数理解析研究所講究録
第493巻 1983年 101-133

Topological Determinacy of Smooth Map-Germs

京大 理　石川 剛郎 (Goo Ishikawa)

有限位相確定写像芽 (topologically finitely determined map-germs) は，微分可能写像の特異点論において興味深い対象である．それらは十二分な genericity を持っていることがわかっている [30, 34, 7]．また，それらは，(少なくともトポロジカルには)，整った構造を備えていることもわかっている [10, 11, 12, 14]．しかし，それらを特徴付けることは，通常の determinacy や，また他のいろいろな同値関係に関する determinacy における場合のようにはスンナリと事が運ばない，ということもわかっている (cf. [35])．したがって

"有限位相確定写像芽を特徴付けること"

が，興味ある問題となる．本稿は，この問題を扱っている．

主な結果は，有限位相確定性の十分条件を与える定理１，並びに，必要条件を与える定理２である．特にこれらの結果から，値域の次元が小さい場合に，有限位相確定性の必要十分条件を得る（定理３）．

§0 Introduction

$\mathcal{E}(n,p)$ で，smooth ($=C^\infty$) map-germs : $\mathbb{R}^n,0 \to \mathbb{R}^p,0$ の全体を表わす．$\mathcal{E}_n$ を smooth function-germs : $\mathbb{R}^n,0 \to \mathbb{R}$ のなす $\mathbb{R}$-algebra とし，$m_n = \mathcal{E}(n,1)$ をその極大 ideal とする．このとき，

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(n,p) & \xrightarrow{\pi^k} & \mathcal{E}(n,p)/m_n^k\mathcal{E}(n,p) \doteqdot J^k(n,p) & \cong & \mathbb{R}^{p\cdot\left(\binom{n+k}{k}-1\right)} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\ f & \longmapsto & & & \left(\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(0)\right)_{1\leq|\alpha|\leq k} \end{array}$$

とおく．さらに，$\pi^{kk'} : J^k(n,p) \to J^{k'}(n,p)$ $(k \geq k')$ を自然な射影とし，それに関する射影極限 $J^\infty(n,p) \doteqdot \varprojlim_k J^k(n,p)$ について，しぜんな写像

$$\begin{array}{ccc} \pi^\infty : \mathcal{E}(n,p) & \longrightarrow & J^\infty(n,p) \cong \mathbb{R}[[x_1,\cdots,x_n]]\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^p \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ f & \longmapsto & \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(0)\,x^\alpha \end{array}$$

を考える．そして，$\pi^k(f) = j^kf(0)$ $(f \in \mathcal{E}(n,p),\ k=1,2,\cdots,\infty)$ と書く．写像の確定性は，f の構造とその jet $j^kf(0)$ との関係を問う：

smooth map-germ $f \in \mathcal{E}(n,p)$ について，

<u>定義1.</u> (1) f が <u>topologically r-determined</u> ($r=1,2,\cdots,\infty$) とは，$j^r f'(0) = j^r f(0)$ なる任意の map-germ $f' \in \mathcal{E}(n,p)$ が f と位相的左右同値，すなわち，homeomorphism-germs $h : \mathbb{R}^n, 0 \circlearrowleft$, $k : \mathbb{R}^p, 0 \circlearrowleft$ が存在して，

$$f' \circ h = k \circ f$$

なるときにいう．

(2) f が <u>topologically finitely determined</u> とは，或る有限の r について，topologically r-determined のとき，

(3) f が <u>topologically infinitely determined</u> とは，topologically ∞-determined のときにいう．

<u>Note 1.</u> 上の概念と関連して，smoothly finitely determined，smoothly infinitely determined 等の大切な性質がある．与えられた smooth map-germ $\in \mathcal{E}(n,p)$ がこれらの性質を持つかどうかを判定することは a priori には困難な問題だが，写像の特異点論（の局所理論）の発展に伴い，多くの解決を見ている．

一般に $\mathcal{G} \subset \mathrm{Diff}^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0,0)) = \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0,0) \circlearrowleft$ C^k-diffeomorphisms$\}$ subgroup ($k=0,1,2,\cdots,\infty$) に対して，$f, f' \in \mathcal{E}(n,p)$ が <u>C^k-$\mathcal{G}$ 同値</u> とは，$H \in \mathcal{G}$ が存

在して，

$$H(\mathrm{graph}\, f') = \mathrm{graph}\, f$$

のときに云い，$f' \underset{C^k\text{-}\mathcal{G}}{\sim} f$ と書く．

$f \in \mathcal{E}(n,p)$ について，先と同様に，

(4) f : <u>C^k-r-determined relatively to $\mathcal{G}$</u>

$\overset{\text{dfn.}}{\Longleftrightarrow}$ 任意 $f' \in \mathcal{E}(n,p)$ with $j^r f'(0) = j^r f(0)$ について，

$$f' \underset{C^k\text{-}\mathcal{G}}{\sim} f.$$

(5) f : <u>C^k-finitely determined relatively to $\mathcal{G}$</u>

$\overset{\text{dfn.}}{\Longleftrightarrow}$ C^k-r-determined relatively to $\mathcal{G}$ for some $r < \infty$

(6) f : <u>C^k-infinitely determined relatively to $\mathcal{G}$</u>

$\overset{\text{dfn.}}{\Longleftrightarrow}$ C^k-∞-determined relatively to $\mathcal{G}$

と定義する．

特に，$\mathcal{G} = \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{R}, \mathcal{L}$, 及び $\mathcal{A}$ (cf. [25]) の場合が重要である．ここで，$\mathrm{Diff}^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0,0)) \supset \mathcal{C} = \{H \mid H(x,y) = (x, h(x,y)), h(x,0) \equiv 0\}$, $\mathcal{R} = \mathrm{Diff}^k(\mathbb{R}^n, 0)$, $\mathcal{L} = \mathrm{Diff}^k(\mathbb{R}^p, 0)$, $\mathcal{K} = \mathcal{R} \cdot \mathcal{C}$ (semi direct product), $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ (direct product) と定義する．たとえば，$\mathcal{G} = \mathcal{A}$, $k = 0$ の場合，(4),(5),(6) がそれぞれ定義1 の (1),(2),(3) に対応する．

(なお，本稿では扱わないが，determinacy に関する話は他にもいろいろある．同値関係にしても，上の5つ以外

の$\mathcal{G}$に対しても興味がある(e.g. G-determinacy, equivariant-determinacy). また，まったく別種の同値関係に関して調べることも有意義であろう.(ちなみに，筆者は，$\mathcal{A}$同値と$\mathcal{K}$同値，または$\mathcal{L}$同値と$\mathcal{C}$同値との関連を調べている過程で，ある種の新しい概念"sub C^∞ ring sheaf"を得，それの構造を調べた[16]，(なお，[16]の内容の一部はpublishされる予定[17]))

一方，parametrized germs や composed map-germs の determinacy を考えることは，とても興味深い問題であろう(cf. [19], [29]). さらには，本講究にあるように，vector field-germs や，diffeomorphism-germs あるいは，differential form-germs，tensor field-germs に対しその determinacy を考察することは重要なことである.)

