

## VLSIモデルへのグラフの埋め込みについて

電通大 戸田誠之助 (Seinosuke Toda)

笠井琢美 (Takumi Kasai)

### 1. はじめに

最近のVLSI技術の急速な進歩によって、大規模な論理回路を1チップ上に実現することが可能になってきている。これにともない、回路をいかに効率よくチップ上に埋め込むかという問題が議論されている。

この問題は、VLSIを表わす平面格子 $G_p$ に与えられたグラフ $G$ を埋め込む問題として定式化され、その効率の尺度として $G_p$ の大きさを表わす面積がとられる。いくつかのグラフのクラスに対し、面積の上下界が知られている。一才、Rosenberg [2] は、VLSIモデルの一般化として3次元格子を考え、3次元格子にグラフを埋め込む問題を扱っている。ここでの効率の尺度は、体積である。[2]において、いくつかのグラフのクラスの体積が面積に比べて漸近的により小さくなることが示されている。例えば、 $n$ -superconcentra-

For  $G$  に對し,  $G$  の面積は,  $\Omega(n^2)$  必要であるか [1],  $G$  の体積は  $O(n\sqrt{n})$  で十分である。

3次元モデルの実際的な意味を評価することは困難であるが, 配線を空間的にとらえることによつて, 従来の平面格子  $\Lambda$  の埋め込みに比べて, 3次元格子  $\Lambda$  の埋め込み法は, より容易に得られたいと思われたい。従つて, もしグラフの平面格子  $\Lambda$  の埋め込みと3次元格子  $\Lambda$  の埋め込みの關係が示されれば, 3次元格子  $\Lambda$  の埋め込み法は, 平面格子  $\Lambda$  の埋め込み法に對し, ある示唆を与えるであらう。

そこで, 本論文では, 次数が高々4のグラフ  $G$  に對し,  $G$  の平面格子  $\Lambda$  の埋め込みと3次元格子  $\Lambda$  の埋め込みとの關係を示す。更に,  $G$  の3次元格子  $\Lambda$  のある統一的な埋め込み法を示す。最後に, これらの結果の応用として, 準外平面グラフが頂点数に比例した面積で平面格子に埋め込み可能であることを示す。(尚, この一部の結果が [1] ですでに得られていることを, 本論文執筆中に大阪大学 萩原兼一氏によつて指摘された)

## 2. 諸定義

本節では, 以後の議論に必要な基本的概念を定義する。

〈定義 2.1〉 グラフ  $G$  は, 対  $(V, E)$  である。ここで,  $V$  は 頂点 の集合であり,  $E \subseteq \{X \mid X \subseteq V, |X| = 2\}$  は 辺 の集合である。辺  $e = \{u, v\}$  に対し, 辺  $e$  と頂点  $u$ ,  $v$  は 接続 しているという。また,  $u, v$  を辺  $e$  の 端点 という。頂点  $v \in V$  の 次数 は,  $v$  に接続する辺の数であり,  $\text{deg}_G(v)$  で表わす。グラフ  $G$  の 次数  $\text{deg}(G)$  は,  $G$  の頂点の次数の最大値である。

辺の列  $P = \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}$  ( $k > 0$ ) を  $G$  上の 道 という。このとき,  $v_0, v_k$  を道  $P$  の 端点 という。また,  $v_0 = v_k$  なるとき, 道  $P$  を 閉路 という。道  $P$  が 初等的 であるとは,  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  が全て異なるときをいう。道  $P$  と  $P'$  が 辺素 であるとは,  $P$  と  $P'$  が互いに共通な辺をもたないときをいう。

グラフ  $G' = (V, E')$  が  $G$  の 部分グラフ であるとは,  $V' \subseteq V$  かつ  $E' \subseteq E$  なるときをいう。更に,  $G'$  が  $G$  の 全域部分グラフ であるとは,  $V' = V$  かつ  $E' \subseteq E$  かつ任意の頂点  $u, v \in V$  に対し,  $u$  と  $v$  の間の道が  $G$  において存在するならば,  $G'$  においても  $u$  と  $v$  の間の道が存在するときをいう。

