数理解析研究所講究録
第493巻1983年82-100

位相型有限確定特異点の位相的性質

千葉大 理 福田拓生

C^∞ 写像の特異点でその位相型が有限回のジェットで決まるものを位相型有限確定特異点とよぶ。(詳しい定義は§1)。位相型有限確定特異点は 次の意味で"非常に一般的"である。すなわち，位相型有限確定でない特異点のジェットの集合は無限ジェット空間 $J^\infty(n,p)$ の無限余次元部分集合となる。定義により，位相型有限確定特異点は 多項式写像の特異点と位相的に同型になる。又その零点集合の特異点は孤立特異点であることが知られている。従って この位相型有限確定特異点達が かなり良い性質を持つであろうことが容易に予測される。研究対象として魅力のある所以である。しかし これらの幾何学的考察はあまりなされていない。

本稿では，これらの幾何学的研究の一端として，位相型有限確定特異点の零点集合とまわりにあらわれる特異点の集合とが 相互にかなり規制しあっているらしいことを暗示するいくつかの事実を紹介する。(§3, §5)。次に，考察を再に進めるには，特異点集合の 新しい方向の 大域的研究が必要

になることをみる。(§5, §6)。

目　次

1. $\boxed{\text{定義}}$ 二つの写像芽 $g, f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\boxed{\text{位相同型}}$ であるとは 同相写像の芽 $h_1 : (\mathbb{R}^n, 0)\circlearrowleft$ と $h_2 : (\mathbb{R}^p, 0)\circlearrowleft$ が存在して $g = h_2 \circ f \circ h_1$ となるときにいう。C^∞ 写像芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ が $\boxed{\text{位相型-}k\text{- 確定}}$ であるとは $j^k g(0) = j^k f(0)$ なる任意の C^∞ 写像芽 g が f に位相同型になるときにいう。ここに $j^k f(0)$ は f の 0 における k-jet とよばれるもので，f の原点における k 次の Taylor 多項式(剰余項を除く)のことと思ってよい。f が 位相型-k- 確定ならば，f は

その k次の Taylor多項式に位相同型になる。ある自然数 $k>0$ に対して 位相型-k-確定のとき，位相型有限確定という。

2. 考察の基礎となる定理.（[F1], [F2]）.

$\tilde{f}:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を位相型有限確定特異点とする。そのとき $\tilde{f}$ は次の性質をもつ位相型有限確定特異点 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に位相同型である。同じ記号 f で写像芽 f の代表元たる C^∞ 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ を表わし，$D^n_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leq\varepsilon\}$ $S^{p-1}_\delta=\{y\in\mathbb{R}^p \mid \|y\|=\delta\}$ とするとき，充分小さい $\varepsilon>0$ と更に充分小さい $\delta>0$ に対して 次が成立つ。

(I) $f^{-1}(S^{p-1}_\delta)\cap D^n_\varepsilon$ は C^∞ 多様体 (possibly with boundary).

(II) 制限写像 $f|D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^{p-1}_\delta): D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^{p-1}_\delta)\to S^{p-1}_\delta$ は位相安定写像である。((n,p) が nice pair のときは C^∞安定となる。) 更にその位相型は ε,δ によらず一定である。

(III) (II)の制限写像の位相型は f の位相型を決定する。

従って 位相型有限確定特異点の幾何学的性質を調べるには (I) (II) (III)の性質をもつそれを研究すればよいことになる。

3. Euler-Poincaré-Morse 型の定理.

$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ を前節であげた条件(I)(II)をみたす位相型有限確定特異点とする。すると 充分小さい $\varepsilon>0$ と更に小さい $\delta>0$ に対して 制限写像 $f: D^n\cap f^{-1}(S^1_\delta)\to S^1_\delta$ は C^∞ 安定写像である。$\theta: S^1_\delta\to \mathbb{R} \bmod 2\pi$ を角度をあらわす関数とすると $\theta\circ f: D^n\cap f^{-1}(S^1_\delta)\to\mathbb{R} \bmod 2\pi$ は Morse の関数となる。このとき次の事達がわかる。

