数理解析研究所講究録
第 491 巻 1983 年 158-170

Martingale における Garnett-Jones の定理と (A_p) 条件

富山大・理　風巻 紀彦 (Norihiko Kazamaki)

§1. BMO-martingale

$(\Omega, \mathcal{F}, P : (\mathcal{F}_t))$ を通常の条件をみたす確率系とする。本稿では，さらに $(\mathcal{F}_t)$ に関する martingale の sample continuity を仮定して論ずる。簡単のため，uniformly integrable martingales の全体を $\mathcal{M}_u$，有界な martingales の全体を H_∞ で表そう。次に $M \in \mathcal{M}_u$, $1 \leq p < \infty$ に対し

$$\|M\|_{BMO_p} = \sup_t \left\| E[\,|M_\infty - M_t|^p \mid \mathcal{F}_t\,]^{1/p} \right\|_\infty$$

とおく。特に，M が L^2-有界のとき，$M^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_u$ に注意すれば，$\|M\|_{BMO_2} = \sup_t \left\| E[\,\langle M \rangle_\infty - \langle M \rangle_t \mid \mathcal{F}_t\,]^{1/2} \right\|_\infty$ となる。

<u>補題 1</u> (John-Nirenberg 型の不等式)

$$\|M\|_{BMO_1} < \frac{1}{4} \implies E[\,\exp\{|M_\infty - M_t|\} \mid \mathcal{F}_t\,] \leq \frac{1}{1 - 4\|M\|_{BMO_1}}$$

証明は，Dellacherie-Meyer ([1], p.193) を参照せよ。

最初に基本的な注意を与えよう。$\|M\|_{BMO_1} < \infty$ のとき，$N \equiv M/(8\|M\|_{BMO_1})$ に対し補題を用いれば

$$\exists C_p > 0 : \|M\|_{BMO_p} \leqq C_p \|M\|_{BMO_1} 。$$

他方，Jensen の定理から，$\|M\|_{BMO_1} \leqq \|M\|_{BMO_p}$ がある。従って $\|M\|_{BMO_1} \leqq \|M\|_{BMO_p} \leqq C_p \|M\|_{BMO_1}$ である。以後，$\|M\|_{BMO} \equiv \|M\|_{BMO_1}$ $BMO \equiv \{ M \in \mathcal{M}_u : \|M\|_{BMO} < \infty \}$ とする。定義より，$H_\infty \subset BMO$。

<u>例 1</u>　$B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ を 1 次元の Brownian Motion ($B_0 = 0$) とし，$M_t = B_{t\wedge 1}$ とおく。このとき，$M \notin H_\infty$。然し，$\langle M \rangle_t = t \wedge 1$ だから $\|M\|_{BMO_2} = 1$。従って，$M \in BMO \setminus H_\infty$.

BMO における H_∞ の性格について，例えば次の結果が知られている。

<u>定理 1</u>（Dellacherie - Meyer - Yor [2]）　$BMO \setminus H_\infty \neq \emptyset$ ならば，H_∞ は closed でも dense でもない。

これに関連して筆者が問題としたいのは，<u>BMO-martingale M に関する或る種の性質について，それが成立するか否かは M と H_∞ の距離に依存して決まるのではないか？</u> ということである。その性質として本稿では (A_p) 条件を考えてみたい。

§2. (A_p) 条件と逆向き Hölder の不等式

実数 α に対し，$Z_t^{(\alpha)} = \exp\{\alpha M_t - \frac{\alpha^2}{2}\langle M\rangle_t\}$ $(0 \leq t < \infty)$ とおき，特に $Z^{(1)}$ を Z で表すことにする。

__定義 1__　$1 < p < \infty$ とする。

$$(A_p)\qquad \sup_t \left\| E\left[\left(\frac{Z_t}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right]\right\|_\infty < \infty$$

がなりたつとき，Z は (A_p) 条件をみたすという。特に $Z_t/Z_\infty \leq C$ のとき，(A_1) 条件をみたすという。また，不等式

$$(R_p)\qquad E[Z_\infty^p \mid \mathcal{F}_t] \leq C_p Z_t^p \quad (0 \leq t < \infty)$$