$V$  の部分集合  $V'$  による  $G$  の 誘導部分グラフ  $\langle V' \rangle$  は, 頂点集合として  $V'$  をもち辺集合として  $E' = \{X \mid X \subseteq V', |X| = 2\} \cap E$  をもつ  $G$  の部分グラフである。  $E$  の部分集合  $E'$  による  $G$

の辺誘導部分グラフ  $\langle E' \rangle$  は,  $E'$  の辺に接続する頂点からなる集合を頂点集合としてもち,  $E'$  を辺集合としてもつ  $G$  の部分グラフである。

自然数  $n \geq 1$  に対し,  $[n] = \{i \mid 1 \leq i \leq n\}$  とする。グラフ  $G = (V, E)$  が  $n$ -彩色可能 であるとは, ある関数  $\varphi: V \rightarrow [n]$  が存在して, 任意の  $u, v \in V$  に対し,  $\{u, v\} \in E$  ならば  $\varphi(u) \neq \varphi(v)$  なるときをいう。また, 関数  $\varphi$  を  $G$  の  $n$ -彩色 といい。グラフ  $G$  が  $n$ -彩色可能であるような最小の  $n$  を  $G$  の染色数 と呼び,  $\chi(G)$  で表わす。

以後の議論では, 連結グラフのみを扱う。従って, グラフといるときは常に連結グラフであるとする。

<定義 2. 2>  $\mathbb{N}$  を自然数全体とする。  $\mathbb{N}^3$  の 2 元  $u = \langle i, j, k \rangle$ ,  $v = \langle i', j', k' \rangle$  の間の距離  $d(u, v)$  を  $d(u, v) = |i - i'| + |j - j'| + |k - k'|$  で定める。自然数  $I, J, K \geq 1$  に対し,  $V(I, J, K) = \{\langle i, j, k \rangle \mid 0 \leq i < I, 0 \leq j < J, 0 \leq k < K\}$ ,  $E(I, J, K) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V(I, J, K), d(u, v) = 1\}$  とする。立体格子  $G$  は,  $V = V(I, J, K)$  かつ  $E \subseteq E(I, J, K)$  なるグラフ  $(V, E)$  である。この  $I, J, K$  を各々  $G$  の幅, 長さ, 高さ といい,  $\chi(G)$ ,

$\gamma(G)$ ,  $\Sigma(G)$  で表わす。 $\Sigma(G) = 1$  なるとき, 立体格子  $G$  を 平面格子 といい。

立体格子  $G = (V, E)$  に対し,  $G$  の頂点を 格子点 と呼び  $G$  の辺を 格子辺 と呼ぶ。また,  $G$  の格子辺  $e = \{ \langle i, j, k \rangle, \langle i, j, k' \rangle \}$  に対し,  $k = k'$  のとき  $e$  を 層内辺 と呼び,  $k \neq k'$  のとき  $e$  を 層間辺 と呼ぶ。格子点の集合  $V_m = \{ \langle i, j, k \rangle \in V \mid k = m \}$  ( $0 \leq m < \Sigma(G)$ ) による  $G$  の誘導部分グラフ  $\langle V_m \rangle$  を  $G$  の オ  $m$  層 と呼ぶ。

<定義 2.3>  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  をグラフとする。 $G_1$  の  $G_2$  への 埋め込み は, 対  $(\varphi_1, \varphi_2)$  である。ここで,  $\varphi_1$  は  $V_1$  から  $V_2$  への単射であり,  $\varphi_2$  は  $E_1$  から  $E_2$  上の初等道全体への単射である。更に,  $(\varphi_1, \varphi_2)$  は以下の条件を満たす。