(3-1). 点 $q\in D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^1_\delta)$ が $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ の特異点である必要充分条件は q が $\theta\circ f$ の臨界点となることである。

$$\begin{cases} b_i(S^{n-1}_\varepsilon\cap f^{-1}(0)) = S^{n-1}_\varepsilon\cap f^{-1}(0) \text{ の } i \text{ 次 Betti 数} \\ \chi(S^{n-1}_\varepsilon\cap f^{-1}(0)) = S^{n-1}_\varepsilon\cap f^{-1}(0) \text{ の Euler の標数} \\ m_i(f) = \text{Morse の関数 } \theta\circ f \text{ の指数 } i \text{ の臨界点の個数} \end{cases}$$

とおくとき

(3-2). $b_i(S^{n-1}_\varepsilon\cap f^{-1}(0))$, $m_i(f)$ は, $\varepsilon>0$, $\delta>0$ によらず一定である。

(3-3) 特別な場合として $f^{-1}(0)=\{0\}$ の場合, ε に対して

$\delta>0$ を充分小さくとると $f^{-1}(S^1_\delta)\subset D^n_\varepsilon$ となり, $f^{-1}(S^1_\delta)=D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^1_\delta)$ は S^{n-1} に微分同相である。従って制限写像 $\theta\circ f: f^{-1}(S^1_\delta)\longrightarrow \mathbb{R} \bmod 2\pi$ は被覆 $\pi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \bmod 2\pi$ に対して lifting $\widetilde{\theta\circ f}: f^{-1}(S^1_\delta)\longrightarrow\mathbb{R}$ をもつ。

Euler-Poincaré-Morse型の定理 ([F₂], [F₃]). $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^2,0)$ を前節の条件(I)(II)を充す位相型有限確定写像芽とする。そのとき

(a) 等式 $\sum(-1)^i m_i(f)+\chi(S^{n-1}_\varepsilon\cap f^{-1}(0))=\chi(S^{n-1})$ が成立。

(b) 特に $f^{-1}(0)=\{0\}$ の場合 次のMorseの不等式が成立つ。

$$m_0(f)\geqq b_0(S^{n-1})=1$$

$$m_1(f)-m_0(f)\geqq b_1(S^{n-1})-b_0(S^{n-1})=-1$$

$$m_2(f)-m_1(f)+m_0(f)\geqq b_2(S^{n-1})-b_1(S^{n-1})+b_0(S^{n-1})=1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_{n-2}(f)-m_{n-3}(f)+\cdots+(-1)^{n-2}m_0(f)\geqq(-1)^{n-2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i m_i(f)=\chi(S^{n-1})$$

4. 一般化の試み－Thomの多項式

3節で述べた定理は 一般の次元の有限確定特異点に関しても このような調和が存在するであろうことを暗示している。3節の定理の証明では 性質(II) に対して ベクトル場に関する Euler-Poincaréの定理 及び 関数に対する Morseの不等式を適用した。([F$_2$], [F$_3$])． 3節の定理の一般化を試みようとすると，まづ思いつくことは Morseの不等式の一般化といえる Thomの多項式を適用することである。Thomの多項式とは次のようなものである。([H-K])

$J^r(M,N)$ で $M\times N$ 上の r-jet bundle をあらわす。$\Sigma\subset J^r(m,n)$ を 詳しくは述べないが，自然な或る条件をみたす部分集合とする。$\Sigma_{M,N}$ で Σ に対応する $J^r(M,N)$ の部分集合をあらわすものとする。

定理 (Thom). 4.1 $f:M\to N$ をその r-jet 拡大 $j^rf:M\to J^r(M,N)$ が $\Sigma_{M,N}$ に横断的であるような C^∞ 写像とする。すると 集合 $j^rf^{-1}(\Sigma_{M,N})$ は M の mod2-cycle となる。更にそのホモロジー類 $[j^rf^{-1}(\Sigma_{M,N})]\in H_*(M:Z_2)$ の Poincaré 双対定理による双対類 $[j^rf^{-1}(\Sigma_{M,N})]^*\in H^*(M:Z_2)$ は

