数理解析研究所講究録
第 496 巻 1983 年 123-148

Dirichlet の L－函数の2乗平均について

立教大・理　松本耕二 (Kohji Matsumoto)

筆者は[1]において，次の結果をannounceした：

定理．q を自然数，χ を法 q の Dirichlet 原始指標，$L(s,\chi)$ を χ に対する Dirichlet の L－函数とする。もし q が奇数ならば，任意の $T \geqq 1$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \int_1^T \left| L\left(\tfrac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2 dt \\
&= \frac{\varphi(q)}{q} T\log T \\
&\quad + \frac{\varphi(q)}{q}\left\{1+\log 2\pi - 2\gamma - \log q - 2\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\right\}T \\
&\quad + 4\left(\frac{2\pi}{q^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{q-1}{}' n\right)T^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + O\Big((qT)^{\frac{1}{3}+\varepsilon} + q^2(qT)^{\frac{1}{4}}\log(qT) \\
&\qquad + q^{\frac{5}{2}}(qT)^{\frac{1}{8}} + q^{\frac{9}{2}}\log^2(qT)\Big),
\end{aligned}
$$

ただし，$\varphi(q)$はEulerの函数，γはEuler定数であり，$\sum_{p|q}$はqの素因数の全体を，$\sum_n'$はqと互いに素なnを，それぞれ走るものとする。――――

系. qが奇数，$t \gg q^{23}$ならば，任意の$\varepsilon>0$に対し，

(2) $$L(\tfrac{1}{2}+it,\chi) = O((qt)^{\frac{1}{6}+\varepsilon})$$

が成り立つ。――――

Kolesnikの結果[2]によって，$t \gg q^{72+\varepsilon}$ならば(2)は成り立つことがわかるが，上記の系はtの範囲に関する改良を与える。

Balasubramanian [3]は，いわゆるRiemann-Siegel formulaを用い，Titchmarsh [4]の議論を精密化することによって，次の非常に深い結果をえた：

$$\int_1^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2\,dt = T\log T - (1+\log 2\pi - 2\gamma)T + O(T^{\frac{35}{108}+\varepsilon}).$$

ここに$\zeta(s)$はRiemannのζ-函数である。（実際には，[3]が発表された当時には[2]がまだでていなかったので，[3]でBalasubramanianが与えた残余項はもう少し弱いものになっている。）我々の定理(1)は，このBalasubramanianの結果のL-

函数への一般化になっている。証明の方針は基本的には[3]と同じであるが，単なる機械的一般化では残余項におけるqの評価が悪くなり，"系"にみられるような結果を得ることはできなくなる。そのために，証明の後半においてKloostermanの和についての，曲線の代数幾何学に立脚したWeil[5]の有名な評価を利用することになる。

qが偶数の場合の結論，系の証明，および(1)の右辺の主要項に対するcommentなどについては，[1]に譲ることとし，以下においては，[1]でほんのスケッチしか与えなかった定理の証明を，いくらか詳細に述べようと思う。

§1. L-函数のRiemann-Siegel formula

Riemann-Siegel formulaのDirichletのL-函数への拡張は，Siegel自身によって実行された(Siegel[6])。その結論を，我々の目的に都合のよい形にして書けば，次のようになる。

$$C = C(\chi) = \sum_{n=1}^{q} \chi(n) e^{-2\pi i n/q}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$$a = \frac{1}{2}(1 - \chi(-1)),$$

$$\rho = i^{-\frac{a}{2}} C^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}},$$

$$k = q\left[\left(\frac{t}{2\pi q}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$e^{i\alpha_n} = \chi(n) \qquad \text{if} \quad (n, q) = 1,$$

$$e^{i\vartheta} = \rho\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}\sqrt{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}, \qquad \left(s = \frac{1}{2}+it\right)$$

$$e^{i\delta} = \rho\, e^{\frac{1}{8}\pi i(2a-1)},$$

$$\eta = \left(\frac{qt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} - k - \frac{1}{2}$$

とすると，

$$e^{i\vartheta}L\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) = 2\sum_{n=1}^{k}{}' n^{-\frac{1}{2}}\cos(\vartheta+\alpha_n - t\log n)$$

$$+\left(\frac{2\pi}{qt}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{(-1)^{\ell-1}}{\sin 2\pi\left(\eta+\frac{q}{4}\right)}\sum_{n=1}^{q}{}'\sin\left\{\frac{2\pi}{q}\left(\eta+\frac{q+1}{2}-n\right)^2-\frac{\pi n^2}{q}+\alpha_n+\delta\right\}$$

$$+O\left(q^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{3}{4}}\right).$$

$$\left(= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \quad \text{とおく}\right)$$

ただし $\Gamma(s)$ は Γ－函数，$[\quad]$ は Gauss 記号であり，また $\sum_n{}'$ は（以下本稿を通じて）q と互いに素な n を走る和を表わすものとする。q，χ，$L(s, \chi)$ は定理の仮定をみたし，さらに χ は主指標ではないとしておく。（即ち $q \geq 3$ とする。実際，$q = 1$ に対しては定理は Balasubramanian [3] の結果そのものである）　上の式から，

$$(3) \quad \int_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^2 dt = \int_1^T f_1(t)^2\,dt + \int_1^T f_2(t)^2\,dt + \int_1^T f_3(t)^2\,dt$$

$$+2\int_1^T f_1(t)f_2(t)\,dt+2\int_1^T f_2(t)f_3(t)\,dt+2\int_1^T f_3(t)f_1(t)\,dt$$

まず，右辺の第1の積分を扱う。$f_1(t)$ の定義から，

$$\int_1^T f_1(t)^2dt=4\int_1^T \sum_{n=1}^{k}{}' \sum_{m=1}^{k}{}' \frac{\cos(\vartheta+\alpha_n-t\log n)\cos(\vartheta+\alpha_m-t\log m)}{(mn)^{\frac12}}\,dt$$

そこで，
$$T_2=T_2(m,n)=\min\left\{t\ ;\ k=q\left[\sqrt{\frac{t}{2\pi q}}\right]\geq \max(m,n)\right\}$$

とおくと，$q\geq 3$ 故 $(q,m)=1$ の時 m/q は非整数。よって，

$$T_2=\max\left\{2\pi q\left(\left[\frac{m}{q}\right]+1\right)^2,\ 2\pi q\left(\left[\frac{n}{q}\right]+1\right)^2\right\}$$

となる。そこで，

$$L=q[(T/2\pi q)^{\frac12}],\quad n_1=[n/q]+1,\quad n_2=n-(n_1-1)q$$
$$(m_1=[m/q]+1,\quad m_2=m-(m_1-1)q)$$