本題に戻ろう.

さて，(5), (6)の性質について，その特徴づけに関し，知られているのは次のケースである(cf. C.T.C. Wall [35]).

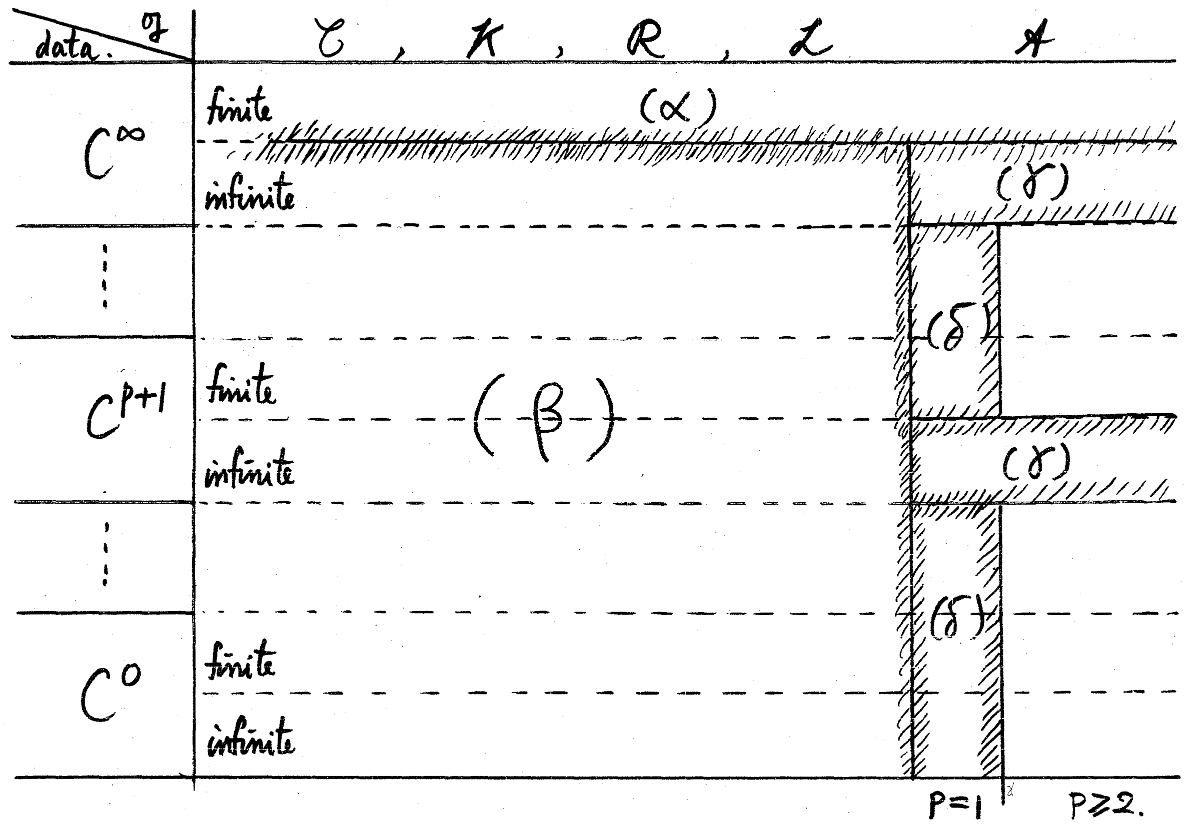
(α): (5), $\mathcal{G}=\mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}$, $k=\infty$.

(β): (5) and (6), $\mathcal{G}=\mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{R}, \mathcal{L}$, $k<\infty$.

(γ): (6), $\mathcal{G}=\mathcal{A}$, $k\geqq p+1$.

(δ): (5) and (6), $\mathcal{G}=\mathcal{A}$, $p=1$.

(cf. Table 1)



(Table. 1)

たとえば，$\mathcal{G}=\mathcal{A}$ のとき，次のような結果がある．

定理（Mather, Gaffney） $f\in\mathcal{E}(n,p)$ について次は同値：

(i) f ; C^∞-finitely determined ,

(ii) $m_n^k\,\theta(f)\subseteq tf(\theta_n)+wf(\theta_p)$,

（ここで，$\theta(f)$ は f の C^∞変分全体のなす $\mathcal{E}_n$加群，右辺は，$\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}^n,0)\times\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}^p,0)$ からくる変分全体．）

さらに，f が analytic のときは，次も同値：

(iii) f の複素化 $f_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^p, 0$ が multi-stable off 0.

定理 (L.C. Wilson [37]) f が analytic かつ $\mathcal{K}$-finite ($= C^\infty$-finitely determined relatively to $\mathcal{K}$) のとき次は同値:

(i) f: C^∞-infinitely determined.

(ii) $m_n^\infty \theta(f) \subseteq tf(\theta_n) + wf(\theta_p)$.

ここで, $m_n^\infty = \bigcap_{\ell} m_n^{\ell+1}$ は $\mathcal{E}_n$ の ∞-flat elements 全体.

(iii) f: 条件 (e) をみたす (cf. p.13.).

(iv) f: 条件 (g) をみたす, すなわち, f は multi-stable off 0 (cf. p.13.).

定理 (Kuiper - Kuo - Bochnak - Łojasiewicz - Wilson)
f が analytic, $p=1$ のとき, 次は同値:

(i) f: C^k infinitely determined. ($0 \leqq k \leqq \infty$)

(ii) f の set-germ of critical points $C(f) \subseteq \{0\}$.