Stiefel-Whitney 特性類 $W_i(M)$, $f^*W_j(N)$ の多項式として

$$[j^r f^{-1}(\Sigma_{M,N})]^* = P_\Sigma(\cdots, W_i(M), \cdots, f^*W_j(N), \cdots)$$

とあらわせる。更に多項式 P_Σ は多様体 M, N や写像 f には依らず Σ のみで定まるものである。

注意　Σ が与えられたとき多項式 P_Σ を決定するのは一般にむづかしい問題である。Ronga や安藤良文等により研究されているが簡単な（2次の order の Thom-Boardman 特異集合）場合にしか決定されていない。

P_Σ が決定されている一番簡単な場合として次をあげよう。

定理 4.2 (Thom)　$f: M^n \longrightarrow N^2$ をコンパクト向き付可能多様体から向きづけ可能曲面への C^∞ 安定写像とする。すると f の特異点は「折り目」と「尖点」しかないが，次の事がなりたつ。

(a)　$[\{f \text{ の特異点}\}]^* = W_{n-1}(M)$

(b)　$[\{f \text{ の尖点}\}]^* = W_n(M)$

(b)′　f の尖点の個数 $\equiv \chi(M) \pmod 2$

定理 4.3 (Thom). $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $n \geq p$, を $j^1 f: M \to J^1(M, \mathbb{R}^p)$ が $\Sigma_i = \{ j^1 g(x) \in J^1(M, \mathbb{R}^p) \mid \operatorname{rank} dg_x = i \}$, $i = 0, 1, \cdots p$ に横断的とする。$S(f) = \{ f$ の特異点$\}$ とおく。そのとき $[S(f)]^* = W_{n-p+1}(M) \in H^{n-p+1}(M : Z_2)$.

5. Thomの多項式の応用.

定理4.2の応用を考えてみよう。$f: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ を2節における性質 (I)–(III) をもつ位相型有限確定特異点とする。すると充分小さい $\varepsilon > 0$ と更に小さい $\delta > 0$ に対して

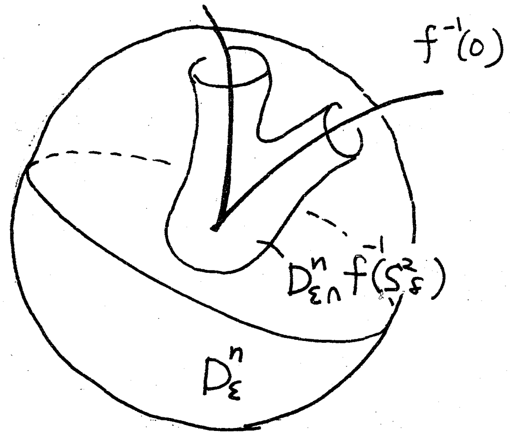
(I) $D^n_\varepsilon \cap f^{-1}(S^2_\delta)$ は C^∞ 多様体になる。

(II) 制限写像 $f: D^n_\varepsilon \cap f^{-1}(S^2_\delta) \longrightarrow S^2_\delta$ は C^∞ 安定写像となる。

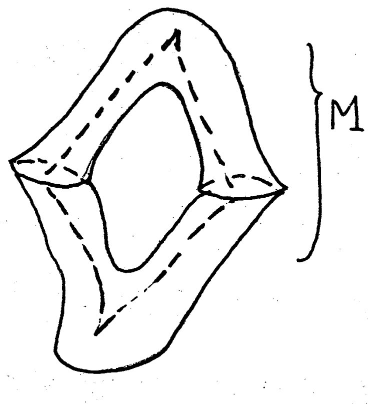
A) $f^{-1}(0) = \{0\}$ の場合. この場合, $\delta > 0$ が $\varepsilon > 0$ に対して充分小さいと $D^n_\varepsilon \cap f^{-1}(S^2_\delta) = f^{-1}(S^2_\delta)$ となり更に $f^{-1}(S^2_\delta)$ は S^{n-1} に微分同相になる。この場合すぐに上の定理4.2が応用できて (b)′ より「$f | f^{-1}(S^2_\delta) : f^{-1}(S^2_\delta) \to S^2_\delta$ の尖点の個数 $\equiv \chi(f^{-1}(S^2_\delta)) \equiv \chi(S^{n-1}) \equiv 0 \mod 2$」であることがわかる。