とおけば，

$$\int_1^T f_1(t)^2dt$$
$$=\sum_{n=1}^{L}{}'\sum_{m=1}^{L}{}'\frac{2}{(mn)^{\frac12}}\int_{T_2}^{T}\left\{\cos\left(\alpha_m-\alpha_n+t\log\frac{n}{m}\right)+\cos(2\vartheta+\alpha_m+\alpha_n-t\log mn)\right\}dt$$

$$=2\sum_{n=1}^{L}{}'\frac{T-2\pi q n_1^2}{n}$$

$$+4\sum_{\substack{m<n\\ n_1<2m_1-1}}{}'\sum{}'\frac{\sin(\alpha_m-\alpha_n+T\log\frac{n}{m})}{(mn)^{\frac12}\log\frac{n}{m}}$$

$$+4\sum_{n_1 \geq 2m_1-1}{}'\sum{}' \frac{\sin(\alpha_m-\alpha_n+T\log\frac{n}{m})}{(mn)^{\frac{1}{2}}\log\frac{n}{m}}$$

$$-4\sum_{\substack{m<n \\ n_1<2m_1-1}}{}'\sum{}' \frac{\sin(\alpha_m-\alpha_n+2\pi q n_1^2\log\frac{n}{m})}{(mn)^{\frac{1}{2}}\log\frac{n}{m}}$$

$$-4\sum_{n_1 \geq 2m_1-1}{}'\sum{}' \frac{\sin(\alpha_m-\alpha_n+2\pi q n_1^2\log\frac{n}{m})}{(mn)^{\frac{1}{2}}\log\frac{n}{m}}$$

$$+2\sum_{n=1}^{L}{}'\frac{1}{n}\int_{2\pi q n_1^2}^{T}\cos 2(\vartheta+\alpha_n-t\log n)\,dt$$

$$+4\sum_{\substack{m<n \\ n_1<2m_1-1}}{}'\sum{}' \frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\int_{2\pi q n_1^2}^{T}\cos(2\vartheta+\alpha_m+\alpha_n-t\log mn)\,dt$$

$$+4\sum_{n_1 \geq 2m_1-1}{}'\sum{}' \frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\int_{2\pi q n_1^2}^{T}\cos(2\vartheta+\alpha_m+\alpha_n-t\log mn)\,dt$$

$$(4)\qquad = 2U_1+4U_2+4U_3-4U_4-4U_5+2U_6+4U_7+4U_8$$

（とおく）

以下の数節において我々は，$U_1, U_2, \cdots, U_8$ 及び (3) の右辺の残り5つの積分を，個別に評価・計算していく。

§2. U_1 の計算

最初に我々は，次の和を扱う：

$$(5)\quad U_1' = \sum_{n=1}^{L}{}' \frac{T-2\pi q^{-1}n^2}{n} = T\sum_{n=1}^{L}{}'\frac{1}{n} - \frac{2\pi}{q}\sum_{n=1}^{L}{}' n = TU_{11}' - \frac{2\pi}{q}U_{12}'.$$

$q = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ を q の素因数分解とすると，

$$U_{11}' = \sum_{n=1}^{L} \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i}\left(\sum_{n=1}^{[L/p_i]} \frac{1}{n} \right) + \sum_{\substack{1\le i,j\le r \\ i\ne j}} \frac{1}{p_ip_j}\left(\sum_{n=1}^{[L/p_ip_j]} \frac{1}{n} \right) - + \cdots$$

ところが一般に

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

$$\therefore U_{11}' = \log L + \gamma + \frac{1}{2L} + O\left(\frac{1}{L^2}\right)$$
$$- \sum_{i} \frac{1}{p_i}\left\{ \log\left[\frac{L}{p_i}\right] + \gamma + \frac{1}{2[L/p_i]} + O\left(\frac{p_i^2}{L^2}\right) \right\}$$
$$+ \sum_{i\ne j} \frac{1}{p_ip_j}\left\{ \log\left[\frac{L}{p_ip_j}\right] + \gamma + \frac{1}{2[L/p_ip_j]} + O\left(\frac{p_i^2p_j^2}{L^2}\right) \right\}$$
$$- + \cdots$$

そこで，

$(T/2\pi q)^{\frac{1}{2}} = [(T/2\pi q)^{\frac{1}{2}}] + \xi$, $L/p_i = [L/p_i] + \xi_i$,

$L/p_ip_j = [L/p_ip_j] + \xi_{ij}$, ...

とおけば，

$$U_{11}' = \log(qT/2\pi)^{\frac{1}{2}} - \xi(2\pi q/T)^{\frac{1}{2}} + O(q/T) + \gamma$$
$$+ \frac{1}{2}(2\pi/qT)^{\frac{1}{2}} + O(T^{-1}) + O(L^{-2})$$
$$- \sum_{i} \frac{1}{p_i}\left\{ \log L - \log p_i - \frac{p_i\xi_i}{L} + \gamma + \frac{p_i}{2L} + O\left(\frac{p_i^2}{L^2}\right) \right\}$$
$$+ \sum_{i\ne j} \frac{1}{p_ip_j}\left\{ \log L - \log(p_ip_j) - \frac{p_ip_j\xi_{ij}}{L} + \gamma + \frac{p_ip_j}{2L} + O\left(\frac{p_i^2p_j^2}{L^2}\right) \right\}$$
$$- + \cdots$$

これを整理すると，elementary な計算により，

(6) $$\mathfrak{V}_{11}' = \frac{\varphi(q)}{q}\left(\frac{1}{2}\log\frac{qT}{2\pi} - \xi\sqrt{\frac{2\pi q}{T}} + \gamma + \sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\right) + \frac{1}{L}\left(\sum_i \xi_i - \sum_{i\neq j}\xi_{ij} + \cdots\right) + O\left(\frac{1}{T}\left(\varphi(q) + \prod_{p|q}(p+1)\right)\right).$$

また同様にして，

(7) $$\mathfrak{V}_{12}' = \frac{\varphi(q)}{2q}L^2 + L\left(\sum_i \xi_i - \sum_{i\neq j}\xi_{ij} + \cdots\right) - \sum_i \frac{1}{2}\xi_i(\xi_i - 1)p_i + \sum_{i\neq j}\frac{1}{2}\xi_{ij}(\xi_{ij}-1)p_ip_j - + \cdots$$