- 1) 任意の辺  $e = \{ u, v \} \in E_1$  に対し,  $\varphi_2(e)$  の端点は  $\varphi_1(u)$  と  $\varphi_1(v)$  である。
- 2) 任意の  $e, e' \in E_1$  に対し,  $\varphi_2(e)$  と  $\varphi_2(e')$  は互いに辺素である。
- 3) 任意の辺  $e \in E_1$  に対し,  $\varphi_2(e)$  は端点以外で  $\varphi_1$  による像を含まない。

$G_1$  の  $G_2$  への埋め込み  $(\varphi_1, \varphi_2)$  が存在するとき,  $G_1$

は  $G_2$  に 埋め込み可能 であるといひ,  $G_1 \sqsubset G_2$  で表わす。

<定義 2.4>  $\mathcal{G}_d$  を立体格子全体とする。  $\mathcal{G}_p$  を平面格子全体とする。次数が高々 4 のグラフ  $G = (V, E)$  に対し,  $G$  の 埋め込み体積 (単に体積という)  $VOL(G)$  を,

$$VOL(G) = \min \{ X(G'), Y(G'), Z(G') \mid G \sqsubset G', G' \in \mathcal{G}_d \}$$

で定義する。また,  $G$  の 埋め込み面積 (単に面積という)

$AREA(G)$  を,

$$AREA(G) = \min \{ X(G'), Y(G') \mid G \sqsubset G', G' \in \mathcal{G}_p \}$$

で定義する。

### 3. 面積・体積の上界

本節では, 次数が高々 4 のグラフに対する面積と体積の関係を示す。更に, 層染色数と呼ばれるグラフの不変数を導入し, 層染色数によって面積・体積の上界を与える。

#### 3.1 面積と体積の関係

グラフ  $G$  の立体格子  $G_d$   $\wedge$  の埋め込みが与えられたとき,  $G$  のある平面格子  $G_p$   $\wedge$  の埋め込みを構成する。これより,  $G$  の面積と体積の関係が示される。まず, この構成を容易にするため, 次の補題で述べる形に,  $G$  の立体格子  $\wedge$  の埋め込みを変形する。

〈補題 3.1〉  $G = (V, E)$  を次数が高々 4 のグラフとする。  $G$  の立体格子  $G_d = (V_d, E_d)$  への埋め込み  $(\varphi_1, \varphi_2)$  が与えられたとき、次を満たす立体格子  $G_d' = (V_d', E_d')$  と  $G$  の  $G_d'$  への埋め込み  $(\varphi_1', \varphi_2')$  が存在する。

$$i) \text{VOL}(G_d') = 9 \text{VOL}(G_d)$$

$$ii) \text{deg}(G_d') \leq 4$$

iii)  $G_d'$  において、格子点  $\langle i, j, k \rangle$  に接続する層間辺が存在するとき、 $G_d'$  は層内辺  $\{\langle i-1, j, k \rangle, \langle i, j, k \rangle\}$ ,  $\{\langle i, j, k \rangle, \langle i, j+1, k \rangle\}$  を含まない。

(証明略)

〈定理 3.1〉  $G = (V, E)$  を次数が高々 4 の任意のグラフとする。また、 $G_d = (V_d, E_d)$  を  $\text{VOL}(G)$  を与える立体格子とし、 $M = \min(X(G_d), Y(G_d), Z(G_d))$  とする。

このとき、 $9 \cdot M \cdot \text{VOL}(G) \geq \text{AREA}(G)$  が成り立つ。

(略証) 補題 3.1 によって得られる立体格子を  $G_d' = (V_d', E_d')$  とおく。このとき、 $\text{deg}(G_d') \leq 4$  より、 $G_d'$  は平面格子への埋め込み可能である。また、 $\text{AREA}(G_d') \leq \text{VOL}(G_d')$  となることは容易に示すことができる。よって、補題 3.1 より、 $G \subset G_d'$  であるから、 $\text{AREA}(G_d') \geq \text{AREA}(G)$