(iii) f: C^k finitely determined ($0 \leqq k < \infty$)

(Note 1 おわり)

さて, 理想としては, smooth map-germ $f \in \mathcal{E}(n,p)$ が与えられたとき, それが topologically r-determined かどうか 簡単に判定できる そういう判定法を見出だすのが も

ちろん一番よいのだが，それは現在のところ（$p=1$ の場合をのぞいて）あくまで理想である．

Note. 2　他の determinacy についても，exact な determinacy の order

$$\text{det.ord.}_{k,\mathcal{G}} f = \inf\{ r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid f : C^k\text{-}r\text{-det. rel. } \mathcal{G} \}$$

を求めることには非常な困難が伴う．それは，いわゆる jet の sufficiency という大きな問題とかかわってくるわけだが，$k=\infty$，$\mathcal{G}=\mathcal{A}$（cf. [du Plessis][13]），$k=\infty$，$\mathcal{G}=\mathcal{R}$，$p=1$ 及び $k<\infty$，$\mathcal{G}=\mathcal{R}$ の場合が主に扱われている．

われわれは，ここでは，(2) 及び (3) の性質に注目し，それに対する，できるだけ良い十分条件とできるだけ良い必要条件を見出だすこと，を試みる．

(2) の性質，すなわち topological finite determinacy は，いわゆる jet の topological sufficiency に関する Thom-Varčenko type theorem と密接に関係している．

du Plessis [7] は次の定理を示している．

定理（du Plessis）　各自然数 r に対して $L^r(n)\times L^r(p)$-invariant semi-algebraic subset $\Sigma^r\subset J^r(n,p)$ が存在して，

(1)　$\operatorname{codim}\Sigma^r\to\infty$　as　$r\to\infty$

(2)　$f\in\mathcal{E}(n,p)$，$j^rf(0)\in J^r(n,p)\setminus\Sigma^r\Rightarrow$

(a)　f は topologically r-determined

(b)　$\bar{f}:U\to V$，representative of f が存在して，$j^r\bar{f}:U\to J^r(U,V)$ を考えるとき，$j^r\bar{f}|U\setminus\{0\}$ は，canonical stratification $\mathcal{S}^{(k)}$ of $J^r(U,V)\setminus\Sigma^r(U,V)$ に multi-transverse であり，$\mathcal{S}_1=\bar{f}^*\bar{f}_*[(j^r\bar{f}|U\setminus\{0\})^*\mathcal{S}^{(k)}(U,V)\cup\{0\}]$，$\mathcal{S}_2=\bar{f}_*\mathcal{S}_1$ とおくとき，$(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)$ は $\bar{f}$ の Thom stratification となる．——

（ここで，用語は du Plessis のものと若干異なる．また後の説明を参照のこと．）

さて，この定理を鑑賞しよう．まず，当然のことながら $(\pi^{s,r})^{-1}(\Sigma^r)\supset\Sigma^s$　$(s\geqq r)$ が成り立つことがその構成からわかる．さらに

$$\Sigma^\infty=\bigcap_r(\pi^r)^{-1}(\Sigma^r)\subset\mathcal{E}(n,p)$$

とおくと，これは infinite codimension を持ち，$\mathcal{E}(n,p)\setminus\Sigma^\infty$ の元は良い性質をもつ，特に topologically finitely determined であるということが定理から従う．しかし $\Sigma^\infty\supset\Sigma_\infty=\{$non $\mathcal{K}$-finite$\}$（$\mathcal{K}$-finite $=C^\infty$ finitely det. rel. $\mathcal{K}$）であり，Σ^∞ は或る意味で infinite dimension を持ち，その中には良い

性質をもつ map-germ がごろごろしている．というわけで，topological finite determinacy の十分条件を得ようという場合には（とりわけ必要十分条件を得る目的においては）Σ^∞ あるいは Σ_∞ の元も扱うことを心がけたい．

さて，そこで次の条件を考えよう．

<u>定義2.</u> $f \in \mathcal{E}(n,p)$ が，<u>excellent off 0</u> とは，$0 \in \mathbb{R}^n$ 以外で，その representative が Mather の canonical stratification ([27],[28],[15]) に multi-transverse であり，さらに，次の Łojasiewicz 型不等式を満たすときにいう．

(E) $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists a, \alpha > 0$

$$\mathrm{dist}\left((j^{k+1}f)^{p+1}(x), NT^{(k,p+1)}\right) \geqq a \cdot \mathrm{dist}(x, \mathbb{D}_f^{(p+1)})^\alpha$$

for all x in a neighborhood of 0 in $(\mathbb{R}^n)^{p+1}$.

ここで，$(j^{k+1}f)^{p+1} : (\mathbb{R}^n)^{p+1}, 0 \to [J^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)]^{p+1}$ は f の $p+1$-jet extension の $p+1$-tuple，dist は $[J^{k+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)]^{p+1}$ 及び $(\mathbb{R}^n)^{p+1}$ を標準的に Euclidean space と思ったときの距離であって，

$$NT^{(k,\ell)} = \{ z \in [J^{k+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)]^\ell \mid z = (j^{k+1}g)^\ell(x),$$

$x \in (\mathbb{R}^n)^\ell$ としたとき，$\exists i$, $j^k g(x_i) \in \Sigma_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ or $\forall i$, $j^k g(x_i) \notin \Sigma_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ であり $j^k g$ は not multi-transverse to the canonical stratification $\mathcal{S}^{(k)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ of $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)\setminus\Sigma_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ at $(x_1, x_2, \cdots, x_\ell)\}$ すなわち，避けるべき multi-jets 全体，さらに

$$D_f^{(\ell)} = \{ x\in(\mathbb{R}^n)^\ell \mid \exists x_i=0 \text{ or } \exists i\neq j,\ x_i=x_j,\ C(f)\ni x_i \}$$

とおいた．(cf. [37]) なお，

$$\Sigma_k = \{ z\in J^k(n,p) \mid z = j^k g(0),$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \theta(g)_0/[tg(\theta_n)+(g^*m_p+m_n^k)\theta(g)_0] \geq k \}$$

である．([28], [15] を参照のこと)

Remark 1. Σ_k は algebraic subset, $D_f^{(\ell)}$ は closed, $NT^{(k,\ell)}$ は closed semi-algebraic であり，f が analytic なら，$D_f^{(\ell)}$ は analytic subset となる．また，k-jet section の或る点における tangent map は，その点における $k+1$-jet で決まるから $NT^{(k,\ell)}$ は well-defined である．$NT^{(k,\ell)}$ の定義から明らかなように，f が条件(E) をみたすならば，$0\in\mathbb{R}^n$ 以外で canonical stratification に multi-transverse になる．

Note 3. "excellent" という言葉は，もともと H. Whitney や R. Thom により別の意味で使われている([43], [42])．そ