(6) と (7) を (5) に代入すれば，

(8) $$\mathfrak{V}_1' = \frac{\varphi(q)}{q}\left\{\frac{T}{2}\log T + \left(\frac{1}{2}\log q - \frac{1}{2}\log 2\pi + \gamma + \sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1} - \frac{1}{2}\right)T\right\} + O(q).$$

を得る。

次に $\Delta\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_1' - \mathfrak{V}_1$ を計算しよう。$K = [(T/2\pi q)^{\frac{1}{2}}]$ とおくと，

$$\Delta\mathfrak{V}_1 = \sum_{n_1=1}^{K}\sum_{n_2=1}^{q}{}' \frac{2\pi q}{n}\left\{n_1^2 - \left(n_1 - 1 + \frac{n_2}{q}\right)^2\right\}$$

$$= \sum_{n_1=1}^{K}\sum_{n_2=1}^{q}{}' \frac{4\pi q n_1}{n}\left(1 - \frac{n_2}{q}\right) + O(q\log qT)$$

この分母の n を $(n_1-1)q$ におきかえ，次に分子の n_1 を (n_1-1) におきかえても，高々 $O(q\log qT)$ の誤差がでるだけである。結局，

$$\Delta U_1 = \frac{2}{q}\cdot\left(\frac{2\pi T}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{q-1}{}' n + O(q\log qT)$$

これと(8)から，

$$(9)\quad U_1 = \frac{\varphi(q)}{q}\left\{\frac{T}{2}\log T + \left(\frac{1}{2}\log q - \frac{1}{2}\log 2\pi + \gamma + \sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1} - \frac{1}{2}\right)T\right\}$$
$$- \frac{2}{q}\sqrt{\frac{2\pi T}{q}} \sum_{n=1}^{q-1}{}' n + O(q\log qT).$$

§3. U_4, U_6, U_7, U_8 の計算

この計算は[3]の相当する部分の analogy として忍耐強くやればできるので，結果のみ示す。

$$(10)\quad U_4 = B_1 + B_2 + O(q^{\frac{5}{4}}T^{\frac{1}{4}}),$$

$$(11)\quad U_6 = \left(\frac{2\pi T}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}\left[\frac{1}{C(\chi)}\sum_{n=1}^{q}\chi^2(n)e^{-2\pi i n^2/q}\int_{2q^{-\frac{1}{2}}(q-n)}^{\infty} e^{i\pi(\theta^2-\frac{1}{4})}d\theta\right]$$
$$+ O(q^2\log^2 qT),$$

$$(12)\quad U_7 = \mathrm{Re}[B_3 - B_4 + B_5 - B_6 - B_7] + B_8 + O(q(qT)^{\frac{1}{4}} + q^3\log^2(qT)),$$

$$(13)\quad U_8 = B_9 - B_{10} + O(q).$$

ただしここに，$B_1, B_2, \cdots, B_{10}$ は次のように定義される量である。$R_1 = [m^{\frac{1}{2}}/q]$，$J = 0$ (if $n_2 > m_2$) or 1 (otherwise)，
$r = n - m = r_1 q + (n_2 - m_2)$，$\vartheta_1(t) = \frac{1}{2}t\log(qt/2\pi) - \frac{1}{2}t + \frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q} - \frac{\pi}{8}$
とおけば，

$$B_1 = \sum_{m=1}^{L}{}' \sum_{m_1+R_1<n_1<2m_1-1}{}' \frac{\sin(\alpha_m - \alpha_n + 2\pi q n_1^2 \log \frac{n}{m})}{(mn)^{\frac{1}{2}} \log \frac{n}{m}},$$

$$B_2 = \operatorname{Im}\left[\sum_{m=1}^{L}{}' \sum_{n_2=1}^{q}{}' \sum_{J\le r_1\le R_1} (-1)^{r_1} r^{-1} \chi(m)\overline{\chi(n)}\, e^{i\pi(m^2-n^2)/q} \cdot \frac{1+2\pi i r^3}{3m}\right],$$

$$B_3 = \sum_{m_2=1}^{q} \sum_{n_2=1}^{q} \sum_{r_1=J}^{\infty} \frac{2\pi}{C(\chi)} \chi(mn)\left(\frac{T}{2\pi q}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i mn/q} \int_{q^{-\frac{1}{2}}(r+2(q-n_2))}^{\infty} e^{i\pi(\theta^2-\frac{1}{4})}\, d\theta,$$

$$B_4 = \sum_{m=1}^{L} \sum_{n_2=1}^{q} \sum_{r_1>R_1} \frac{2\pi\chi(mn)}{C(\chi)} e^{-2\pi i mn/q} \int_{q^{-\frac{1}{2}}(r+2(q-n_2))}^{\infty} e^{i\pi(\theta^2-\frac{1}{4})}\, d\theta,$$

$$B_5 = \sum_{m=1}^{L} \sum_{n_2=1}^{q} \sum_{J\le r_1\le R_1} \frac{\pi q^{\frac{1}{2}} \chi(mn) r^3 (-1)^{r_1}}{3m\, C(\chi)(r+2(q-n_2))} \exp\left(i\pi\left(\frac{m_2^2+n_2^2}{q} - \frac{1}{4}\right)\right),$$

$$B_6 = \sum_{m=1}^{L} \sum_{n_2=1}^{q} \sum_{J\le r_1\le R_1} \frac{\pi\chi(mn) r^2 (-1)^{r_1}}{m q^{\frac{1}{2}} C(\chi)} \exp\left(i\pi\left(\frac{m_2^2+n_2^2}{q} - \frac{1}{4}\right)\right),$$

$$B_7 = \sum_{m=1}^{L} \sum_{m_1+m<n_1<2m_1-1} \frac{q^{\frac{1}{2}}\chi(mn)\exp(i\pi(2qn_1^2\log(q^2n_1^2/mn) - \frac{1}{4}))}{i\,C(\chi)(mn)^{\frac{1}{2}}\log(q^2n_1^2/mn)},$$

$$B_8 = \sum_{m<n,\ n_1<2m_1-1}{}' \sum{}' \frac{\sin(2\vartheta_1(T) + \alpha_m + \alpha_n - T\log mn)}{(mn)^{\frac{1}{2}}(2\vartheta_1'(T) - \log mn)},$$

$$B_9 = \sum{}'\sum_{n_1\ge 2m_1-1}{}' \frac{\sin(2\vartheta_1(T) + \alpha_m + \alpha_n - T\log mn)}{(mn)^{\frac{1}{2}}(2\vartheta_1'(T) - \log mn)},$$

$$B_{10} = \sum{}'\sum_{n_1\ge 2m_1-1}{}' \frac{\sin\left(2\pi q n_1^2 \log\frac{q^2n_1^2}{mn} + \alpha_m + \alpha_n + \frac{i}{2}\log\frac{C^2(\chi)}{q} - \frac{1}{4}\pi\right)}{(mn)^{\frac{1}{2}}\log\frac{q^2n_1^2}{mn}}$$

