{F}_\gamma] = g(0) + \int_0^\infty g'(X_s)\,dX_{s\wedge\gamma}$ を得るから、

$$\mathbb{E}[|g(X_\tau) - \mathbb{E}[g(X_\tau)|\mathcal{F}_\gamma]|^2] = \mathbb{E}[\int_\gamma^\tau |g'(X_s)|^2 ds]$$

そこで，$\sigma \leqq \tau$ なる stopping time σ と任意の $A \in \mathcal{F}_\sigma$ に対し、新たな stopping time γ を $\gamma(\omega) = \sigma(\omega)$ $(\omega \in A)$, $= \tau(\omega)$ $(\omega \in \Omega\setminus A)$ で定義すれば、上式と $|||g(X_\tau)|||_{BMO} \leqq 1$ より

$$(\#) \qquad \mathbb{E}[\int_\sigma^\tau |g'(X_s)|^2 ds \mid \mathcal{F}_\sigma] \leqq 1.$$

さて、$\sigma = 0$ のとき $\|g-g(0)\|_1 \leqq \|g-g(0)\|_2 = [\int |g(X_\tau) - g(0)|^2 d\mathbb{P}]^{1/2} = \mathbb{E}[\int_0^\tau |g'(X_s)|^2 ds]^{1/2} \leqq 1$. また、$g_n = \mathbb{E}[g(X_\tau)|\tilde{\mathcal{F}}_n]$ とおくと、まず $|g_0| = |g(0)| \leqq 1$。$n \geqq 1$ のときは、

$$\mathbb{E}[|g(X_\tau) - g_{n-1}|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] = \mathbb{E}[|g(X_\tau) - g_n|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] + |g_n - g_{n-1}|^2$$
$$= \mathbb{E}[|g(X_\tau)|^2 | \tilde{\mathcal{F}}_n] - |g_n|^2 + |g_n - g_{n-1}|^2.$$

補題2と4から $|g_n - g_{n-1}| \leqq |g_n - g(X_{\tau_n})| + |g(X_{\tau_n}) - g(X_{\tau_{n-1}})|$

$+|g(X_{\tau_{n-1}})-g_{n-1}| \leqq 3\varepsilon$。更に (#) より $\mathbb{E}[|g(X_\tau)|^2|\mathcal{F}_{\tau_n}] = |g(X_{\tau_n})|^2 + \mathbb{E}[\int_{\tau_n}^{\tau}|g'(X_s)|^2 ds|\mathcal{F}_{\tau_n}] \leqq |g(X_{\tau_n})|^2+1$。これから、$\mathbb{E}[|g(X_\tau)|^2|\tilde{\mathcal{F}}_n]-|g_n|^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}(|g(X_\tau)|^2|\mathcal{F}_{\tau_n})|\tilde{\mathcal{F}}_n]-|g_n|^2 \leqq \mathbb{E}[|g(X_{\tau_n})|^2|\tilde{\mathcal{F}}_n]+1-|g_n|^2 \leqq \mathbb{E}[|g(X_{\tau_n})-g_n|^2|\tilde{\mathcal{F}}_n]+1 \leqq 1+\varepsilon^2$。故に、$\mathbb{E}[|g(X_\tau)-g_{n-1}|^2|\tilde{\mathcal{F}}_n] \leqq 1+\varepsilon^2+(3\varepsilon)^2 = 1+10\varepsilon^2$. これと命題 3, (ii) より、

$$\|g(X_\tau)\|_{BMO[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} \leqq (1+10\varepsilon^2)^{1/2}|||g(X_\tau)|||_{BMO} \leqq (1+10\varepsilon^2)^{1/2}K\|g\|_{BMO}.$$

故に再び $M=2K$ として (b) が成立つ。(証明終)