れと，もちろん無関係ではないが，ここでは，誤解は生じないと思うし，他に適当な言葉使いが見当らなかったので，あえて <u>excellent off 0</u> という名前をつけた．余談になるが，Mather の nice range について，Mather [27] は "……we call (for lack of a better name) the "nice range of dimensions"" と書いている．また Fukuda [13] には，結構次元と訳されている．用語の問題も結構むずかしい…．

さて，われわれの十分条件は次のものである：

<u>定理1.</u> $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ を C^∞ map-germ とする．f が excellent off 0 ならば，f は topologically finitely determined である．

<u>例1.</u> $f \in \mathcal{E}(2,2)$, $f(x,y) = (x^2+y^2, (x^2+y^2)y)$ とする．f は excellent off 0．したがって，topologically finitely determined となる．f は non K-finite であることに注目したい．

<u>Remark. 2.</u> $f \in \mathcal{E}(n,p)$ について定義2と密接に関連する概念がある．

f : <u>MT-stable off 0</u> $\overset{\text{dfn}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \in \mathbb{R}^n$ 以外で canonical stratification に multi-transverse. $\overset{\text{i.e.}}{\Longleftrightarrow}$ 次の条件(G)をみたす.

(G) $[(j^{k+1}f)^{p+1}]^{-1}(NT^{(k,p+1)}) \subseteq \mathbb{D}_f^{(p+1)}$ for some k.

f : <u>Wilsonian germ</u> $\overset{\text{dfn}}{\Longleftrightarrow}$ 次の条件(e)をみたす([37])

$\exists\, a, \alpha > 0$

(e) $dist((j^{p+1}f)^{p+1}(x), Uns) \geqq a \cdot dist(x, \mathbb{D}_f^{(p+1)})^{\alpha}$ for all x in a neighborhood of 0 in $(\mathbb{R}^n)^{p+1}$.

f : <u>multi-stable off 0</u> $\overset{\text{dfn}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \in \mathbb{R}^n$ 以外で multi-stable $\overset{\text{i.e.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ repre. of f, $\bar{f} : U \to V$, $V \ni \forall y$, $\bar{f}^{-1}(y) \cap C(\bar{f}) \setminus 0 \supseteq \forall S$ finite に対し, $\bar{f}_S : U, S \to V, y$ が infinitesimally stable. $\overset{\text{i.e.}}{\Longleftrightarrow}$ 次の条件(g)をみたす.

(g) $[(j^{p+1}f)^{p+1}]^{-1}(Uns) \subseteq D_f^{(p+1)}$

(ここで, Uns は, unstable $p+1$-multi $p+1$-jets 全体.)

このとき,

$$\begin{array}{ccc} (e) & \Longrightarrow & (E) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (g) & \Longrightarrow & (G) \end{array}$$

が成り立つ.

f が analytic のとき, Remark 1. と Łojasiewicz不等式より,

$$(e) \Longleftrightarrow (E), \qquad (g) \Longleftrightarrow (G).$$

(n, p) が Mather の nice range に属するとき,

$$(e) \Longleftrightarrow (g), \qquad (E) \Longleftrightarrow (G),$$

が成り立つ．(cf. [40])．

<u>系1.</u> $f: \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ analytic に対して，
f: MT-stable off $0 \Longrightarrow f$: topologically finitely determined．

<u>Remark. 3</u> 定理1，及び系1の逆は成立しない．([24],[5])
<u>Remark. 4</u> 系1で，analytic という仮定は必要である．実際，∞-flat（したがって top. infinitely det. でない）smooth map-germ で MT stable off 0 なものが存在する．

さて，次にわれわれの必要条件を述べよう．そのために，次の概念を導入する必要がある．

<u>定義3.</u> S を $\mathbb{R}^n$ の有限集合とし，$f: \mathbb{R}^n, S \to \mathbb{R}^p, y$ $f(S) = y$ を smooth map-germ とする．

f が <u>topologically weakly stable</u> とは，f の或る representative $F: U \to V$ があって，かってな S の開近傍 W_1，W_2，$U \supset W_1 \supset W_2$，$W_1 \supset \overline{W_2}$，および任意 $\varepsilon > 0$ に対して，$C^\infty(U, V)$ における F の近傍 N が存在して，どんな $f' \in N$ と有限集合 $T' \subset W_2$ に対しても，W_1 の或る有限集合 T で，

$d(T,T')(=\sup_{x\in T} d(x,T')+\sup_{x'\in T'} d(T,x'))<\varepsilon$ かつ

$$f'_{T'} \underset{C^0\text{-}\mathcal{A}}{\sim} f_T$$

なるものが取れるときにいう，すなわち，fのわずかな摂動によっては，周辺の topological types が増加しない，ときいう．

定義4．$f\in\mathcal{E}(n,p)$ が topologically weakly stable off 0 とは，その或る representative $F:U\to V$ があって，$V\ni{}^\forall y$，$F^{-1}(y)\setminus 0\supseteq{}^\forall S$ finite に対して，$F_S:U,S\to V,y$ が 定義3の意味で topologically weakly stable のときにいう．

Remark 5．f: topologically stable off 0 $\Rightarrow$ topologically weakly stable off 0．が成り立つ．

定義5．$f\in\mathcal{E}(n,p)$ の topological regular stratification $(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)\overset{dfn}{\Longleftrightarrow}$ f の或る representative $F:U\to V$ について $\mathcal{S}_1$ は U の (locally flat) topological submanifolds からなる (locally finite) locally topologically trivial stratification，$\mathcal{S}_2$ も V に対して同様のものであって，F は $(\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2)$ に関して topological stratified map (i.e. $\mathcal{S}_1\ni{}^\forall X$，${}^\exists Y\in\mathcal{S}_2$，$F(X)\subseteq Y$，$F|X:X\to Y$ は topological submersion) となり，さらに次の意味の topological triviality を有す：$\mathcal{S}_2\ni{}^\forall Y\ni{}^\forall y$，$F^{-1}(y)\supset{}^\forall S$ finite，${}^\exists W$:

y の近傍, $f^{-1}(Y\cap W) \supset {}^{\exists}\bar{S}$, $\bar{S}\cap f^{-1}(y) = S$, $f_{\bar{S}} : U, \bar{S} \to V, Y\cap W$ は topologically trivial along $Y\cap W$.

さて，われわれの必要条件は次のものである.

<u>定理2.</u> $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ を C^∞ map-germ とする. f が topologically infinitely determined ならば,

(i) f は MT-stable off 0 な germ と位相同値.

(ii) $f^{-1}(0)\cap C_{top}(f) \subseteq \{0\}$, $f|C_{top}(f)$ は uniformly finite to one.