§4. f_2^2 と f_1f_2 の積分の計算

まず，Titchmarsh [4] の方法を用いると，

$$(14)\quad \int_1^T f_2(t)^2\,dt$$

$$= T^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{q}\sum_{n=1}^{q}\chi(m)\overline{\chi(n)}\,e^{i\pi(m^2-n^2)/q}\int_0^1\frac{e^{-4\pi i(m-n)u}}{\cos^2(2\pi qu)}\,du\right]$$

$$-T^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Re}\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{q}\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(mn)(-1)^q}{C(\chi)}\,e^{i\pi\left(\frac{m^2+n^2}{q}-\frac{i}{4}\right)}\int_0^1\frac{e^{4\pi i(qu+q-m-n)u}}{\cos^2(2\pi qu)}\,du\right]$$

$$+O(q^2)$$

f_1f_2 の積分に対する計算は相当に複雑であり，$q=1$ の場合とは異なる多くの情況があらわれてくる。まず，

$$G(u)=\sum_{m=1}^{q}\frac{\sin(2\pi qu^2+2\pi qu+\frac{1}{2}q\pi+q^{-1}\pi m^2-4m\pi u+\alpha_m+\delta)}{(-1)^{(q+1)/2}\cos(2\pi qu)},$$

$$F_1(u)=16\pi q^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{L}{}'\sum_{[\frac{n}{q}]<d<[\frac{n}{q}]+[\frac{n^{\frac{1}{4}}}{q}]+1}\frac{(-1)^{d+1}\sqrt{d+u}}{\sqrt{n}}$$

$$\times\cos\left(2\pi q(d+u)^2\log\frac{q(d+u)}{n}-\pi q(d+u)^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right),$$

$$F_2(u)=16\pi q^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{L}{}'\sum_{[\frac{n}{q}]+[\frac{n^{\frac{1}{4}}}{q}]+1\leq d\leq K}\frac{(-1)^{d+1}\sqrt{d+u}}{\sqrt{n}}$$

$$\times\cos\left(2\pi q(d+u)^2\log\frac{q(d+u)}{n}-\pi q(d+u)^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)$$

とすれば，[3] の Lemma 13 と同様に，

$$(15)\quad 2\int_1^T f_1(t)f_2(t)\,dt = \int_0^1 F_1(u)G(u)\,du + \int_0^1 F_2(u)\,G(u)\,du + O(q^{\frac{3}{4}}T^{\frac{1}{4}})$$

第1の積分については，まず $n=(n_1-1)q+n_2$, $d=[\frac{n}{q}]+r$ $=n_1-1+r$ とおくと，[3] の Lemma 14 と同様に，

$$\int_0^1 F_1(u)\,G(u)\,du$$

$$=16\pi\int_0^1 G(u)\sum_{n_1=1}^{K}\sum_{n_2=1}^{q}{}' \sum_{0<r<[n^{\frac{1}{2}}/q]+1}(-1)^{n_1+r}$$

$$\times\cos\left\{\pi q(n_1-1+r+u)^2\left(2\log\frac{q(n_1-1+r+u)}{n}-1\right)+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right\}du$$

$$+8\pi\int_0^1 G(u)\sum_{n_1=1}^{K}\sum_{n_2=1}^{q}{}' \sum_{0<r<[n^{\frac{1}{2}}/q]+1}(-1)^{n_1+r}\cdot\frac{r+u}{n_1-1}$$

$$\times\cos\left\{\pi q(n_1-1+r+u)^2\left(2\log\frac{q(n_1-1+r+u)}{n}-1\right)+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right\}du$$

$$+O(q(qT)^{\frac{1}{8}})$$

$$=A_{11}+A_{12}+O(q(qT)^{\frac{1}{8}}),\qquad \text{とおく。}$$

$A_{12}=O(q^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{4}})$ は容易に出る．A_{11} については，まず $n\leq q$ の範囲を $O(q^{\frac{5}{4}})$ と評価することにより，以下 $n\gg q$ としてよい。

すると，

$$A_{11}=16\pi\sum_{n=1}^{L}{}'\sum_{m=1}^{q}{}'\sum_{0<r<[n^{\frac{1}{4}}/q]+1}(-1)^{r+1}\int_0^1\cos\left(2\pi q(2ru+u^2)-4\pi u n_2+\frac{\pi n_2^2}{q}+\alpha_n\right.$$

$$\left.+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)\cdot\frac{\sin\left(2\pi q u^2+2\pi q u+\frac{q\pi}{2}+\frac{\pi m^2}{q}-4m\pi u+\alpha_m+\delta\right)}{(-1)^{(q+1)/2}\cos(2\pi q u)}du$$

$$+O(q^{\frac{1}{2}}(qT)^{\frac{1}{4}})$$

$= A_{11}' + O(q^{\frac{1}{2}}(qT)^{\frac{1}{4}})$ とおく。

$q \neq 1$ に対しては $G(u) \neq G(1-u)$ なので，A_{11}' の扱いは[3]よりかなり複雑になる。cos と sin の積を積和公式で２つの和に分け，それぞれに[3]，[4]の議論を応用することにより，結局，

(16) $$\int_0^1 F_1(u)G(u)\,du$$

$$= -T^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Re}\left[\sum_{m=1}^{q}\sum_{n=1}^{q}\frac{2\sqrt{2\pi}\,\chi(mn)}{C(\chi)}e^{i\pi\left(\frac{m^2+n^2}{q}-\frac{1}{4}\right)}\int_0^1\frac{e^{4\pi i(qu+q-m-n)u}}{\cos^2(2\pi qu)}\,du\right]$$

$$-T^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Re}\left[\sum_{m=1}^{q}\sum_{n=1}^{q}\frac{\sqrt{2\pi}\,\overline{\chi(m)}\chi(n)}{q^{\frac{1}{2}}}e^{i\pi(n^2-m^2)/q}\int_0^1\frac{e^{4\pi i(n-m)u}+e^{4\pi i(m-n)u}}{\cos^2(2\pi qu)}\,du\right]$$