となり, 定理の不等式を得る。

(証明終)

〈系 3. 1〉 次数が高々4の任意のグラフ  $G$  に対し,  
 $AREA(G) = O(VOL(G)^{\frac{4}{3}})$  が成り立つ。 (系終)

### 3. 2 層染色数による面積・体積の上界

幾つかのグラフのクラスに関しては, 効率のよい埋め込みアルゴリズムが知られている。ここでの効率の尺度は面積である。今, そのようなクラスを  $\mathcal{G}$  とおく。  $\mathcal{G}$  に対する埋め込みアルゴリズムを用いてより広いクラスに対する効率のよい埋め込みアルゴリズムを与えることができる。これは, 次のような方法による。

グラフ  $G = (V, E)$  が与えられたとき,  $G$  の全域部分グラフでかつ  $\mathcal{G}$  に属するものを1つ選択する。この全域部分グラフを  $G' = (V, E')$  とおく。  $\mathcal{G}$  に対する埋め込みアルゴリズムを用いて,  $G'$  の平面格子  $G_p \wedge$  の埋め込みを求める。次に,  $E - E'$  の各辺を“空間的”に実現する。これより,  $G$  のある立体格子  $G_d \wedge$  の埋め込みが得られる。このとき, グラフ  $G$  の体積は  $\Sigma(G_d)$  によって決定される。そこで, 本節では, 層染色数と呼ばれるグラフのある不変数を導入する。層染色数は,  $\Sigma(G_d)$  の上界を与える概念である。従って,  $G$  の



層染色数と  $\text{AREA}(G')$  の積によって  $\text{VOL}(G)$  の上界が与えられる。

<定義3.1>  $\mathcal{G}$  をグラフ全体とする。 $\mathcal{G}$  の部分グラフ  $\mathcal{P}$  を性質と呼ぶ。グラフ  $G$  が 性質  $\mathcal{P}$  をもつ (または, 性質  $\mathcal{P}$  を満たす) とは,  $G \in \mathcal{P}$  なるときをいう。性質  $\mathcal{P}$  が 性質  $\mathcal{P}'$  に関して全域的 であるとは, 任意のグラフ  $G \in \mathcal{P}'$  に対し,  $\mathcal{P}$  を満たす  $G$  の全域部分グラフ  $G'$  が存在するときをいう。性質  $\mathcal{P}$  が  $\mathcal{G}$  に関して全域的であるとき, 単に,  $\mathcal{P}$  は全域的であるという。

<定義3.2>  $\mathcal{P}$  を全域的性質とする。 $G = (V, E)$  をグラフとし,  $G' = (V, E')$  を  $G$  の  $\mathcal{P}$  を満たす全域的部分グラフとする。 $E - E'$  から  $G'$  上の道全体  $\wedge$  の関数  $\phi$  が  $(G, G')$ -path assignment であるとは, 任意の辺  $e = \{u, v\} \in E - E'$  に対し,  $\phi(e)$  が  $u, v$  を端点とする  $G'$  上の初等導であるときをいう。 $G, G', \phi$  が与えられたとき,  $\mathcal{P}$  に関する 拡張線グラフ  $L(G, G', \phi) = (V_L, E_L)$  を,  $V_L = E - E'$ ,  $E_L = \{ \{e_1, e_2\} \mid \mathcal{P}(e_1) \text{ と } \mathcal{P}(e_2) \text{ が共通辺をもつ} \}$  で定める。