残念ながら 定理4.2(a) からは何もでてこない。$f^{-1}(S_\delta^2)$ は球面に同相なので，この(a) からは $f|f^{-1}(S_\delta^2)$ の特異点の集合 $S(f|f^{-1}(S_\delta^2))$ に関する情報は何も得られないのである。

B). $f^{-1}(0) \neq \{0\}$ の場合。$D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^2)$ は図のように境界をもつ多様体になる。又その境界 $\partial(D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^2)) = S_\varepsilon^{n-1} \cap f^{-1}(S_\delta^2)$ は $(f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{n-1}) \times S^2$ に微分同相になる。さて $D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^2)$ の二つのコピーを境界で張り合わせたものを考える。



$$M = (D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^2)) \cup (D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^2))$$



M から S_δ^2 への写像 $\tilde{f}: M \to S_\delta^2$ を f の二つのコピーをそのまゝはりあわせて造る。$\tilde{f}$ 自身は C^∞ 写像ではないが，少し摂動すれば C^∞ 安定写像になる。この時特異点達は少し位置がずれるだけで他の性質は保もたれる。さてこの $\tilde{f}$ に 定理4.2 をあてはめると，(b)′ より

(1) $\tilde{f}$ の cusp の個数 $\equiv \chi(M) \mod 2$

一方$\hat{f}$はfのcopyを二つならべたものだから

(ロ) $\hat{f}$のcuspの個数$=2\times f$のcuspの個数$\equiv 0 \mod 2$。

Mayer-VietorisのExact sequenceを$M=D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^2_\delta)\cup D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^2_\delta)$に適用すると,

$$\chi(M)+\chi(\partial(f^{-1}(S^2_\delta)\cap D^n_\varepsilon))=2\chi(D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^2_\delta)).$$

故に $\chi(f^{-1}(0)\cap S^{n-1}_\varepsilon)\equiv\chi((f^{-1}(0)\cap S^{n-1}_\varepsilon)\times S^2_\delta)$

$=\chi(\partial(D^n_\varepsilon\cap f^{-1}(S^2_\delta)))\equiv\chi(M) \mod 2$

(ハ) $\chi(S^{n-1}_\varepsilon\cap f^{-1}(0))\equiv\chi(M) \mod 2.$

(イ)(ロ)(ハ)より

(ニ) $\chi(S^{n-1}_\varepsilon\cap f^{-1}(0))\equiv 0 \mod 2$ を得る。

定理4.2の(a)はこの場合もtrivialに意味がなくなり適用できない。 以上をまとめると次の細やかな結果となる。

$\boxed{\text{定理}}$ $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^3,0)$ を2節の定理の性質(I)(II)をみたす位相型有限確定写像芽とする。そのとき

A) $f^{-1}(0)=\{0\}$ の場合，原点のまわりにあらわれる尖点の集合は{偶数個の点}のconeに同相である。

B) $f^{-1}(0)\neq\{0\}$ の場合，$\chi(S^n_\varepsilon\cap f^{-1}(0))\equiv 0 \mod 2.$

6. 問題－大域的研究

もう少しThomの多項式の応用を試みてみよう。写像芽をより一般の次元で考える。$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$，$n>p>3$，で§2の性質(I)(II)をみたすものを考える。再に前節のA)の場合，すなわち $f^{-1}(0)=\{0\}$ の場合を考える。すると充分小さい $\delta>0$ に対して

(I) $f^{-1}(S^{p-1}_\delta)$ は S^{n-1} に微分同相となり

(II) 制限写像 $f: f^{-1}(S^{p-1}_\delta)\to S^{p-1}_\delta$ は位相安定写像になる。

さて我々はここで $f: f^{-1}(S^{p-1}_\delta)\to S^{p-1}_\delta$ のある型の特異点の集合がどのようになっているかに興味を持つ。§3や§5の考察によると何らかの位相的規制を受けているはずである。所が Thomの多項式は このcaseに対して何も答えてくれない。それは $f^{-1}(S^{p-1}_\delta)$ が球面に同相なので そのホモロジー群が中間次元で消えているので，Thomの多項式は答えられないのである。Thomの多項式は 写像$g:M\to N$ が与えられたとき，gの特異点のMの中における homological な位置に関する情報を与えるものであって，いくらgの特異点の集合が位相的に複雑な構造をもっていてもMのホモロジー群が