$$+O(q^2+q(qT)^{\frac{1}{4}}).$$

次に $F_2(u)G(u)$ の積分は，まず部分積分により，

$$\int_0^1 F_2(u)G(u)\,du$$

$$=4\sum_{n=1}^{L}{}' n^{-\frac{1}{2}}\sum_{[\frac{n}{q}]+[\frac{n^2}{q}]+1\le d\le K}(-1)^{d+1}\left\{\frac{\sin\left(2\pi q(d+1)^2\log\frac{q(d+1)}{n}-\pi q(d+1)^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)}{q^{\frac{1}{2}}(d+1)^{\frac{1}{2}}\log\frac{q(d+1)}{n}}G(1)^{-1}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\left(2\pi qd^2\log\frac{qd}{n}-\pi qd^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)G(0)}{\sqrt{qd}\,\log\frac{qd}{n}}\right\}$$

$$-4\sum_{n=1}^{L}{}' n^{-\frac{1}{2}} \sum_{[\frac{n}{q}]+[\frac{n^{\frac{1}{4}}}{q}]+1\leq d\leq K} (-1)^{d+1}\int_0^1 \frac{G'(u)}{q^{\frac{1}{2}}(d+u)^{\frac{1}{2}}\log\frac{q(d+u)}{n}}$$

$$\times \sin\left(2\pi q(d+u)^2\log\frac{q(d+u)}{n}-\pi q(d+u)^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(X)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)du$$

$$+2\sum_{n=1}^{L}{}' n^{-\frac{1}{2}} \sum_{[\frac{n}{q}]+[\frac{n^{\frac{1}{4}}}{q}]+1\leq d\leq K} (-1)^{d+1}\int_0^1 \frac{G(u)}{q^{\frac{1}{2}}(d+u)^{\frac{3}{2}}\log\frac{q(d+u)}{n}}$$

$$\times \sin\left(2\pi q(d+u)^2\log\frac{q(d+u)}{n}-\pi q(d+u)^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(X)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)du$$

$$+4\sum_{n=1}^{L}{}' n^{-\frac{1}{2}} \sum_{[\frac{n}{q}]+[\frac{n^{\frac{1}{4}}}{q}]+1\leq d\leq K} (-1)^{d+1}\int_0^1 \frac{G(u)}{q^{\frac{1}{2}}(d+u)^{\frac{3}{2}}\log^2\left(\frac{q(d+u)}{n}\right)}$$

$$\times \sin\left(2\pi q(d+u)^2\log\frac{q(d+u)}{n}-\pi q(d+u)^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(X)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)du$$

$=A_{13}+A_{14}+A_{15}+A_{16}$ とおく。

これらの量を扱うため，まず [3] の Lemma 15 (i) の一般化として，次の式が成り立つことに注意する。$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対し，

$$(17)\quad \int_0^1 \frac{\sin\left(2\pi q(d+u)^2\log\frac{q(d+u)}{n}-\pi q(d+u)^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(X)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)G'(u)}{(d+u)^{\alpha}\left(\log\frac{q(d+u)}{n}\right)^{\beta}}du$$

$$=-\frac{\cos\left(2\pi q(d+1)^2\log\frac{q(d+1)}{n}-\pi q(d+1)^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(X)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)G(1)}{4\pi q(d+1)^{\alpha+1}\left(\log\frac{q(d+1)}{n}\right)^{\beta+1}}$$

$$+\frac{\cos\left(2\pi qd^2\log\frac{qd}{n}-\pi qd^2+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(X)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)G(0)}{4\pi qd^{\alpha+1}\left(\log\frac{qd}{n}\right)^{\beta+1}}+O\left(q^{-2}(d+u)^{-\alpha-2}\left(\log\frac{q(d+u)}{n}\right)^{-\beta-2}\right)$$

これを用いると，次の評価は容易にえられる：

$$A_{16} = O((qT)^{\frac{1}{4}}), \quad A_{15} = O(1).$$

また，$G(u)$ の定義から，$G'(1+u) = 4\pi q G(u) + G'(u)$. とくに，

(18) $\quad G'(1) = 4\pi q G(0) + G'(0)$

(17) と (18) を用いて，A_{14} は次のように変形される：

$$A_{14} = -\sum_{n=1}^{L}{}' n^{-\frac{1}{2}} \sum_{[\frac{n}{q}]+[\frac{n^{\frac{1}{2}}}{q}]+1 \le d \le K} (-1)^{d+1} \frac{G'(0)}{\pi q^{\frac{3}{2}}}$$

$$\times \left\{ \frac{\cos\left(2\pi q d^2 \log\frac{qd}{n} - \pi q d^2 + \alpha_n + \frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q} - \frac{\pi}{8}\right)}{d^{\frac{3}{2}}\left(\log\frac{qd}{n}\right)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\cos\left(2\pi q(d+1)^2 \log\frac{q(d+1)}{n} - \pi q(d+1)^2 + \alpha_n + \frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q} - \frac{\pi}{8}\right)}{(d+1)^{\frac{3}{2}}\left(\log\frac{q(d+1)}{n}\right)^2} \right\}$$

$$+ 4\sum_{n=1}^{L}{}' n^{-\frac{1}{2}} \sum_{d} (-1)^{d+1} q^{-\frac{1}{2}} G(0)$$

$$\times \frac{\cos\left(2\pi q(d+1)^2 \log\frac{q(d+1)}{n} - \pi q(d+1)^2 + \alpha_n + \frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q} - \frac{\pi}{8}\right)}{(d+1)^{\frac{3}{2}}\left(\log\frac{q(d+1)}{n}\right)^2}$$

$$+ O((qT)^{\frac{1}{4}}).$$

これを $D_3 - D_4 + O((qT)^{\frac{1}{4}})$ とおこう。(18) が Riemann の ζ-函数の場合 ([3], Lemma 11 (iii)) とは異なる形をしているので，これらの和には Balasubramanian のアイデアは使えない。しかし q が奇数の時には，幸いに Titchmarsh [4] の 199～200 ページの方法を適用することができる。D_3, D_4 をそれぞれその方法で評

価すれば，

$$A_{14}=O\left(q^2(qT)^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{2}}\right)$$