を逆向き Hölder の不等式という。

Z が (A_p)，(R_p) をみたすことを，それぞれ $Z \in (A_p)$，$Z \in (R_p)$ とかくことにしよう。$1 < r < s < \infty$ のとき，$(A_r) \Longrightarrow (A_s)$．他方 $(R_s) \Longrightarrow (R_r)$ である。また，

$$M \in BMO \Longleftrightarrow Z \in (A_p) \text{ for some } p > 1$$

が知られている（[6]）。

一般の $M \in \mathcal{M}_u$ に対しては，Z は local martingale であって，$E[Z_\infty] \leq 1$ となるが，必ずしも $Z \in \mathcal{M}_u$ とは限らない。然し $M \in BMO$ の場合は，Jensen の定理により，任意の stopping time T に対して

$$E\left[\frac{Z_\infty}{Z_T} \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right] = E\left[\exp\left\{(M_\infty - M_T) - \frac{1}{2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\right\} \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right]$$
$$\geqq \exp\left\{-\frac{1}{2} E[\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T \mid \mathcal{F}_T]\right\}$$
$$\geqq \exp\left\{-\frac{1}{2}\|M\|^2_{BMO_2}\right\} \equiv C_M$$

i.e., $Z_T \leqq C_M^{-1} E[Z_\infty \mid \mathcal{F}_T]$, $\quad Z_\infty \in L^1$

つまり Z は class (D) に属す。従って $Z \in \mathcal{M}_u$。
すると $E[Z_\infty] = 1$ だから，$d\hat{P} \equiv Z_\infty dP$ は new probability measure をなし，$W_t \equiv Z_t^{-1}$ は $\hat{P}$ に関する uniformly integrable martingale となる。このとき，$1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ に対し

$$Z \in (R_p) \Longleftrightarrow W \in (A_q) \text{ w.r.t } \hat{P}$$

が成立する。これは，次の関係式から明らかであろう。

$$E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_t}\right)^p \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = E\left[\frac{Z_\infty}{Z_t}\left(\frac{W_t}{W_\infty}\right)^{p-1} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \hat{E}\left[\left(\frac{W_t}{W_\infty}\right)^{\frac{1}{q-1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

ただし，$\hat{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ は，$\hat{P}$ に関する条件付平均である。同様に

$$Z \in (A_p) \Longleftrightarrow W \in (R_q) \text{ w.r.t } \hat{P}$$

である。

§3. The distance in BMO to H_∞.

<u>定義 2</u> $M \in BMO$ に対し

$$\rho(M) \equiv \sup\left\{\alpha \geqq 0 : \exists C_\alpha > 0,\ E[\exp\{\alpha |M_\infty - M_t|\} \mid \mathcal{F}_t] \leqq C_\alpha, \forall t\right\}$$

定義より $M \in H_\infty$ ならば $\rho(M) = \infty$ である。

定理2 (Garnett-Jones [5], Varopoulos [7], Emery [4])
任意の $M \in BMO$ に対し

$$\frac{1}{4d(M, H_\infty)} \leqslant \rho(M) \leqslant \frac{4}{d(M, H_\infty)}$$

がなりたつ。ただし, $d(M,H_\infty) \equiv \inf_{N \in H_\infty} \|M-N\|_{BMO}$ 。

左側不等式は簡単だから, 先ずそれを示そう。martingale N が $|N| \leqslant c$ のとき,

$E[\exp\{\alpha|M_\infty - M_t|\}|\mathcal{F}_t] \leqslant e^{2\alpha c} E[\exp\{\alpha|(M-N)_\infty - (M-N)_t|\}|\mathcal{F}_t]$ 。
従って $\rho(M-N) \leqslant \rho(M)$ 。さらに, 補題1により上式右辺は, $0 \leqslant \alpha < 1/(4\|M-N\|_{BMO})$ に対し有界となるから, $\dfrac{1}{4\|M-N\|_{BMO}} \leqslant \rho(M)$。
故に, $\dfrac{1}{4d(M,H_\infty)} \leqslant \rho(M)$ が求まる。

右側不等式を得るためには, 次の補題を要す。

補題2 S, T を stopping times として,
$S \leqslant T \leqslant \infty$, $P(T<\infty|\mathcal{F}_S) \leqslant c^m$ (ただし, $0<c<1$, $m \in \mathbb{N}$)
を仮定するとき, 次の2条件をみたす stopping times R_0, $R_1, \dots, R_m$ が存在する:

(i) $S = R_0 \leqslant R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_m = T$

(ii) $\mathcal{P}(R_{j+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{R_j}) \leqslant c \quad (j = 0, 1, \ldots, m-1)$

（証明） martingale $X_t \equiv \mathcal{P}(T < \infty \mid \mathcal{F}_t)$ について, stopping times

$$S_j \equiv \inf\{t \geqq S : X_t \geqq c^{m-j}\} \quad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

を定める。仮定より $X_S \leqslant c^m$, $X_T = I_{\{T<\infty\}}$ だから, 先ず

$$S \leqslant S_0 \leqslant S_1 \leqslant \cdots \leqslant S_m \leqslant T$$

がある。さらに S_k の定義より

$$c^{m-j-1}\mathcal{P}(S_{j+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{S_j}) \leqslant E[X_{S_{j+1}} \mid \mathcal{F}_{S_j}] = X_{S_j} \leqslant c^{m-j},$$

従って $\mathcal{P}(S_{j+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{S_j}) \leqslant c$。そこで $R_0 = S$, $R_j = S_j \ (1 \leqslant j \leqslant m-1)$ $R_m = T$ とおけば

$$\mathcal{P}(R_1 < \infty \mid \mathcal{F}_{R_0}) = E[\mathcal{P}(S_1 < \infty \mid \mathcal{F}_{S_0}) \mid \mathcal{F}_{R_0}] \leqslant c \quad (\because R_0 \leqslant S_0)$$

$$\mathcal{P}(R_m < \infty \mid \mathcal{F}_{R_{m-1}}) \leqslant \mathcal{P}(S_m < \infty \mid \mathcal{F}_{S_{m-1}}) \leqslant c \quad (\because S_m \leqslant R_m)$$

また, $j = 2, 3, m-1$ に対しても, 作り方から当然

$$\mathcal{P}(R_j < \infty \mid \mathcal{F}_{R_{j-1}}) = \mathcal{P}(S_j < \infty \mid \mathcal{F}_{S_{j-1}}) \leqslant c$$

がなりたつ。 □

<u>定理2の右側不等式の証明</u>: $0 \leqslant a < \rho(M)$ ならば $a \leqslant \dfrac{4}{d(M, H_\infty)}$ を示せば十分である。そのために, 定数 $k > 0$ を

$$E[\exp\{a|M_\infty - M_t|\} \mid \mathcal{F}_t] \leqslant e^{ak} \quad (0 \leqslant t < \infty)$$

となるように定め, $0 < \varepsilon < 1$, $m > ak/\varepsilon^2$, $b \equiv m\varepsilon/a$ とする。

次に stopping times $T_0 \equiv 0$, $T_{j+1} \equiv \inf\{t \geq T_j : |M_t - M_{T_j}| = b\}$ $(j \geq 0)$ を定義すると，$\{T_{j+1} < \infty\} \subset \{|M_{T_{j+1}} - M_{T_j}| = b\}$ だから

$$\begin{aligned} e^{ab} P(T_{j+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{T_j}) &\leq E[\exp\{a|M_{T_{j+1}} - M_{T_j}|\} \mid \mathcal{F}_{T_j}] \\ &\leq E[\exp\{a|M_\infty - M_{T_j}|\} \mid \mathcal{F}_{T_j}] \\ &\leq e^{ak} \end{aligned}$$

従って $P(T_{j+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{T_j}) \leq e^{-a(b-k)} \leq c^m$，ただし $c \equiv e^{-\varepsilon(1-\varepsilon)}$。

そこで

$A^+ = \sum_{j=0}^{\infty} I_{\{M_{T_{j+1}} - M_{T_j} = b\}} I_{[\![T_{j+1}, \infty[\![}$，$A^- = \sum_{j=0}^{\infty} I_{\{M_{T_{j+1}} - M_{T_j} = -b\}} I_{[\![T_{j+1}, \infty[\![}$

とおく。先ず A^+ について，適当な stopping times $S_n \uparrow$ を用いて $A^+ = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[\![S_n, \infty[\![}$ と表しておく。簡単な計算から各 n に対し，$P(S_{n+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{S_n}) \leq c^m$ があるので，補題2より

$R_0 = 0$，$R_n \uparrow$，$R_{jm} = S_j$ $(j \geq 1)$，$P(R_{\ell+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{R_\ell}) \leq c$ $(\ell \geq 0)$