(iii) f は topological regular stratification $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ で, 次をみたすものを持つ:

(a) $\mathcal{S}_1 \ni \{0\}$, $\mathcal{S}_2 \ni \{0\}$.

(b) $\mathcal{S}_2 \setminus \{0\}$ の各 stratum の各 connected component は 0 を closure に含む.

(iv) f は topologically weakly stable off 0.

とくに, $C_{top}(f)\setminus 0 = C(f)\setminus 0$

ここで,

$C(f) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid f_x$ は submersion と C^∞-$\mathcal{A}$ 同値でない$\}$

$C_{top}(f) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid f_x$ は submersion と C^0-$\mathcal{A}$ 同値でない$\}$.

とおいている.

定理1と定理2から，いろいろな結果が従う．たとえば，

定理3. $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ C^∞ map-germ $(p \leq 3)$ について，次は互いに同値となる．

(i) f は topologically finitely determined.

(ii) f は topologically infinitely determined.

(iii) f は条件(e)をみたす(Wilsonian).

(iv) f は excellent off 0.

また，f が analytic のときは，さらに次も同値：

(v) f は multi-stable off 0.

が示される．定理3の結果の一部は，[18]及び本講演でのべた．この結果から，定理1の十分条件が，かなり良いものである，と結論付けることも，あるいは可能であるかもしれない．ともかく，P が十分小の場合は，excellent off 0 という条件は位相的有限確定性の完全な特徴付けを与えている．

Remark 6. f が analytic のとき定理3の条件(v)は，$P \leq 3$ の場合，具体

的に次のことと同値になる：$p=1,2,3$ に従って，それぞれ，

(*)：　$C(f) \subseteq \{0\}$.

(**)：　f の representative $\bar{f}: U \to V$ があって，$C(\bar{f}) \setminus \{0\} \ni \forall x$，$\bar{f}_x$ は fold type，i.e.

$$\bar{f}_x \underset{C^\infty\text{-}\mathcal{A}}{\sim} (x_1, \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2).$$

さらに，$\bar{f}|C(\bar{f})$ が injective.

(***)：　f の representative $\bar{f}: U \to V$ があって，$C(\bar{f}) \setminus \{0\} \ni \forall x$，$\bar{f}_x$ は fold type　i.e.

$$\bar{f}_x \underset{C^\infty\text{-}\mathcal{A}}{\sim} (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$$

または cusp type, i.e.

$$\bar{f}_x \underset{C^\infty\text{-}\mathcal{A}}{\sim} (x_1, x_2, x_3^3 + x_1 x_3 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$$

（ただし，$n<3$ のときは，$\bar{f}_x$ は immersion に限る．これを fold type と見做す.）である，すなわち，

$$C(\bar{f}) \setminus \{0\} \subseteq Fold(\bar{f}) \cup Cusp(\bar{f})$$

であり，$\bar{f}|Cusp(\bar{f})$ は injective，$Fold(\bar{f}) \cap \bar{f}^{-1}(\bar{f}(Cusp(\bar{f}))) \subseteq \{0\}$，$\bar{f}|Fold(\bar{f})$ は 0 以外で transverse な self-intersection をもつ．———

定理3の応用は多いように思われる．ここでは，ちょっと毛色の違ったものを挙げよう．

系2. $f, g : \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, 0$ を analytic map-germs とする. 合成 $g \circ f : \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, 0$ が topologically finitely determined であるための必要十分条件は, f と g が topologically finitely determined, $C(g) \cap \overline{\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \# f^{-1}(y) \geqq 2\}} \subseteq \{0\}$, かつ $g|C(f(C))$ が injective なことである.

なお, du Plessis - Brodersen は本稿の内容と密接に関連する結果を得ていると聞く([35], [8]).

謝辞 常にあたたかい励しと, 貴重な助言をくださった諸先生, 諸先輩に感謝します. 特に, 中居功氏と福田拓生先生には, 多くのアイディアを示唆していただきました. また,本稿は, 小池敏司氏に, jet の sufficiency に関することをいろいろ教えていただいた賜だと思っています. そして —— —— 私のどう見ても稚拙な数学のやり方を辛抱強く見守ってくださる, 足立正久先生, 戸田宏先生に深く感謝する次第です.

以下, §1, §2, §3 で, 定理1, 定理2, 定理3 の証明の概略を述べる. 詳しくは, [38] に書く予定である.

§1. 定理1の証明

$f \in \mathcal{E}(n,p)$, Jを base point $*$ を持った C^∞ manifold としたとき, $F : \mathbb{R}^n \times J, 0\times J \to \mathbb{R}^p \times J, 0 \times J$ が f の <u>r-flat unfolding</u> とは, Fが C^∞ な f の unfolding ; $F(x,t) = (f_t(x), t)$ $(x \in \mathbb{R}^n, t \in J)$, $f_* = f$, であり, $f_t - f$ が各tについて, r-flat at $0 \in \mathbb{R}^n$ のときにいう. またFが <u>locally C^0-trivial preserving 0</u> とは, 任意$t_0 \in J$に対してそのJにおける近傍Wと, homeomorphism-germs $H : \mathbb{R}^n \times W, 0\times W \circlearrowleft$, $K : \mathbb{R}^p \times W, 0 \times W \circlearrowleft$ が存在して, 図式

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^n \times W, 0\times W \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, "\pi_W"] & & \mathbb{R}^p \times W, 0 \times W \arrow[d, "K"] \arrow[dl, "\pi_W"'] & \\
0\times W \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & \mathbb{R}^n \times W, 0\times W \arrow[r, "\pi_W"] \arrow[rr, "f_{t_0}\times 1_W"'] & W & \mathbb{R}^p \times W, 0\times W \arrow[l, "\pi_W"'] & 0\times W \arrow[ul, "i"'] \arrow[dl, "i"]
\end{tikzcd}$$

が可換になるときをいう.

定理1は, 次のより強い形で証明される:

<u>命題1.</u> $f \in \mathcal{E}(n,p)$ が excellent off 0 ならば, 或る自然数rが存在して, fの任意の r-flat unfolding は locally C^0-trivial preserving 0 である.

<u>定理1の証明:</u> $f \in \mathcal{E}(n,p)$ を excellent off 0 とし，命題1に保証された $r \in \mathbb{N}$ をとる．いま任意 $f' \in \mathcal{E}(n,p)$, $j^r f'(0) = j^r f(0)$ について，f の r-flat unfolding $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R}$ を，$F(x,t) = ((1-t)f(x) + tf'(x), t)$ で定義する．F は locally C^0 trivial preserving 0 だから，$f_t = (1-t)f + tf'$ の C^0-$\mathcal{A}$ type は $\mathbb{R}$ の open subsets よりなる分割を与える．$\mathbb{R}$ は連結ゆえ，f_t たちはすべて C^0-$\mathcal{A}$ 同値．とくに，$f = f_0 \underset{C^0\text{-}\mathcal{A}}{\sim} f_1 = f'$.