をうる。A_{13} は，$G(0)$ の値を代入すれば，

$$A_{13}=B_{13}+B_{14}+B_{15}+O(q\log qT)$$

となる。ただしここで，B_{13}, B_{14}, B_{15} は，$R=[n^{\frac{1}{4}}/q]$ とかけば，

$$B_{13}=8\sum_{n=1}^{L}{}'\sum_{m=1}^{q}{}'\sum_{n_1+1+R\leq d\leq 2n_1-2}\frac{\sin\left(\frac{q\pi}{2}+\frac{\pi m^2}{q}+\alpha_m+\delta\right)\sin\left(2\pi qd^2\log\frac{qd}{n}+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)}{(-1)^{(q+1)/2}(nqd)^{\frac{1}{2}}\log\frac{qd}{n}},$$

$$B_{14}=8\sum_{n=1}^{L}{}'\sum_{m=1}^{q}{}'\sum_{2n_1-2<d\leq K}\frac{\sin\left(\frac{q\pi}{2}+\frac{\pi m^2}{q}+\alpha_m+\delta\right)\sin\left(2\pi qd^2\log\frac{qd}{n}+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)}{(-1)^{(q+1)/2}(nqd)^{\frac{1}{2}}\log\frac{qd}{n}},$$

$$B_{15}=4\sum_{n=1}^{L}{}'\sum_{m=1}^{q}{}'\frac{\sin\left(\frac{q\pi}{2}+\frac{\pi m^2}{q}+\alpha_m+\delta\right)\sin\left(2\pi q(n_1+R)^2\log\frac{q(n_1+R)}{n}+\alpha_n+\frac{i}{4}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{8}\right)}{(-1)^{(q+1)/2}(nq(n_1+R))^{\frac{1}{2}}\log\frac{q(n_1+R)}{n}}$$

として定義される。

以上をまとめて，

$$(19)\quad \int_0^1 F_2(u)G(u)du=B_{13}+B_{14}+B_{15}+O\left(q^2(qT)^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{2}}\log qT\right)$$

となる。(15)，(16)，(19) により f_1f_2 の積分がひとまず計算された。

今までの§でえられた結果と，Cauchy-Schwarz の不等式により，(3) の他の積分の評価は簡単にえられる。即ち，

$$\int_1^T f_3(t)^2dt=O(1),\quad 2\int_1^T f_2(t)f_3(t)dt=O(qT^{\frac{1}{4}}),$$

$$2\int_1^T f_1(t)f_3(t)\,dt = O\left(T^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} qT + q^{\frac{9}{8}}\right)$$

これらの評価と，(3), (4), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (19) から，

$$(20)\quad \int_1^T \left|L\left(\tfrac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^2 dt$$

$$= \frac{\varphi(q)}{q} T\log T - \frac{\varphi(q)}{q}\left(1+\log 2\pi - 2\gamma - \log q - 2\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\right)T$$

$$+ BT^{\frac{1}{2}} + 4U_2 + 4U_3 - 4B_1 - 4B_2 - 4U_5 + 4\,\mathrm{Re}[-B_4+B_5-B_6-B_7]$$

$$+ 4B_8 + 4B_9 - 4B_{10} + B_{13} + B_{14} + B_{15}$$

$$+ O\left(T^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{2}} qT + q^2(qT)^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{5}{2}}(qT)^{\frac{1}{8}} + q^{\frac{9}{2}}\log^2 qT\right),$$

ただし B は，(9), (11), (14), (16), (12) にあらわれる $T^{\frac{1}{2}}$ の係数の和である。

§5 式(20)の簡易化

この節では次の補題を示す．

補題 1

(i) $-4B_1 - 4\,\mathrm{Re}\,B_7 + B_{13} = O\left(q(qT)^{\frac{1}{4}}\log qT\right)$

(ii) $-4U_5 - 4B_{10} + B_{14} = O\left(q(qT)^{\frac{1}{4}}\log qT\right)$

(iii) $-4B_2 + 4\,\mathrm{Re}[-B_4+B_5-B_6] + B_{15} = O\left(q(qT)^{\frac{1}{4}}\right)$

(iv) $$B = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{q^{\frac{3}{2}}}\left(\sum_{n=1}^{q-1}{}' n\right).$$

この補題は[3], Lemma 2c に対応するものだが，証明ははるかに繁雑になる。とくに，q が奇数であるということがここで本質的にきいてくる。q が奇数という条件は，一般に次のような情況で必要になる——[3] ではしばしば，$\sum_r (-1)^r A_r$ という型の和が現われ，Balasubramanian はこれを評価するため，先ず $A_{r+1}-A_r$ を計算し，その和をとるという技巧を使う。つまり，隣接2項の符号が反対であることが重要なのである。ところが，[3] の議論を一般の q に拡張すると，対応する和は $\sum_r (-1)^{qr} B_r$ の型となり，q が偶数のときには，もはや [3] のアイデアは使えない——しかし偶数の q に対して，Pólya-Vinogradov の式を用いると，この困難を切りぬけられる場合がある。実は，Pólya-Vinogradov を何度か用いることにより，(20) 式は偶数の q に対しても殆んどそのままの形で成り立つことが証明できる。だが補題1に至って，そうした抜け道はついになくなってしまうのである。少くとも筆者は，偶数の q に対して補題1を示すことはできなかった。

さて，まず(i)であるが，B_{13} の $\sin$ の積を積和公式で分解し，次に分母の $(nqd)^{\frac{1}{2}}\log\frac{qd}{n}$ を $n^{\frac{1}{2}}(q(d+1)+m)^{\frac{1}{2}}\log\frac{qd}{n}$ でおきかえれば，多少の notation の変更のあと，

$4B_1+4\,\mathrm{Re}\,B_7-B_{13}$

$$=4\sum_{m=1}^{L}\sum_{n}\mathrm{Im}\left[\frac{\chi(m)\overline{\chi(n)}}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{e^{2\pi i q n_1^2\log\frac{n}{m}}}{\log\frac{n}{m}}+\frac{e^{\pi i\left(2qn_1^2\log\frac{qn_1}{m}-\frac{n_2^2}{q}\right)}}{\log\frac{qn_1}{m}}\right)\right]$$

$$+4\sum_{m=1}^{L}\sum_{n}\mathrm{Im}\left[\frac{\chi(mn)q^{\frac{1}{2}}}{(mn)^{\frac{1}{2}}C(\chi)}\left(\frac{e^{i\pi\left(2qn_1^2\log\frac{q^2n_1^2}{mn}-\frac{1}{4}\right)}}{\log\frac{q^2n_1^2}{mn}}+\frac{e^{i\pi\left(2qn_1^2\log\frac{qn_1}{m}+\frac{n_2^2}{q}-\frac{1}{4}\right)}}{\log\frac{qn_1}{m}}\right)\right]$$

$$+O(q\log^2 qT)$$

ただし n は，$\left[\frac{m}{q}\right]+\left[\frac{m^{\frac{1}{4}}}{q}\right]+1<n_1<2\left[\frac{m}{q}\right]+1$ なる範囲を動くのである。これを $E_1+E_2+O(q\log^2 qT)$ とおくと，

$$e^{2\pi i q n_1^2\log\frac{n}{m}}=-e^{\pi i\left(2qn_1^2\log\frac{qn_1}{m}-\frac{n_2^2}{q}\right)}\left(1+O\left(\frac{q}{n_1}\right)\right),$$

$$\frac{1}{\log\frac{qn_1}{m}}-\frac{1}{\log\frac{n}{m}}=O\left(\frac{mq}{r^2}\right)$$