前命題の (a) は $E_1=\{f(X_\tau): f\in H_1(\mathbb{D})\}$ が $H_1(\mathbb{D})$ と同型な $H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]$ の部分空間であることを示してゐる。この E_1 は complemented である. 実際, $E_2=\{f(X_\tau): f\in H_2(\mathbb{D})\}$ とおくと, E_2 は $L_2(\tilde{\mathcal{F}}_\infty)$ の閉部分空間であるから、$L_2(\tilde{\mathcal{F}}_\infty)$ から E_2 への直交射影を Q とする。このとき、Q は $H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]$ の norm について連続であることを示そう。$F\in L_2(\tilde{\mathcal{F}}_\infty)$ に対し $QF=h(X_\tau)$ を満たす $h\in H_2(\mathbb{D})$ を取ると

$$\begin{aligned}
\|QF\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} &= \|h(X_\tau)\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} \leqq M\|h\|_1 \\
&\leqq MC\sup\{|\textstyle\int_0^{2\pi} h\bar{g}\, d\theta/2\pi| : \|g\|_{BMO}\leqq 1\} \\
&\leqq MC\sup\{|\mathbb{E}[h(X_\tau)\overline{g(X_\tau)}]| : \|g(X_\tau)\|_{BMO[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]}\leqq M\} \\
&= MC\sup\{|\mathbb{E}[F\cdot\overline{g(X_\tau)}]| : \|g(X_\tau)\|_{BMO[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]}\leqq M\} \\
&\leqq \sqrt{2}M^2C\,\|F\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]}.
\end{aligned}$$

故に Q は $H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]$ 連続で、従って E_1 は complemented である。

8. $H_1(\delta)$ への埋込み。 終りに次の命題を示す。

命題 5. $H_1(\mathbb{D})$ は $H_1(\delta)$ の complemented subspace と同型である。

証明. $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$ の部分σ集合族の増加列 $(\mathcal{B}_n)$ を次のやうに作る。まづ $\mathcal{B}_{6n} = \tilde{\mathcal{F}}_n$, $n = 0, 1, \cdots$ とおく。次に $6n < m < 6(n+1)$ とする。B を $\tilde{\mathcal{F}}_n$ の atom とすると、構成法より $B = \bigcup_{j=1}^{64} B_j$, $\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(B)/64$, なる $\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}$ の atom B_j が一意に存在する。そこで

$$C_k = \bigcup \{ B_j : (k-1)2^{6(n+1)-m} + 1 \leq j \leq k \cdot 2^{6(n+1)-m} \}$$

$(k = 1, 2, \cdots, 2^{m-6n})$ とおき、B を動かして出来る C_k の全体を atom とするσ集合族を $\mathcal{B}_m$ とかく。このとき $(\mathcal{B}_m, \mathbb{P})$ は $(\mathcal{A}_m, dt)$ と同型で, 従って $H_1[(\mathcal{B}_m)] \cong H_1[(\mathcal{A}_m)] = H_1(\delta)$. 因って我々は $H_1(\mathbb{D})$ が $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ の complemented subspace に同型なことを示せばよい。これを二つに分けて示す.

(i) $f \in H_1(\mathbb{D})$ に対し、$\|f(\mathfrak{X}_\tau)\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]}$ と $\|f(\mathfrak{X}_\tau)\|_{H_1[(\mathcal{B}_n)]}$ は同値である。 これを示すために、$\tilde{f}_m = \mathbb{E}[f(\mathfrak{X}_\tau) \mid \mathcal{B}_m]$, $m = 0, 1, \cdots$ とおくと、

$$\|f(\mathfrak{X}_\tau)\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} = \mathbb{E}[\sup_n |\tilde{f}_{6n}|] \leq \mathbb{E}[\sup_n |\tilde{f}_n|] = \|f(\mathfrak{X}_\tau)\|_{H_1[(\mathcal{B}_n)]}.$$

また、$6n < m < 6(n+1)$ とすると、$\tilde{f}_m = \mathbb{E}[\tilde{f}_{6(n+1)} \mid \mathcal{B}_m]$。補題 4 により、$|\tilde{f}_{6n} - f(\mathfrak{X}_{\tau_n})| \leq \varepsilon \|f\|_1$, $|\tilde{f}_{6(n+1)} - f(\mathfrak{X}_{\tau_{n+1}})| \leq \varepsilon \|f\|_1$ であるが、更に補題 2 により $|f(\mathfrak{X}_{\tau_n}) - f(\mathfrak{X}_{\tau_{n+1}})| \leq \varepsilon \|f\|_1$ である