<u>命題1の証明の概略:</u> <u>Step. 1.</u> $J^k(n,p) \setminus \Sigma_k$ の canonical stratification を $\mathcal{S}^{(k)}$ と書く．これより，$J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \setminus \Sigma_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ の stratification $\mathcal{S}^{(k)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ が induce される．いま，f が excellent off 0 であるから，或る k に対し，$j^k f|\mathbb{R}^n \setminus 0$ は $\mathcal{S}^{(k)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ に transverse であり，$\mathcal{S}_1 = f^* f_* [(j^k f|\mathbb{R}^n \setminus 0)^* \mathcal{S}^{(k)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \cup \{0\}]$, $\mathcal{S}_2 = f_* \mathcal{S}_1$ は well-defined で，$(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ は，f の stratification を与える．$\mathcal{S}_1 \ni f^{-1}(0) \setminus 0, \{0\}$, $\mathcal{S}_2 \ni \{0\}$ に注意する．このとき，①:$(\mathcal{S}_1 \setminus \{f^{-1}(0) \setminus 0, \{0\}\}, \mathcal{S}_2 \setminus \{0\})$ は，$f|\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0) : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{R}^p \setminus 0$ の Thom stratification を与える．②: $\mathcal{S}_1|\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0) \ni {}^\forall X$ について，X は Whitney regular over $\{0\}$. ③ $\mathcal{S}_2 \ni {}^\forall Y$ について，Y は Whitney regular over $\{0\}$. ④ $\mathcal{S}_1|\mathbb{R}^n \setminus 0 \ni {}^\forall X$ について，X は Whitney regular over $f^{-1}(0) \setminus 0$.

⑤ $f^{-1}(0)\setminus\{0\}$ は Whitney regular over $\{0\}$. ⑥ $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ は, f の Thom stratification を与える. ことが証明できる. <u>Step. 2.</u> f が excellent off 0 のとき, $f_t - f$ が r-flat at 0 (r: 十分大) なる f_t に対して, f_t も excellent off 0 となる. <u>Step 3.</u> F を f の r-flat unfolding とする. $j_1^k F: \mathbb{R}^n \times J \to J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \times J$ を $j_1^k F(x,t) = (j^k f_t(x), t)$ で定義したとき, $\bar{\mathcal{S}}_1 = F^* F_* [(j_1^k F|_{\mathbb{R}^n \times J \setminus 0 \times J})^* \mathcal{S}^{(k)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \cup 0 \times J]$, $\bar{\mathcal{S}}_2 = F_* \bar{\mathcal{S}}_1$ とおけば $(\bar{\mathcal{S}}_1, \bar{\mathcal{S}}_2)$ は F の Thom stratification を与える. これは, $(\bar{\mathcal{S}}_1, \bar{\mathcal{S}}_2)$ と, $(\mathcal{S}_1 \times J, \mathcal{S}_2 \times J$ とを比較することにより得られる. <u>Step. 4</u> Thom's 2nd isotopy lemma (cf. [9], [15], [26]) と, $\bar{\mathcal{S}}_1 \ni 0 \times J$, $\bar{\mathcal{S}}_2 \ni 0 \times J$ より, F は locally C^0 trivial preserving 0 となる.

§2 定理2の証明

$f \in \mathcal{E}(n,p)$ を topologically infinitely determined とする. このとき, f は次の性質をもつ $f' \in \mathcal{E}(n,p)$ と位相同値: f' は MT-stable off 0, $f'^{-1}(0) \cap C(f') \subseteq \{0\}$, $f'|_{C(f')}$ uniformly finite to one, とくに, $C(f') \setminus 0 = C_{top}(f') \setminus 0$. さらに $\mathcal{S}$: $\mathbb{R}^n \setminus f'^{-1}(0)$ の Whitney stratification (0 での germ), $\mathcal{S}'$: $\mathbb{R}^p \setminus 0$ の Whitney stratification が存在して, $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ は $f'|_{\mathbb{R}^n \setminus f'^{-1}(0)}$: $\mathbb{R}^n \setminus f'^{-1}(0) \to \mathbb{R}^p \setminus 0$ の Thom stratification, $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ は finite strata をもち，$\bar{\mathcal{S}}'$ の各 stratum の各 connected component は 0 を closure に含む．

このことは，f が topologically finitely determined であれば，Fukuda's Transversality Theorem [11] から明らかである．一般に f が topologically infinitely determined のときは，Multijet Transversal Extension Theorem [36] を改良する必要がある．

さて，したがって f が，(i)(ii)及び(iii) を満たすことが従う．いま，f が topologically weakly stable off 0 でないと仮定する．すると，$\exists y_i \in \mathbb{R}^p$ 点列，$y_i \to 0$ (as $i \to \infty$)，y_i は $\mathcal{S}_2$ の1つの stratum に属し，$f^{-1}(y_i) \supset {}^{\exists}S_i$ finite，$f_{S_i} : \mathbb{R}^n, S_i \to \mathbb{R}^p, y_i$: not top. w. stable．いま f_{S_i} を，S_i を含む十分小さな support を持つ perturbation で新しい top. type $f''_{T_i''}$ をつくる．$T_i'' = \bigcup_j T_{ij}''$　$f''(T_{ij}'')$: 1-pt と disj. に分けると，$\exists j$，$T_{ij}'' \subset {}^{\exists}S_i''$ finite，$f''(S_i'')$: 1-pt，$f''_{S_i''}$ は，y_i の近くの y_i''，$S \subset f^{-1}(y_i'')$ について f_S と top. inequiv. このような perturbation は ∞-flat perturbation $f'' \in \mathcal{E}(n, p)$，$j^\infty f'' = j^\infty f$ で実現される．いま，top. types による $\mathbb{R}^p \setminus 0$ の分割を考えると，その分割成分のあるものは，0 を closure にもたない（それは y_i'' を含む十分小なる ball に含まれる）これは，$f'' \underset{C^0\text{-}\mathcal{A}}{\sim} f$ に反する．したがって，f は topologically weakly stable off 0 となる．さらに，

補題1. $f\in\mathcal{E}(n,p)$, topologically submersion, topologically weakly stable off 0 $\Rightarrow$ f: submersion.
より定理2の証明が完了する.