をみたす stopping times R_n が存在する。次に increasing process

$$B^+ \equiv \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} I_{[\![R_j, \infty[\![}$$

を考えると，$A^+ \leq B^+ \leq A^+ + 1$ がある。ここで，martingale $N_t^+ \equiv b\,E[B_\infty^+ \mid \mathcal{F}_t]$ を定義する。同様にして，A^- から B^-, N^- を定め $N = N^+ - N^-$ とおく。このとき，$L \equiv M - N \in H_\infty$ となる。実際に

$$\begin{aligned} L_\infty &= M_\infty - b(B_\infty^+ - B_\infty^-) \\ &= \{M_\infty - b(A_\infty^+ - A_\infty^-)\} + b(A_\infty^+ - B_\infty^+) - b(A_\infty^- - B_\infty^-) \end{aligned}$$

定義より，$b|A^{\pm}_{\infty}-B^{\pm}_{\infty}|\leq b$（複号同順），さらに

$$b(A^+_t-A^-_t)-M_t=\sum_{j=0}^{\infty}(M_{T_j}-M_t)I_{\{T_j\leq t<T_{j+1}\}}-M_tI_{\{t<T_1\}}$$

であるから，$|b(A^+-A^-)-M|\leq b$。従って $|L|\leq 3b$。

さて次に，B^+ の定義に注意すれば

$$P(B^+_{\infty}-B^+_{R_{j-1}}>\frac{i}{m}|\mathcal{F}_{R_j})=P(R_{j+i}<\infty|\mathcal{F}_{R_j})\leq c^i$$

だから $\{R_{j-1}<t\leq R_j\}$ 上では

$$E[B^+_{\infty}-B^+_{t-}|\mathcal{F}_t]=E\left[E[B^+_{\infty}-B^+_{R_{j-1}}|\mathcal{F}_{R_j}]\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\leq\frac{1}{m(1-c)}.$$

従って $\|N^+\|_{BMO}\leq\dfrac{2b}{m(1-c)}$。$N^-$ についても同じ評価が得られるから $\|N\|_{BMO}\leq\dfrac{4b}{m(1-c)}$。故に $d(M,H_{\infty})\leq\dfrac{4}{a}\dfrac{\varepsilon}{1-e^{-\varepsilon(1-\varepsilon)}}\longrightarrow\dfrac{4}{a}$ $(\varepsilon\to 0)$。 ▯

例 2　$M_t=B_{1\wedge t}$ とおく。例 1 で述べたように $M\in BMO\setminus H_{\infty}$. 然し，任意の $\alpha\geq 0$ に対し

$$E[\exp\{\alpha|M_{\infty}-M_t|\}|\mathcal{F}_t]\leq 2e^{\frac{1}{2}\alpha^2}$$

がなりたつので，$\rho(M)=\infty$。このとき定理 2 から $d(M,H_{\infty})=0$。従って，$M\in\overline{H}_{\infty}\setminus H_{\infty}$。

例 3　S を (B_t) と独立な stopping time で，しかも $\{S>t\}$ は $\mathcal{F}_t$-atom，$P(S\in dt)=e^{-t}dt$ とし，$M_t=B_{t\wedge S}$ とおく。このとき $M\in BMO$，$\rho(M)=\sqrt{2}$ である。実際に，$\langle M\rangle_t=t\wedge S$ だから

$$E[(M_\infty - M_t)^2 \mid \mathcal{F}_t] = E[(S-t) I_{\{S>t\}} \mid \mathcal{F}_t]$$
$$= \frac{1}{P(S>t)} E[(S-t) : S>t] I_{\{S>t\}}$$
$$= e^t \int_t^\infty (x-t) e^{-x} dx \cdot I_{\{S>t\}}$$
$$= I_{\{S>t\}}$$