るから、$|\tilde{f}_{6n} - \tilde{f}_{6(n+1)}| \leqq 3\|f\|_1$ を得る。B' を $\mathcal{B}_m$ の atom とすれば、$\tilde{f}_m$, $\tilde{f}_{6n}$ は B' 上では一定だから、B' 上では

$$|\tilde{f}_m - \tilde{f}_{6n}| = |\mathbb{P}(B')^{-1}(\int_{B'} \tilde{f}_{6(n+1)} - \int_{B'} \tilde{f}_{6n})| \leqq \mathbb{P}(B')^{-1}\int_{B'} |\tilde{f}_{6(n+1)} - \tilde{f}_{6n}|$$
$$\leqq 3\varepsilon\|f\|_1.$$

故に、

$$\mathbb{E}[\sup_m |\tilde{f}_m|] \leqq \mathbb{E}[\sup_n |\tilde{f}_{6n}|] + 3\varepsilon\|f\|_1 \leqq (1+3M\varepsilon)\,\mathbb{E}[\sup_n |\tilde{f}_{6n}|].$$

これより、

$$\|f(X_\tau)\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]} \leqq \|f(X_\tau)\|_{H_1[(\mathcal{B}_n)]} \leqq (1+3M\varepsilon)\|f(X_\tau)\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]}.$$

(ii) $E_1 = \{f(X_\tau) : f \in H_1(\mathbb{D})\}$ は $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ の complemented subspace である。$Q : L_2(\tilde{\mathcal{F}}_\infty) \to E_2$ を前と同様の直交射影とすると，これは $L_2(\tilde{\mathcal{F}}_\infty)$ に $\|\cdot\|_{H_1[(\tilde{\mathcal{F}}_n)]}$ をつけたものについて連続だから、それより一般に強い norm $\|\cdot\|_{H_1[(\mathcal{B}_n)]}$ についても連続である。故に E_1 は $H_1[(\mathcal{B}_n)]$ の中でも complemented である。(証明終)

これで定理Aと定理Bの証明も終ったことになる。

9. 結語。 以上定理A及びBのMaureyの証明の概略を見て来た。原論文には更に多くの興味ある事実が述べられてゐる。例へば、$n \geqq 1$ に対して、$H_1(\mathbb{R}^n)$ や $H_1(S^n)$ (S^n は n 次元球面) はすべて $H_1(\delta)$ (従って $H_1(\mathbb{D})$) に同型であることなど。polydisk 乃至 torus についてはまだ問題が残ってゐるやうである。即ち，$m \neq n$ のとき $H_1(\mathbb{T}^m)$ と $H_1(\mathbb{T}^n)$ は同型か?

これについてBourgainは $m \geq 2$ ならば、$H_1(\mathbb{T}^m)$ と $H_1(\mathbb{T})$ は同型にならぬことを示した。一般にも同様の結果が成立つのではあるまいか？

参考文献

[1] B. Maurey, *Isomorphismes entre espaces H^1*, Acta Math. 145 (1980), 79–120.

[2] L. Carleson, *An explicit unconditional basis in H^1*, Bull. Sci. Math., 2e série, 104 (1980), 405–416.

[3] P. Wojtaszczyk, *The Franklin system is an unconditional basis in H_1*, Ark. för Mat. 20 (1982), 293–300.

[4] A. Pełczyński, *Banach Spaces of Analytic Functions and Absolutely Summing Operators*, CBMS Regional Conf. Series in Math. No. 30, Amer. Math. Soc., 1977.

[5] A. Garsia, *Martingale Inequalities*, Benjamin, 1973.

[6] K. E. Petersen, *Brownian Motion, Hardy Spaces and Bounded Mean Oscillation*, Cambridge Univ. Press, 1977.

[7] J. Bourgain, *The non-isomorphism of H^1-spaces in one and several variables*, J. Functional Analysis 46 (1982), 45–57.