数理解析研究所講究録
第493巻 1983年 39-47

Real homogeneous polynomials の零点集合とその係数空間について

京大理 小池 敏司 (Satoshi Koike)

§1. 結果

$H_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を $r_j\,(\geq 1)$ 次 real homogeneous polynomial とする ($j = 1, \cdots, p$)。この時、$\mathbb{R}^n$ の中で $H_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap H_p^{-1}(0)$ の topological type を考える。homogeneous polynomials の零点集合は $0 \in \mathbb{R}^n$ を頂点とする cone をなすので、$0 \in \mathbb{R}^n$ の囲りでの local situation で決まる。ここでの目的は、上の性質に注目しながら degree $r_1, \cdots, r_p$ を fix した real homogeneous polynomials の係数空間が、その零点集合の topological type によって、どのように分割されるかを調べる事である。$r_0 = \max_{1 \leq i \leq p} \{r_i\}$ とおく。$r_0 = 1$ の時その topological type は、mapping $H = (H_1, \cdots, H_p)$ の rank で容易にわかるので、$r_0 > 1$ の場合が我々の主な興味の対象である。

$\mathcal{E}_{[s]}(n, p)$ を $(\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ の C^s map-germ の作る vector space、$J^r(n, p)$ を $\mathcal{E}_{[s]}(n, p)$ $(s \geq r)$ の元である

map-germ の r-jet の集合、$j^r(f)$ は mapping f の 0 での r-jet とする。更に次のように記号を定める；

$$J^{(r_1,\cdots,r_p)}(n,p) = J^{r_1}(n,1)\times\cdots\times J^{r_p}(n,1),$$

$$\mathcal{E}_{[s_1,\cdots,s_p]}(n,p) = \mathcal{E}_{[s_1]}(n,1)\times\cdots\times\mathcal{E}_{[s_p]}(n,1),$$

$$H(r_1,\cdots,r_p) = \{\, w=(w_1,\cdots,w_p)\in J^{(r_1,\cdots,r_p)}(n,p) \mid w_j : r_j\text{-th homogeneous polynomial } (1\leqq j\leqq p)\}.$$

この時、$H(r_1,\cdots,r_p)$ は自然にある Euclidian space $\mathbb{R}^N$ と同一視される。$\mathbb{R}^N$ の元 a に対し、その対応する $H(r_1,\cdots,r_p)$ の元を $H_a(x)$ で表わす事にする。

<u>定義</u>. (1) $(r_1,\cdots,r_p)$-jet $w=(w_1,\cdots,w_p)\in J^{(r_1,\cdots,r_p)}(n,p)$ が <u>v-sufficient</u> in $\mathcal{E}_{[s_1,\cdots,s_p]}(n,p)$ とは、各 j $(1\leqq j\leqq p)$ に対し $j^{r_j}(f_j)=j^{r_j}(g_j)=w_j$ を満たす任意の $f=(f_1,\cdots f_p)$, $g=(g_1,\cdots,g_p)\in\mathcal{E}_{[s_1,\cdots,s_p]}(n,p)$ に対し、$f_1^{-1}(0)\cap\cdots\cap f_p^{-1}(0)$ と $g_1^{-1}(0)\cap\cdots\cap g_p^{-1}(0)$ の $0\in\mathbb{R}^n$ での germ が homeomorphic になる時言う。

(2) r-jet $w\in J^r(n,p)$ が <u>R-C^0-sufficient</u> (resp. <u>RL-C^0-sufficient</u>) in $\mathcal{E}_{[s]}(n,p)$ とは、$j^r(f)=j^r(g)=w$ を満たす任意の $f, g\in\mathcal{E}_{[s]}(n,p)$ に対し、ある local homeomorphism $\sigma:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$ (resp. $(\mathbb{R}^p,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$) が存在して $f=g\circ\sigma$ (resp. $\tau\circ f=g\circ\sigma$) が成立する時言う。

(3) $H, G \in H(r_1, \cdots r_p)$が同じ$v$-typeを持つと言うのは、ある global homeomorphism $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が存在して $\sigma(H^{-1}(0)) = G^{-1}(0)$ が成立する時言う。

ここで、$\mathbb{R}^N$の中の"undesirable set"として、

$\Sigma^* = \{ w \in H(r_1, \cdots, r_p) \mid \text{not } v\text{-sufficient in } \mathcal{E}_{[w]}(n, p) \}$

とおく。この時、次の結果を得る。

定理. $n \geq p$とする。その時 $\mathbb{R}^N$ は次の性質を満たす disjoint subset $W_1, \cdots, W_a, W_1', \cdots, W_b'$ に分解される。

(1) 各W_i, W_j'は semi-algebraic, connected な analytic manifold である。

(2) 各W_iは$\mathbb{R}^N - \Sigma^*$の connected component であり、$\Sigma^* = W_1' \cup \cdots \cup W_b'$である。