を用いて，

$$E_1\ll\sum_{m=1}^{L}\sum_{m^{\frac{1}{4}}<r<m}\frac{1}{m}\cdot\frac{mq}{r^2}$$

$$=\sum_{m=1}^{L}\left(\sum_{m^{\frac{1}{2}}<r<m}+\sum_{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}}<r\le m^{\frac{1}{2}}}+\sum_{\frac{1}{4}m^{\frac{1}{2}}<r\le\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}}}+\cdots\right)$$

$$\ll\sum_{m=1}^{L}\left(qm^{-\frac{1}{2}}+qm^{-\frac{1}{2}}\log m\right)\ll q(qT)^{\frac{1}{4}}\log qT$$

E_2 も同様に評価できるから，(i) が証明される。(ii) も同様である．(iii) については，まず多少の計算の末，

$$B_{15}=2\sum_{m=1}^{L}{}'\sum_{n_2=1}^{q}{}'\frac{(-1)^R}{qR}\sin\left(\alpha_m+\alpha_n+\frac{\pi m_2^2}{q}+\frac{\pi n_2^2}{q}+\frac{i}{2}\log\frac{C^2(\chi)}{q}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+2\sum_{m=1}^{L}{}'\sum_{n_2=1}^{q}{}'\frac{(-1)^R}{qR}\sin\left(\alpha_m-\alpha_n+\frac{\pi m_2^2}{q}-\frac{\pi n_2^2}{q}\right)+O(q(qT)^{\frac{1}{4}})$$

$$=E_3+E_4+O(q(qT)^{\frac{1}{4}})$$ とする。

次に B_4 は，部分積分により，

$$B_4=-\sum_{m=1}^{L}\sum_{n_2=1}^{q}\sum_{r_1>[m^{\frac{3}{2}}/q]}\frac{(-1)^{r_1}\chi(mn)q^{\frac{1}{2}}}{iC(\chi)(r+2(q-n_2))}e^{i\pi\left(\frac{m_2^2+n_2^2}{q}-\frac{1}{4}\right)}+O(q(qT)^{\frac{1}{4}})$$

となるが，このうち r_1 についての和をまず考える。$\forall j\in\mathbb{N}$ に対し，

$$\frac{1}{(r_1+j)q-(m_2+n_2)}-\frac{1}{(r_1+j+1)q-(m_2+n_2)}=\frac{1}{\{(r_1+j)q-(m_2+n_2)\}^2}+O\left(\frac{1}{r_1^3q^2}\right)$$

であることを用いると，

$$\sum_{r_1}(-1)^{r_1}\cdot\frac{1}{r+2(q-n_2)}=\frac{(-1)^{R+1}}{2qR}+O\left(\frac{1}{qR^2}\right)$$

$$\therefore\quad \mathrm{Re}\,B_4=\frac{1}{4}E_3+O(q(qT)^{\frac{1}{4}}).$$

また B_2 は，

$$B_2=\mathrm{Im}\left[\sum_{m}\sum_{n_2}\sum_{r_1}\frac{(-1)^{r_1}\chi(m)\overline{\chi(n)}}{r}e^{i\pi(m^2-n^2)/q}\right]$$

$$+\mathrm{Im}\left[\sum_{m}\sum_{n_2}\sum_{r_1}\frac{(-1)^{r_1}\chi(m)\overline{\chi(n)}}{r}e^{i\pi(m^2-n^2)/q}\cdot\frac{2\pi i r^3}{3m}\right]$$

$$=E_5+E_6$$

となるが，E_5 は[　]の中が実数だから 0 である。同様に $E_4=0$.

また B_4 を扱ったのと似た方法で，$E_6, B_5, B_6=O(q(qT)^{\frac{1}{4}})$ を

得るから，(iii)の証明がおわる。(iv)については，Titchmarsh[4]の最後のページにでている函数論的証明を一般化すればよい。

§6. Kloosterman の和 Heath-Brown の補題

(20)と補題1により，定理の証明のために評価すべき残りの量は，V_2, V_3, B_8, B_9 のみとなった。そのために，まず次の和を考える：

$$X=\sum_{k<(M/H)^{1+\delta}}\ \sum_{M<m\leq 2M}\frac{\overline{\chi(m)}\,\chi(m-k)\exp\left(it\log\frac{m-k}{m}\right)}{(m(m-k))^{\frac{1}{2}}\log\frac{m-k}{m}}.$$

ここに δ は勝手な正数である。この X に，Heath-Brown [7] の pp. 157−160 および p. 167 の方法を用いると，

$$X\ll\sum_{k<(M/H)^{1+\delta}}k^{-1}\left\{q^{-1}T^{-\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{3}{2}}\sum_{|n|<qTkM^{-2}}|S(q;\chi,-k,n)|\right.\tag{21}$$
$$\left.+B^{-1}\log qT\sum_{0<|n|\leq 2B}|S(q;\chi,-k,n)|\right\}.$$

ただし $\min(q,\,qTkM^{-2})\leq B\leq qTkM^{-2}+q$ であり，また S は

$$S=S(q;\chi,-k,n)=\sum_{m=0}^{q-1}\chi(m-k)\overline{\chi(m)}\,e^{2\pi i mn/q}$$

として定義される量である。

S については，Heath-Brown [7] が，Kloosterman の和に関する Weil [5] の評価を用いて精密な結果をえている．それによ

ると，まずqが素数巾$q=p^r$の場合に帰着できることがわかる（[7], Lemma 5)。そして$q=p^r$の場合については：

補題 2.（[7], Lemma 6, 7, 8）

$p^r \mid k,\ p^r \mid n \Rightarrow |S| \le p^r$

$p^r \mid k,\ p^{r-1} \parallel n \Rightarrow |S| \le p^{r-1}$

$p^r \mid k,\ p^{r-1} \nmid n \Rightarrow S=0$

$p^{r-1} \parallel k,\ p^r \mid n \Rightarrow |S| \le p^{r-1}$

$p^{r-1} \parallel k,\ p^{r-1} \nmid n \Rightarrow S=0$

$p^s \parallel k,\ p^s \parallel n\ (1 \le s \le r-1) \Rightarrow |S| \le 2p^{(r+s)/2}$

$p^s \parallel k,\ p^s \nparallel n\ (1 \le s \le r-2) \Rightarrow S=0$

$r \ge 2,\ p \nmid k,\ p \mid n \Rightarrow S=0$

$r \ge 2,\ p \nmid k,\ p \nmid n \Rightarrow |S| \le (r+1)p^{\frac{r}{2}}(p^s, 4c+nl)^{\frac{1}{2}}$

ただし $s=[\frac{r}{2}]$, $(c,p)=1$, $c=c(p,x,r)$

$r=1,\ p \nmid k,\ p \mid n \Rightarrow S=-1$

$r=1,\ p \nmid k,\ p \nmid n \Rightarrow |S| \le 2p^{\frac{1}{2}}$.