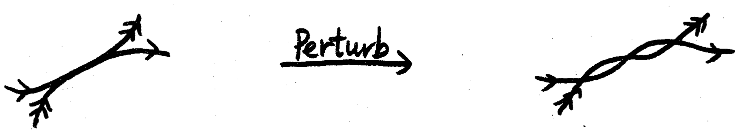
補題1の証明: fold をつくる.

§3 定理3の証明

(iii)$\Leftrightarrow$(iv) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (ii) が定理1等からわかる. そこで (ii) $\Rightarrow$ (iii) を示そう. $p=1$ のときはよく知られている. $p=2$ のとき, (iii) を否定すると, $j^\infty f'(0)=j^\infty f(0)$ なる f'で次の性質をもつものが存在する: $\mathbb{R}^2\ni{}^\exists y_i$ 点列, $f'^{-1}(y_i)\setminus 0\supset{}^\exists S_i$ finite, f'_{S_i}; not stable. まず補題1より $y_i\neq 0$ としてよい.

補題2. $g:\mathbb{R}^n, x\to\mathbb{R}^2, y$ が not submersion nor fold $\Rightarrow$ g は topologically isolated or not topologically weakly stable.

したがって, 定理2より, $C(f')\setminus 0\subset \mathrm{Fold}(f')$ としてよい. いま $\mathrm{Fold}(f')$ は 0 以外で non-transverse な self-intersection をもつわけであるが, これは, ∞-flat perturbation により, topologically isolated にできる. (Fig. 1)



(Fig. 1)

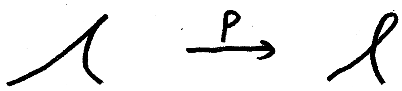
これは再び定理2に反する．したがって，(iii) が成立する．
$p=3$ のときも同様にする：

<u>補題3.</u> $g: \mathbb{R}^n, x \to \mathbb{R}^3, y$

(i) $n \geq 3$, g: not submersion nor fold nor cusp
$\Rightarrow$ g: topologically isolated or not topologically weakly stable.

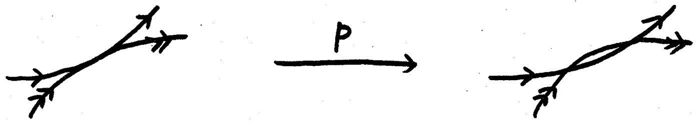
(ii) $n=2$, g: not immersion $\Rightarrow$ g は Whitney umbrella (top. isol.) で近似可能

(iii) $n=1$ g: not immersion $\Rightarrow$ g: not topologically weakly stable (Fig. 2)

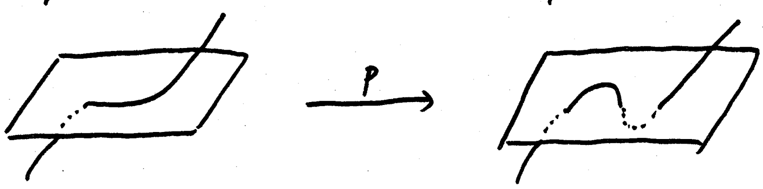


(Fig. 2)

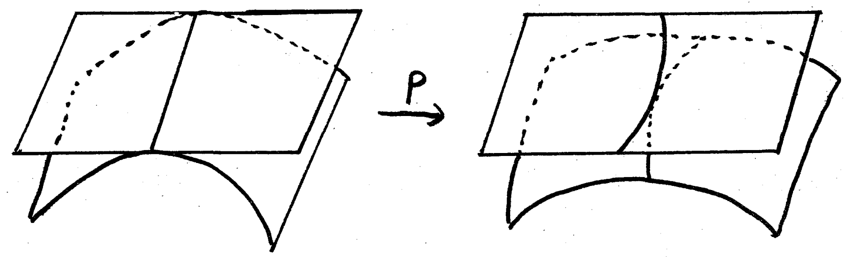
さらに，Fold locus 及び Cusp locus が non general position に交われば，top. isol. なもので近似できることを使う (Fig. 3, 4, 5, 6)



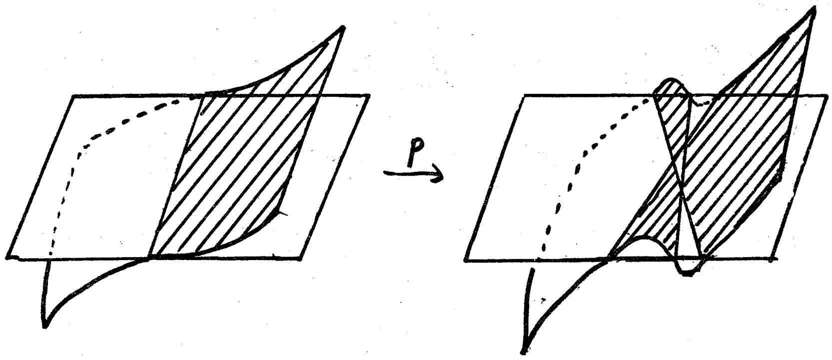
(Fig. 3)



(Fig. 4)



(Fig. 5)



(Fig. 6)

（$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対する安定性定理！）

<u>Note. 3.</u> このように，定理3の証明は，個別的な，germ に対する考察に依っている．Damon の仕事（[2],[3],[4],[6]）等を使った，もっとエレガントな証明が欲しいところである．

§4 展望

本稿で扱ったのは次の問題であった：

<u>問題1.</u> 有限位相確定写像芽を特徴づけよ．

これを一般の (n,p) で解くのは，今のところ手がかりがない．手ごろな問題としては，

<u>問題2.</u> $n \le \sigma(n,p)$ のとき，次は互いに同値か？

(a_k): f は C^k-infinitely determined $(0 \leq k \leq \infty)$

(b_k): f は C^k-finitely determined $(0 \leq k < \infty)$

(e): f は 条件(e) をみたす.

(t): $m_n^\infty \theta(f) \subseteq tf(\theta_n) + wf(\theta_p)$.

(cf. [35]). また一般の(n, p)について,

<u>問題3.</u> f: topologically infinitely determined $\Longrightarrow$ fは topologically stable off 0 かつ <u>K-bounded off 0</u> か?

ここでfが K-bounded off 0 とは, $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0 \mapsto K\text{-codim}(f, x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が bounded であること.

また, sufficiency と関連して,いくつかの問題が提出されている ([20], [21]).

個人的な感覚としては, 一般に

<u>予想1.</u> f: topologically infinitely determined $\Leftrightarrow$ f: topologically finitely determined.