従って $\|M\|_{BMO_2} = 1$。 さらに

$$E[\exp\{\alpha(M_\infty - M_t)\} \mid \mathcal{F}_t] = I_{\{S\leq t\}} + E[\exp\{\alpha(B_S - B_t)\} \mid \mathcal{F}_t] I_{\{S>t\}}$$
$$= I_{\{S\leq t\}} + E[\exp\{\tfrac{\alpha^2}{2}(S-t)\} \exp\{\alpha(B_S - B_t) - \tfrac{\alpha^2}{2}(S-t)\} \mid \mathcal{F}_t] I_{\{S>t\}}$$
$$= I_{\{S\leq t\}} + \left\{ \frac{e^{-t}}{P(S>t)} \int_t^\infty e^{\frac{1}{2}\alpha^2 x} \cdot e^{-x} dx \right\} I_{\{S>t\}}$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{if } \alpha \geq \sqrt{2} \\ I_{\{S\leq t\}} + \dfrac{e^{-(1-\frac{\alpha^2}{2})t}}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2} I_{\{S>t\}} \leq \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha^2} & \text{if } \alpha < \sqrt{2} \end{cases}$$

$E[\exp\{-\alpha(M_\infty - M_t)\} \mid \mathcal{F}_t]$ に関しても同じ結果が得られるので $\rho(M) = \sqrt{2}$ となる。このとき定理2により

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \leq d(M, H_\infty) \leq 2\sqrt{2}.$$

従って $M \in BMO \setminus \overline{H}_\infty$。

§4. H_∞ と (A_p) 条件.

<u>定理 3</u> $1<p<\infty$ に対し，次の (i), (ii) が成立する。

(i) $\quad d(M,H_\infty) \geqq 8(\sqrt{p}+1) \Longrightarrow Z \notin (A_p)$

(ii) $\quad d(M,H_\infty) \geqq 8(\sqrt{p}-1) \Longrightarrow Z \notin (A_p)$ or $Z^{(-1)} \notin (A_p)$.

(証明) (i): 対偶を示す。$r=\sqrt{p}/(\sqrt{p}-1)$, $s=\sqrt{p}$ とおけば,

$$\frac{1}{r(p-1)} - \frac{s}{r^2(p-1)^2} = \frac{1}{(\sqrt{p}+1)^2}, \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$$

従って，Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left\{\frac{1}{2(\sqrt{p}+1)^2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&\quad = E\left[\exp\left\{-\frac{1}{r(p-1)}(M_\infty - M_t) + \frac{1}{2r(p-1)}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t)\right\}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times \exp\left\{\frac{1}{r(p-1)}(M_\infty - M_t) - \frac{s}{2r^2(p-1)^2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&\quad \leqq E\left[\left(\frac{Z_t}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right]^{1/r} E\left[\frac{Z_\infty^{(\beta)}}{Z_t^{(\beta)}} \middle| \mathcal{F}_t\right]^{1/s}, \quad \text{但し } \beta = \frac{s}{r(p-1)}
\end{aligned}$$

$Z^{(\beta)} \in \mathcal{M}_u$ だから，右端辺の第2項は1。さらに $Z \in (A_p)$ ならば，第1項が有界となる。他方，容易に検証できるように，任意の実数 α に対して

$$E[\exp\{\alpha(M_\infty - M_t)\} \mid \mathcal{F}_t] \leqq E[\exp\{2\alpha^2(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t)\} \mid \mathcal{F}_t]^{1/2}$$

が成立する。従って，$E\left[\exp\left\{\frac{1}{2(\sqrt{p}+1)}|M_\infty - M_t|\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \leqq C_p$。すなわち，$\frac{1}{2(\sqrt{p}+1)} \leqq \rho(M)$。ところが，$(A_p)$ 条件から $(A_{p-\varepsilon})$ for some $\varepsilon>0$ があるため，実際は $\frac{1}{2(\sqrt{p}+1)} < \rho(M)$。従って，$d(M,H_\infty) < 8(\sqrt{p}+1)$。

(ii)：　$r=2\sqrt{p}/(\sqrt{p}+1)$，$s=2\sqrt{p}/(\sqrt{p}-1)$　とおけば，$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$　。さらに，$\left\{-\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)}+\frac{1}{r(p-1)}\right\}s=-\frac{1}{\sqrt{p}-1}$，$\frac{s}{r(p-1)}=\frac{1}{(\sqrt{p}-1)^2}$。　従って Hölderの不等式を用いて