この補題を(21)に適用すると，勝手な正数$\varepsilon>0$に対して，$H \gg (qT)^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ならば$X \ll H$であることがわかる。従って，Balasubramanian [3] の "multiple integration process" により，

$$v_2 + v_3 = O((qT)^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$$

であることがわかる。実際，Xは[3], p.565 の(＊)に相当して

いるわけである。最後に，[3], p. 568 の(**)に相当する式を考えることにより，

$$B_8 + B_9 = O((qT)^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$$

がわかり，これらの評価と補題1を(20)に代入すると，定理の結論がえられる。

§7. 結語と注意

Riemann の ζ-函数 ζ(s) に対する有名な Lindelöf 予想は，

$$\forall\varepsilon>0,\quad \zeta(\tfrac{1}{2}+it)=O(t^{\varepsilon})$$

というものである。これは極めて困難な予想で，現在この方向で我々のもっている最高の結果は，Kolesnik [2] による

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it)=O(t^{\frac{35}{216}+\varepsilon})$$

というものにすぎない。Dirichlet の L-函数に対しては，

$$\forall\varepsilon>0,\quad L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)=O((qt)^{\varepsilon})$$

がすべての q について一様に成り立つであろう，といういわゆる "qt-analogue conjecture" があるが，すべての q に対して一様な評価としては，

$$L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)=O((qt)^{\frac{3}{16}+\varepsilon})$$

という Heath-Brown [8] の結果が最高である。次の目標である，

$$L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)=O((qt)^{\frac{1}{6}+\varepsilon}) \tag{22}$$

($\frac{3}{16}=\frac{9}{48}$, $\frac{1}{6}=\frac{8}{48}$) に対しては，現在のところすべての q に対

して一様に成り立つという証明はえられていない。この方向での最高の結果は，[9]，[10]をへて Heath-Brown [7] によって証明された，"A が自然数の無限集合で，A の元からなる任意の増大の無限列 $q_1, q_2, \cdots$ に対し，因数 $f_j \mid q_j$ $(j=1,2,\cdots)$ があって，$(\log f_j)/(\log q_j) \to \frac{1}{3}$ $(j\to\infty)$ が成り立つならば，この A に属する q に対して一様に (22) が成り立つ" というものであろう。本稿の"系"は，(22) に対する別方向からの試みとみなすこともできるであろう。

現在のところ，$\theta < \frac{1}{6}$ に対して，

$$L(\tfrac{1}{2}+it, \chi) = O((qt)^{\theta+\varepsilon})$$

なる形の結果は，いかなる条件の下でも考えられてはいないようである。(もちろん，Riemann 予想を仮定したりすれば $\theta=0$ とできる) 最近，Kuznecov [11] および Deshouillers - Iwaniec [12] は，保型函数論の立場から，Kloosterman sum のさらに和をとった型の量について，極めて鋭い評価をえている。彼らは，かつて Weil [5] の評価を利用していた問題にこの新成果を適用して，多くの改良に成功している。それは，具体的な問題の多くが，Kloosterman sum の和を扱うことになるためであるが，§6 に引用した Heath-Brown の結果は，実は和をとらない，Kloosterman sum そのものによってえられる評価である。従って不幸なことに，補題 2 を [11][12] の方法で改良することは難し

いようである。しかし，(21) を見るとわかるように，我々の問題に必要なのは S の和であり，単独の S そのものではない。ここに Kuznecov らの理論を適用しうる可能性が存在し，そしてそれは，$\mathfrak{V}_2+\mathfrak{V}_3$, B_8+B_9 の評価を改良するかもしれない。もしそうなら，指数 $\frac{1}{6}$ より小さい世界に対する approach が，可能となるのかもしれない。

最後になったが，本稿の仕事に対してたえず激励と多くの有益な助言を与えられた藤井昭雄先生に，深く謝意を表しておきたい。本稿のテーマはそもそも，藤井先生の suggestion によるものである。

文献

[1] Matsumoto, K.; The mean square of Dirichlet L-functions, to appear in Proc. Japan Acad.

[2] Kolesnik, G.; On the order of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ and $\Delta(R)$, Pacific J. Math. 98 (1982) 107-122

[3] Balasubramanian, R.; An improvement on a theorem of Titchmarsh on the mean square of $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$, Proc. London Math. Soc. (3) 36 (1978) 540-576.

[4] Titchmarsh, E.C.; On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (V), Quart. J. Math. Oxford 5 (1934) 195-210.

[5] Weil, A.; On some exponential sums, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 34 (1948) 204-207.

[6] Siegel, C. L.; Contribution to the theory of the Dirichlet L-series and Epstein zeta-functions, Ann. of Math. 44 (1943) 143-172

[7] Heath-Brown, D. R.; Hybrid bounds for Dirichlet L-functions, Invent. Math. 47 (1978) 149-170.

[8] Heath-Brown, D. R.; ——— ——— II, Quart. J. Math. Oxford (2) 31 (1980) 157-167

[9] Barban, M. B., Ju. V Linnik and N. G. Čudakov; On primes in a progression with a prime-power difference, Acta Arith. 9 (1964) 375-390

[10] Fujii, A., P. X. Gallagher and H. L. Montgomery; Some hybrid bounds for character sums and Dirichlet L-series, Topics in Number Theory, Colloq. János Bolyai Math. Soc. Debrecen (1974) 41-57

[11] Kuznecov, N. V.; Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums, Mat. Sb. 111 (153) (1980) 334-383 = Math. USSR Sb. 39 (1981) 299-342

[12] Deshouillers, J. M. and H. Iwaniec; Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms, to appear in Invent. Math.