消えていれば何も答えてくれない。

我々は写像の種々の型の特異点の集合の位相（又は幾何）に興味があるので，Thomの多項式にかわって　我々の要請に応えるものをみつけ（造り出さ）なければならない。

$\boxed{\text{問題 I}}$　今　$\Sigma \subset J^r(m, n)$ を　ある良い特異点の集合としたとき，$(j^r f)^{-1}(\Sigma_{M,N})$ の位相　及び微分構造　と M, N のそれとは　どのような関係があるか？　但しここで　$f: M \to N$ は $j^r f: M \to J^r(M, N)$　が　$\Sigma_{M,N}$ に横断的なものとする。

再に $(j^r f)^{-1}(\Sigma)$ のMの中における相対的な位置に関しても　たとへ　それが　Mのホモロジー類として trivial であっても　embed された状態　は一般に trivial でない。（例えば knot や Link のように）。このような観点からの問題も興味がある。

次節で　問題 I に対する　最も単純な場合の考察をする。その考察から，上の問題がかなり内容のある答えを持っていることが予想される。

7. 折り目型特異点の集合のトポロジー.

前節の問題の最も簡単な場合を考察しよう。全ての特異点の中で最も単純なものは折り目の特異点である。$N=\mathbb{R}^p$とし，更に写像$f:M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$の特異点が折り目のみと仮定したとき$f$の特異点の集合$S(f)$のトポロジーと$M$のそれとはどのように関係しているであろうか。ちなみに$f:M \to N$の特異点$q \in M$が折り目の特異点であるとは，qを中心とする局所座標$(x_1, \cdots, x_n)$及び$f(q)$を中心とする局所座標$(y_1, \cdots, y_p)$を適当にえらぶときfが局所的に

$$(7\text{-}1) \quad \begin{cases} y_i \circ f = x_i & i \leq p-1 \\ y_p \circ f = -x_p^2 - \cdots - x_{p+\lambda-1}^2 + x_{p+\lambda}^2 + \cdots + x_n^2 \end{cases}$$

とあらわせるときにいう。次の定理が証明できる。

定理 Mを compact な多様体とし，$f:M^n \to \mathbb{R}^p$, $n \geq p$，を特異点としては折り目しかもたないC^∞写像とする。$S(f)=\{q \in M \mid q$はfの特異点$\}$とおくとき次を得る。

(a) $\chi(M) \equiv \chi(S(f)) \mod (2)$

(b) $W_{n-k+1}(M) \neq 0 \Longrightarrow W_{p-k}(S(f)) \neq 0 \quad (p-1 \geq k \geq 1)$

(c) $n-p+1 = \text{even}$ のとき $\chi(M) = \chi(S_+(f)) - \chi(S_-(f))$

但し$S_+(f)$, $S_-(f)$は次のように定義される。標準型(7-1)

であらわされる折り目 $\mathscr{S}$ に対して，(7-1) 式における指数 λ は座標のとり方によって $n-p+1-\lambda$ にもなりうるが，$n-p+1$ が偶数の時 $(-1)^\lambda$ は座標によらずに定まる。これを $\mathscr{S}$ の sign とよぶ。そのとき $S_+(f)=\{$sign $+$ の折り目$\}$ $S_-(f)$ $=\{$sign が $-$ の折り目$\}$ とおく。

証明の前に次の注意をしておく。

注意 「特異点として折り目しかもたない」という条件はかなり強い条件である。例えば §4 の定理4.2 によると，「M^n，N^2 を向きづけ可能な多様体としたとき，$\chi(M)$ が奇数ならば M から N への写像は必ず折り目以外の特異点を持つ」ことになる。従って先づ「どのような多様体の組 M，N に対して折り目しか特異点をもたない写像 $f: M \to N$ が存在するか？」が問題となる。この問題は Levine [ ]，Eliasberg [ ]，安藤 [ ] によりかなり良く考察されている。例えば次のような定理達がある。