が成り立つのではないかと思う. 定理3から, $p \leq 3$ のとき正しい.

さらにおもしろそうなのは, Fukudaの cone structure (cf. [11]) と関連する問題である.

いま簡単のため $n \leq p$ としよう. このときFukuda [11] により, link をとる mapping

$$\left\{ \begin{matrix} \text{top. fin. det} \\ \in \mathcal{E}(n,p) \end{matrix} \right\} \Big/ \underset{C^0}{\sim} \xrightarrow{\mathbb{L}} \left\{ \begin{matrix} S^{n-1} \to S^{p-1} \\ \text{top. stable} \end{matrix} \right\} \Big/ \underset{C^0}{\sim}$$

が well-defined かつ injective である．そこで，

問題4．$\mathbb{L}$ は surjective か？

いま，もっともsimple で non-trivial なcase $(n,p)=(2,2)$ を考える．このとき，かってな stable map $g: S^1 \to S^1$ の top. type を，或る topologically finitely determined map-germ $f: \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ の link として実現することが問題となる．実は，系2は，この問題に対するアプローチのために作ったのである．

写像芽の問題の周辺にも，いまだ発見されていない深い構造が隠されている，そう思えてならない．

(1982. 12. 15)

REFERENCES

[1] J. Bochnak and S. Łojasiewicz, A converse of the Kuiper-Kuo theorem, Lecture Notes in Math., 192 (Springer, Berlin, 1971), 254-261.

[2] J. N. Damon, Topological properties of discrete algebra types I, The Hilbert-Samuel function, Adv. in Math. Supp. Ser., 5 (1978), 83-118.

[3] ———, Topological properties of discrete algebra types II, Real and complex algebras, Amer. J. Math., 101 (1979), 1219-1248.

[4] ———, Topological stability in the nice dimensions, Topology, 18 (1979), 129-142.

[5] ———, Finite determinacy and topological triviality I, Invent. Math., 62 (1980), 299-324.

[6] ———, Topological properties of real simple germs, curves, and the nice dimensions $n>p$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 89 (1981), 457-472.

[7] A. A. du Plessis, On the genericity of topologically finitely-determined map-germs, Topology, 21 (1982), 131-156.

[8] A. A. du Plessis and H. Brodersen, On smooth ∞-determinacy and topological finite determinacy, preliminary version.

[9] T. Fukuda, Types topologiques des polynômes, Publ. Math. I.H.E.S., 46 (1976), 87-106.

[10] ———, Local topological properties of differentiable mappings, C^∞-写像と特異集合, 数理解析研究所講究録 403, 109-111.

[11] T. Fukuda, Local topological properties of differentiable mappings. I, Invent. Math., 65 (1981), 227-250.

[12] ———, Local topological properties of C^∞ mappings II, 微分可能多様体論シンポジウム (和歌山大学, 1980).

[13] ———, 微分可能写像の特異点論, 数学 34-2 (1982), 116-139.

[14] ———, 本講究.

[15] C.G. Gibson, K. Wirthmüller, A.A. du Plessis and E.J.N. Looijenga, Topological stability of smooth mappings, Lecture Notes in Math., 552 (Springer, Berlin, 1976).

[16] G. Ishikawa, 写像の特異性に従う関数族について, 京都大学修士論文, 1982.

[17] ———, Families of functions dominated by distributions of $\mathcal{C}$-classes of mappings, to appear in Ann. Inst. Fourier.

[18] ———, A remark on topological finite-determinacy of map-germs, 日本数学会トポロジー分科会 (三重大学 1982, 秋)

[19] S. Izumiya, Generic bifurcations of varieties I, preprint.

[20] S. Koike, A partition of the coefficient space of real homogeneous polynomials by their variety, preprint.

[21] ———, 本講究.

[22] N.H. Kuiper, C^1-equivalence of functions near isolated critical

points, Ann. Math. Studies 69 (Princeton, 1968), 199–218.

[23] T.C. Kuo, On C^0-sufficiency of jets of potential functions, Topology, 8 (1969), 167–171.

[24] E.J.N. Looijenga, On the semi-universal deformation of a simple-elliptic hypersurface singularity, Part I; Unimodularity, Topology, 16 (1977), 257–262.

[25] J.N. Mather, Stability of C^∞ mappings, III, Finitely determined map germs, Publ. Math. I.H.E.S., 35 (1968), 127–156.

[26] ———, Notes on topological stability, Lecture Notes, Harvard Univ. 1970.

[27] ———, Stratifications and mappings, Proc. Conf. on Dynamical Systems, (ed. M.M. Peixoto, Academic Press, 1973), 195–232.

[28] ———, How to stratify mappings and jet spaces, Lecture Notes in Math. 535, (Springer, Berlin, 1976), 128–176.

[29] I. Nakai, Structural stability of composed mappings I, II, preprint.

[30] R. Thom, Local topological properties of differentiable mappings, Colloq. on differential analysis (Tata Inst. Oxford Univ. Press, 1964), 191–202.

[31] ———, The bifurcation subset of a space of mappings, Lecture Notes in Math., 197 (Springer, Berlin, 1970), 202–208.

[32] A.N. Varčenko, Local topological properties of analytic mappings, Math. USSR-Izv., 7 (1973), 883-917.

[33] ————, Local topological properties of differentiable mappings, Math. USSR-Izv., 8 (1974), 1033-1082.

[34] ————, Algebro-geometric equisingularity and local topological classification of smooth mappings, Proc. of the Inter. Cong. of Math. (Vancouver, 1974) 427-430.

[35] C.T.C. Wall, Finite determinacy of smooth map-germs, Bull. London Math. Soc., 13 (1981), 481-539.

[36] L.C. Wilson, Infinitely determined map-germs, Canad. J. Math.

[37] ————, Map germs infinitely determined with respect to right-left equivalence, preprint.

[38] G. Ishikawa, On topological determinacy of smooth map-germs, in preparation.

[39] A.N. Varčenko, Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic varieties and families of polynomial mappings, Math. USSR-Izv., 6 (1972), 949-1008.

[40] J.N. Mather, Stability of C^∞ mappings V, Transversality, Adv. in Math, 4 (1970), 301-335.

[41] A.A. du Plessis, On the determinacy of smooth map-germs,

Invent. math. 58 (1980), 107-160.

[42] R. Thom, Un lemme sur les applicatións différentiables, Bol. Soc. Mat. Maxicana (2) 1 (1956), 59-71.

[43] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidean spaces I, Mappings of the plane into plane, Ann. of Math., 62 (1955), 374-410.