(3) 各W_i, W_j'上"v-class"は unique である。

(4) Σ^*は closed in $\mathbb{R}^N$, $\dim \Sigma^* < N$ であり、更にΣ^*は、$0 \in \mathbb{R}^N$を vertex とする cone である。

注意. (1) Σ^*の定義で、$H = (H_1, \cdots, H_p)$をr_0-jet とせずに$(r_1, \cdots r_p)$-jet と考えた理由；

(i) 各jに対し、H_jはr_j-th homogeneous である。

(ii) $H_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap H_p^{-1}(0)$ を mapping $H=(H_1, \cdots, H_p) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ の零点集合と思うより、p個の function $H_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ の零点集合と思う方が自然である。

(2) (i) $n < p$ の時、同様の結果は面白くない。何故なら任意の $a \in \mathbb{R}^N - \Sigma^*$ に対し $H_a^{-1}(0) = \{0\}$ であり、更に $\mathrm{codim}\, \Sigma^* \geqq 2$ であるから。

(ii) $n > p$, $r_0 > 1$ の時、$\mathbb{R}^N - \Sigma^*$ 上に現われる v-class は2個以上である。従って $\mathrm{codim}\, \Sigma^* = 1$ である。

(3) それ上 v-type が同じであるという $\mathbb{R}^N$ の connected subset による maximal な分割は、Σ^* に compatible でない；例えば、$n=2$, $p=1$, $r=3$ の時、ある connected subset $V \subset \mathbb{R}^N$ が存在して、V 上 v-type は unique で、$V \cap \Sigma^* \neq \phi$, $V \cap (\mathbb{R}^N - \Sigma^*) \neq \phi$ である。

(4) v-type に関する Thom−Varčenko 型定理の応用として、次の事がわかる。$r_1 = \cdots = r_p$ の時、ある proper algebraic set $V \subset \mathbb{R}^N$ が存在して、$\mathbb{R}^N - V$ の connected component 上 v-type は unique で、$\mathbb{R}^N - V$ の各元は v-sufficient である。(T. C. Kuo [7], R. Thom [9], A. N. Varčenko [10])

定理の証明には次に述べる Proposition, homogeneous polynomial mapping の場合の v-sufficiency に関する結果が必要である。

Proposition の結果に、注意(4)で述べた3人のやり方を適用していく事により定理が得られる。

<u>Proposition</u>. $n \geqq p$ とし、$H=(H_1,\cdots,H_p)$, H_j: r_j-th homogeneous ($1 \leqq j \leqq p$) とする。この時、次の条件は同値である。

(a) $H^{-1}(0) \cap \Sigma H = \{0\}$ ($r_0 = 1$ の時は ϕ)、但し ΣH は mapping $H: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ の singular point set である。

(b:s) $H \in J^{r_0}(n,p)$ は、v-sufficient in $\mathcal{E}_{[s]}(n,p)$ である。

$(s = r_0, r_0+1, \cdots, \infty, \omega)$

(c) $H \in J^{(r_1,\cdots,r_p)}(n,p)$ は、v-sufficient in $\mathcal{E}_{[r_1+1,\cdots,r_p+1]}(n,p)$ である。

(d) $H \in J^{(r_1,\cdots,r_p)}(n,p)$ は、v-sufficient in $\mathcal{E}_{[\omega]}(n,p)$ である。

§2. 考察と問題

(I) homogeneous case

$p = 1$ の時、多項式の位相型に関する福田の定理([3])、孤立特異点を持つ family に関する King の結果([5] or [1])を適用する事により、"v-type" を "local R-C^0-type" に変えても §1 の定理はそのまま成立する。

<u>問題</u>. $p \geq 2$, $r_1 = \cdots = r_p$ の時、定理の "v-type" を "local RL-C^0-type" に変えても(但し、W_j' の存在は除く)、そのまま成立するか?

<u>予想</u>. $w \in J^r(n,p)$、但し、w_j : r-th homogeneous $(1 \leq j \leq p)$ とする。この時、次は同値である。

w : RL-C^0 sufficient $\Leftrightarrow$ w : topologically finitely-determined

(i.e. $\exists l \geq r$ s.t. w ; RL-C^0-sufficient as l-jet).