$\mathcal{P}$  に関するグラフ  $G$  の 層染色数  $I_{\mathcal{P}}(G)$  を

$$I_{\mathcal{P}}(G) = \min_{G', \mathcal{P}} \chi(L(G, G', \phi))$$

で定める。ただし,  $G \in \mathcal{P}$  のときは,  $I_{\mathcal{P}}(G) = 1$  とする。

以上の概念を用いると、次の定理が得られる。

〈定理 3.2〉  $P$  を全域的性質とする。  $G = (V, E)$  を次数が高々4の任意のグラフとし、  $G' = (V, E')$  を  $IP(G)$  を与える  $G$  の  $P$  を満たす全域部分グラフとする。  $C = IP(G) + 1$  とするとき、次が成り立つ。

$$1) \text{VOL}(G) = O(C \cdot \text{AREA}(G'))$$

$$2) \text{AREA}(G) = O(C^2 \cdot \text{AREA}(G'))$$

(証明略)

#### 4. 定理の応用

木のクラスを  $\mathcal{T}$  とおくと、 $\mathcal{T}$  は明らかに全域的性質である。本節では、準外平面的と呼ばれるグラフの  $IP(G)$  の上界を与える。

〈定義 4.1〉  $G = (V, E)$  を任意の平面グラフとする。  $G$  の領域  $R$  は、  $R$  の境界上にある頂点の集合と辺の集合の無向グラフとして定義される。  $R_i = (V_i, E_i)$  を  $G$  の領域とする。特に、  $R_i$  を  $G$  の外領域とする。  $G$  が準外平面的であるとは、任意の  $V_i$  に対し、  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  となることをいう。

〈補題 4.1〉  $G = (V, E)$  を次数が高々4の平面グラフとする。また、  $G^* = (V^*, E^*)$  を  $G$  の双対グラフとする。

このとき,  $I_T(G) \leq 4 \cdot \text{rad}(G^*)$  が成り立つ。ここで、 $\text{rad}(G^*)$  は  $G^*$  の半径である。 (補題終)

<補題 4. 2>  $G = (V, E)$  を次数が高々4の準外平面的グラフとし,  $G^*$  を  $G$  の双対グラフとする。このとき,  $\text{rad}(G^*) \leq 2$  が成り立つ。 (補題終)

<定理 (Valiant [3])> 次数が高々4の任意の木  $T = (V, E)$  に対し,  $\text{AREA}(T) = O(|V|)$  が成り立つ。

以上の補題及び定理と定理 3. 2 より, 次の定理を得る。

<定理 4. 1> 次数が高々4の任意の準外平面的グラフ  $G = (V, E)$  に対し,  $\text{AREA}(G) = O(|V|)$  が成り立つ。 (定理終)

## 5. 結 論

本論文では, グラフの VLSI モデルへの埋め込み問題に関し, 従来の平面的 VLSI モデルと 3次元 VLSI モデルの関係を示した。更に, グラフを 3次元 VLSI モデルへ埋め込む統一的な手法を示した。この手法によれば,  $\mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_2 \leq \dots$  となるグラフのクラスのある階層に対し,  $\mathcal{G}_i$  の

埋め込みアルゴリズムが求まれば,  $G_{i+1}$  に対する埋め込みアルゴリズムでその面積の上界が  $O(I_{G_i}(G_{i+1})^2 \cdot \text{AREA}(G_i))$  となるものが得られる。このような階層的な形により広がり方の面積の上界を求めることが, 今後の研究課題である。また, 3.2 節で示した手法以外に, 統一的な埋め込み法を見出すこともより重要な研究課題である。

[謝辞] 文献[1]を提供して致いた大阪大学 萩原兼一氏に感謝致します。

#### [参考文献]

- (1) Dolev, D. and Trickey, H.: "On Linear Area Embedding of Planar Graphs", STAN-CS-81-876, (Sept. 1981).
- (2) Rosenberg, A.L.: "Three-Dimensional Integrated Circuitry", in "VLSI Systems and Computations", Kung, H.T. and et. al. ed., 69-80, (1981).
- (3) Valiant, L.G.: "Universality Considerations in VLSI Circuits", IEEE Trans. on Comput. C-30(2), 153-157, (Feb. 1981).