$$
\begin{aligned}
&E\left[\exp\left\{-\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)}(M_\infty-M_t)\right\}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\
&\quad=E\left[\exp\left\{-\frac{1}{r(p-1)}(M_\infty-M_t)+\frac{1}{2r(p-1)}(\langle M\rangle_\infty-\langle M\rangle_t)\right\}\right.\\
&\qquad\quad\left.\times\exp\left\{\left(-\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)}+\frac{1}{r(p-1)}\right)(M_\infty-M_t)-\frac{1}{2r(p-1)}(\langle M\rangle_\infty-\langle M\rangle_t)\right\}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\
&\quad\leq E\left[\left(\frac{Z_t}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\middle|\mathcal{F}_t\right]^{1/r}E\left[\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_t^{(\lambda)}}\middle|\mathcal{F}_t\right]^{1/s},\quad \text{但し}\quad \lambda\equiv-\frac{1}{\sqrt{p}-1}\ 。
\end{aligned}
$$

$Z^{(\lambda)}\in\mathcal{M}_u$ だから右端辺の第2項は1。さらに，$Z\in(A_p)$ ならば第1項は有界となる。同様に，

$$Z^{(-1)}\in(A_p)\Longrightarrow E\left[\exp\left\{\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)}(M_\infty-M_t)\right\}\middle|\mathcal{F}_t\right]\leq C_p\quad(0\leq t<\infty)。$$

従って，Z 及び $Z^{(-1)}$ に対し (A_p) 条件を仮定すれば，$\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)}<\rho(M)$。このとき定理2により $d(M,H_\infty)<8(\sqrt{p}-1)$。　これは対偶が成立することを示している。 □

<u>注意</u>　(a)　(i)に関しては，$d(M,H_\infty)<8$ のときの情報を何も与えていないという不満が残る。

(b)　$Z\in(A_p)\Longrightarrow Z^{(-1)}\in(A_p)$　？　は不明である。多分駄目だろう。

最後に，定理3 (ii) の逆が成立しないことを例証しておく。

<u>例4</u>　$1 < p < \infty$ に対し，$\lambda > 0$ を次のように定める：

$$(*) \qquad \left(1+\frac{\lambda}{2\sqrt{2}}\right)^2 < p < 1+\frac{\lambda^2}{4}+\lambda\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{16}}$$

さらに，S を例3で与えた stopping time とし，$M_t \equiv \lambda B_{t\wedge S}$ とする。このとき，$M \in BMO$，$\rho(M)=\frac{\sqrt{2}}{\lambda}$ である。ところで (*) の左側不等式より，$\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)} < \rho(M)$ がある。従って $d(M,H_\infty) < 8(\sqrt{p}-1)$。
他方 (*) の右側不等式より，$1 \leqq \frac{\lambda^2}{2(p-1)^2}+\frac{\lambda^2}{2(p-1)}$ となるから

$$E\left[\left(\frac{1}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] = E\left[\exp\left\{-\frac{\lambda}{p-1}B_S+\frac{\lambda^2}{2(p-1)}S\right\}\right]$$

$$= E\left[\exp\left\{\frac{\lambda^2 S}{2(p-1)^2}+\frac{\lambda^2 S}{2(p-1)}\right\}\exp\left\{-\frac{\lambda}{p-1}B_S-\frac{\lambda^2}{2(p-1)^2}S\right\}\right]$$

$$= \int_0^\infty \exp\left\{\frac{\lambda^2 t}{2(p-1)^2}+\frac{\lambda^2 t}{2(p-1)}\right\}e^{-t}\,dt$$

$$= \infty 。$$

つまり，$Z \notin (A_p)$。

参考文献

[1] C. Dellacherie and P. A. Meyer, Probabilités et Potentiel, Herman, Paris 1980.

[2] C. Dellacherie, P. A. Meyer and M. Yor, Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Sém. Prob. XII, Lecture Notes in Math. 649(1978), 98-113.

[3] C. Doléans-Dade and P. A. Meyer, Inégalités de normes avec poids, Sém. Prob. XIII, Lecture Notes in Math. 721(1979), 313-331.

[4] M. Emery, Le théorème de Garnett-Jones d'après Varopoulos, Sém. Prob. XV Lecture Notes in Math. 850(1981), 278-284.

[5] J. B. Garnett and P. W. Jones, The distance in BMO to L^∞, Ann. Math. 108 (1978), 373-393.

[6] N. Kazamaki, A characterization of BMO-martingales, Sém. Prob. X, Lecture Notes in Math. 511(1976), 536-538.

[7] N. Varopoulos, A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO, Pacific J. Math. 90(1980), 201-221.