定理 (Levine) M，N を共に向きづけ可能で $\dim N=2$ とする。もし $\chi(M)\equiv 0 \pmod 2$ ならば任意の写像 $M\to N$ は折り目しか特異点を持たぬ写像にホモトープである。

$\boxed{\text{定理}}$ (Eliasberg) a) M^n を stably parallelizable, $n=\text{even}$ $q=\text{odd}$, とするとき $M^n \to \mathbb{R}^q$ への写像で折り目しか特異点をもたないものが存在する。

b) $n \geq p$ とするとき, 任意の写像 $S^n \to S^p$ は折り目しか特異点をもたぬ写像にホモトープである。

8. 前節の定理の証明の概略.

多様体 M, N とその間の写像 $g: M \to N$ に対して

$$\Sigma_i(M,N) = \{ j^1h(x) \in J^1(M,N) \mid \operatorname{rank} dh_x = i \}$$

$$S_i(g) = \{ x \in M \mid \operatorname{rank} dg_x = i \}$$

$$S(g) = \{ g \text{ の特異点} \}$$ とおく。

今 $f: M^n \to \mathbb{R}^p$, $n \geq p$, を特異点として折り目しか持たない写像とする。折り目しか持たないことから次の事がわかる。

(8-1) $S(f)$ は $p-1$ 次元の多様体である。

(8-2) 制限写像 $f: S(f) \to \mathbb{R}^p$ は immersion である。

次に $L^k \subset \mathbb{R}^p$ を k 次元線型部分空間とし $\pi_L: \mathbb{R}^p \to L^k$ を orthogonal projection とする。次のことがわかる。

(8-3) $S(\pi_L \circ f) = S(\pi_L \circ (f|S(f))) = S_{k-1}(\pi_L \circ f)$
$= S_{k-1}(\pi_L \circ (f|S(f)))$.

(8-4) もし $j^1(\pi_L \circ (f|S(f))) : S(f) \to J^1(S(f), L^k)$ が $\Sigma_{k-1}(S(f), L^k)$ に横断的ならば $j^1(\pi_L \circ f) : M \to J^1(M, L^k)$ も $\Sigma_{k-1}(M, L^k)$ に横断的である。

(8-5) 或る L^k が存在して $j^1(\pi_L \circ (f|S(f)))$ は $\Sigma_{k-1}(S(f), L^k)$ に横断的に交わる。(実は L^k は このような L^k でいくらでも近似できる。)

(8-6) $k=1$ のとき (8-5) の条件をみたせば $\pi_L \circ f$, $\pi_L \circ (f|S(f))$ は共に Morse の関数となる。

(8-7) $k=1$ で $n-p+1=$ 偶数 のとき

(イ) $q \in S_+(f)$ で $\pi_L \circ f$ の critical point ならば,
$\mathrm{Index}\,(\pi_L \circ f, q) \equiv \mathrm{Index}\,(\pi_L \circ (f|S(f)), q) \mod 2$

(ロ) $q \in S_-(f)$ で $\pi_L \circ f$ の critical point ならば,
$\mathrm{Index}\,(\pi_L \circ f, q) \equiv 1 + \mathrm{Index}\,(\pi_L \circ (f|S(f)), q) \mod 2$.

$\boxed{\text{定理の (a) と (c)}}$ は Morse の定理と (8-6), (8-7) をくみあわせるとでてくる。

$\boxed{\text{定理の (b) の証明}}$ (8-5) よりある L^k が存在して $\pi_L \circ (f|S(f)) : S(f) \to \mathbb{R}^k$ 及び $\pi_L \circ f : M \to \mathbb{R}^k$ は §4 の定理 4.3 の条