(III) Thom-Varčenko 型定理

$J^r(n,p) \supset \Sigma_r^* = \{$not finitely v-determined$\}$

$J^r(n,p) \supset \Sigma_r = \{$not v-sufficient$\}$ とおく。

定義より、$\Sigma_r \supsetneqq \Sigma_r^*$ で、どちらも semi-algebraic subset ([2], [7]) である。$s > r$ とし、$\pi_s : J^s(n,p) \longrightarrow J^r(n,p)$ を canonical projection とする。この時、$J^r(n,p)$, $J^s(n,p)$ を次の性質を持つように分割するのは難しくない。

$$J^s(n,p) = \underbrace{U_1' \cup \cdots \cup U_{l_s}'}\ \cup\ \underbrace{V_1' \cup \cdots \cup V_{m_s}'}\ \cup\ \underbrace{W_1' \cup \cdots \cup W_{n_s}'} \quad \text{(disjoint)}$$

$$J^r(n,p) = \underbrace{U_1 \cup \cdots \cup U_{l_r}}\ \cup\ \underbrace{V_1 \cup \cdots \cup V_{m_r}}\ \cup\ \underbrace{W_1 \cup \cdots \cup W_{n_r}} \quad \text{(disjoint)}$$

(1) 各 $U_i, V_j, W_k, U_i', V_j', W_k'$ は semi-algebraic, connected な analytic manifold である。

(2) $J^s(n,p)$ の各 manifold は、$J^r(n,p)$ のある manifold の上に onto に写る（但し、上の矢印と反対方向の向きにのみ写る）。

(3) 各 $U_i, V_j, W_k, U_i', V_j', W_k'$ 上 (local) v-class は unique である。

(4) $\Sigma_r^* = W_1 \cup \cdots \cup W_{n_r}$, $\Sigma_r - \Sigma_r^* = V_1 \cup \cdots \cup V_{m_r}$

$\Sigma_s^* = W_1' \cup \cdots \cup W_{n_s}'$, $\Sigma_s - \Sigma_s^* = V_1' \cup \cdots \cup V_{m_s}'$ である。

§1 注意 (4) で述べた variety の Thom-Varčenko 型定理は、上の図式における"選択"の問題と言える；$w \in J^r(n,p)$, $s = r+1$ の時、w を π_{r+1}^{-1} で $J^{r+1}(n,p)$ に持ちあげると、選択する $V_1' \cup \cdots \cup V_{m_s}' \cup W_1' \cup \cdots \cup W_{n_s}'$ の元が、$U_1' \cup \cdots \cup U_{\ell_s}'$ の元と比べて非常に少ない事を示している i.e. $\pi_{r+1}^{-1}(w) \supset {}^{\exists}V$ proper algebraic set s.t. $V \supset \pi_{r+1}^{-1}(w) \cap (V_1' \cup \cdots \cup V_{m_s}' \cup W_1' \cup \cdots \cup W_{n_s}')$.

$p=1$ の時には、上の結果は v-type を R-C^0-type に変えても成立する。Thom-Varčenko 型定理については先に述べた通りであるが、福田の定理 ([3]) は図式の横関係を表わしている事がわかる。更に [6] で構成した example (R-C^0-sufficient でないが、その realization の R-C^0-type は有限個) は、$w \in V_j$

が、π_{r+1}^{-1} によって R-C^0-type の異なる V_i' を選択したと言える。

いわゆるThom-Varčenko 定理（mapping の RL-C^0-type のもの）は、多くの人達によって研究されている（R. Thom [9], A. N. Varčenko [11], T. Fukuda [4], A. du Plessis [8]）。最後に、非常に"虫のよい"問題を掲げておく。

<u>問題</u>. $p \geq 2$ の時、V-type を RL-C^0-type に変えても、同じ図式が言えるか（但し、V_j, W_k 上では (3) の性質は除く事にする）？

REFERENCES

1. J. Bochnak and W. Kucharz : Sur les germs d'applications differentiables a singularités isolées, Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), 115 -131.
2. J. Bochnak and T. C. Kuo : Rigid and finitely V-determined germs of C^∞ mappings, Canad. J. Math. 25(4) (1973), 417-424.
3. T. Fukuda : Types topologiques des polynômes, Publ. Math. I.H.E.S. 46 (1976), 87-106.
4. T. Fukuda : Local topological properties of differentiable mappings. I, Invent. Math. 65 (1981), 227-250.
5. H. King : Topological type of families of singularities.
6. S. Koike and W. Kucharz : Sur les réalisations de jets non suffisants, C. R. Acad. Sc. Paris, t.288 (26 février 1979), Série A 457-459.
7. T. C. Kuo : Characterizations of v-sufficiency of jets, Topology 11 (1972), 115-131.
8. A. du Plessis : On the genericity of topologically finitely-determined map-germs, Topology 21, No. 2 (1982), 131-156.
9. R. Thom : Local topological properties of differentiable mappings, Colloq. on differential analysis, Oxford Univ. Press (1964), 191-202.
10. A. N. Varčenko : Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic varieties and families of polynomial mappings, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 36 (1972), 957-1019 = Math. USSR Izv. 6 (1972), 949-1008.
11. A. N. Varčenko : Local topological properties of differentiable mappings, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38 (1974) = Math. USSR Izv. 8 (1974), 1033-1082.