件をみたす。定理4.3 と (8−3) より,

$$W_{p-k}(S(f)) = [S(\pi_L \circ (f|S(f)))]^* \in H^{p-k}(S(f) : Z_2)$$

$$W_{n-k+1}(M) = [S(\pi_L \circ f)]^* \in H^{n-k+1}(M : Z_2)$$

$$S(\pi_L \circ f) = S(\pi_L \circ (f|S(f))]$$

今 $W_{p-k}(S(f))=0$ とする。これは cycle $S(\pi_L \circ (f|S(f)))$ $= S(\pi_L \circ f)$ が $S(f)$ の cycle として 0 にホモローグ,故に,$S(f) \subset M$ なので,それは M の cycle としても 0 にホモローグ 故に $[S(\pi_L \circ f)] = 0$ in $H_*(M;Z_2)$. 故にその Poincare 双対類 $W_{n-k+1}(M) = [S(\pi_L \circ f)]^* \in H^{n-k+1}(M:Z_2)$ も 0 となる。対偶をとれば,$W_{n-k+1}(M) \neq 0 \Longrightarrow W_{p-k}(S(f)) \neq 0$.

定理証明了

注意 §7 の我々の定理の逆を Eliasberg [ ] が考察している。すなわち「V^{p-1} を M^n の submanifold とする。そのとき,V^{p-1} がどのような条件をみたせば $S(f) = V$ となる 折り目だけの写像 $f : M \to N$ が存在するか?」ということを考察している。(a) と (c) に似た Euler の標数に関する条件を与えているが(ある場合に),ここでは詳しくは述べられない。

注意 §7 の我々の定理は,最初の動機の局所的研究には,

まだ直接答えてくれない。この種の定理が $f: M^n \to S^p$ 又は $f: M^n \to \mathbb{R}P^p$ に対して成立ってくれると，一般次元の有限確定特異点に対しても，或る種の Euler-Poincaré 型の定理が言えるのだが……。

注意　最後の定理の証明において「下の次元の $\mathbb{R}^k$ に射影する」というアイディアが重要なポイントであるが，実はこれは私のオリジナルなアイディアではない。すでに10年程前，神谷久夫氏（信州大・理）が「平面写像 $f: M^n \to \mathbb{R}^2$ に対する Morse の定理」という講演でこのアイディア（この場合は $\mathbb{R}^1$ に射影する。）を使っている。この仕事は残念ながら出版されていない。2年程前，他の必要性から，10年前の氏の講演を思い出し，この定理の詳細が知りたくなり，手紙（[K]）で教えていただいた。§6 の問題を考える必要が起きた時，氏の手紙を思い出し，特異点を折り目に限ぎると，一般次元でも氏の方法が使えることを思いついたものである。

謝辞　Thom の多項式及び Eliašberg の仕事に関して山口大学の安藤良文さんに大変親切に教えていただきました。氏の御教示がなければ，この論文はこのような形にまとまらなかったであろう。この紙面を借りて感謝致します。

文　献

Y. Ando: Elimination of certain Thom-Boardman singularities of order 2. J. Math Soc. Japan. 34 (1982), 241-268.
Forthcomming paper on mappings without cusps.

Ja.M. Eliasberg : Surgery of singularities of smooth mappings, Math. USSR Izvestija 6 (1972), 1302-1326.

Fukuda ,T. : Local topological properties of diff. maps, I. Inventiones Math. 65 (1981) 227-250. ---- II to appear.

A.Haefliger- A.Kosinski: Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables, Séminaire H. Cartan, E.N.S. 1956-1957, exposé8.

H. Kamiya: Lecture at the symposium org. by M.Adachi, (1973? or 74?
Letter to Fukuda, (1981)

H.I. Levine:Elimination of cusps, Topology, 3 (1965), 263-296.

A. du Plessis: on the genericity of topologically finite-determined map-germs, Topology, 21 (1982), 131-156.

F. Ronga: Le calcul des classes aux singularités de Boardman d'ordre deux, Comment. Math. Helv., 47 (1972), 15-35.
Le calcul de la classe de cohomologie entière duale à $\overline{\Sigma}^k$, Liverpool Singularities, Springer Lecture notes on Math. 192 (1971), 313-315.

R. Thom: Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier, 6 (1955-56), 43-87.
Local topological properties of differentiable mappings, Colloq. on differential analysis, Oxford Univ. Press 1964.