数理解析研究所講究録
第 497 巻 1983 年 1-72

概均質ベクトル空間の ゼータ函数について.

新谷卓郎 述
神保道夫 記

目次.

§1 概均質ベクトル空間

始めに、概均質ベクトル空間の定義を与えて、基本的な諸事実について述べることにしよう。この講義では、限られた時間内で、概均質ベクトル空間とその上のゼータ函数についてのあらましを解説することを目的とするので、説明の簡単のため時に不必要に強い仮定を設けたりすることもあることをお断わりしておく。議論の詳細については、例えば「数学の歩み」の記事（佐藤－新谷[1]）を御覧戴きたい。

今 G を複素線型代数群，ρ を n 次元複素ベクトル空間 V における G の有理線型表現とする。このとき，

定義 1.1

三つ組 (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間であるとは，V の中にある代数的真部分

集合Sが存在して，$V-S$がGの単一軌道になっている事を言う。即ち$V-S=\rho(G)\cdot x$（$\forall x\in V-S$）。以下SをVの特異点集合と呼ぶ。

複素数体$\mathbb{C}$の部分体kに対し，(G,ρ,V)がk上定義されているとは，G及びVがk構造を持ち，かつ表現ρもk上定義されていることを意味する。その時Vのk-有理点をV_kと書く。記号G_k，S_kを同様の意味に用いる。

実例を述べよう。

例1．（多元環）

今kを$\mathbb{C}$の部分体，Aをk-多元環，$A^\times$をAの乗法的可逆元全体とし、ρを乗法による自然な表現とする。即ち$V=A$，$G=A^\times$，$\rho(x)a=x\cdot a$（$x\in G,\ a\in V$）とする。このとき(G,ρ,V)は$S=A-A^\times$を特異点集合とするk上定義された概均質ベクトル空間となっている。

特に、A が n 次元複素全行列環 $M(n,\mathbb{C})$ である場合には、$G=A^\times=GL(n,\mathbb{C})$、また、$S=\{x\in M(n,\mathbb{C})\,;\,\det x=0\}$ となる。

例2.（二次型式）

今 P を n 次元複素ベクトル空間 V 上の非退化な二次型式として、

$$G=GO(V,P)=\{g\in GL(V)\,;\,P(gx)=\chi(g)P(x)\ \text{for}\ {}^\exists\chi(g)\in\mathbb{C}\}$$

とおく。即ち G は P に関する相似変換群である。更に ρ として自然な表現 $\rho(g)\cdot x=g\cdot x$ をとる。すると (G,ρ,V) は概均質ベクトル空間となり、特異点集合は P の零点、$S=\{x\in V\,;\,P(x)=0\}$ で与えられる。

もし P が実数係数の二次型式ならば、(G,ρ,V) は P の符号によって決定される自然な $\mathbb{R}$-構造を持つ。実二次型式 P の符号が (p,q) ならば、適当な座標系の下で $P(x)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$ と表わされるが、この時 $G_\mathbb{R}$ は

$$G_\mathbb{R}=\left\{g\in GL(n,\mathbb{R})\,;\,{}^tg\cdot\begin{pmatrix}I_p&\\&-I_q\end{pmatrix}\cdot g=\chi(g)\begin{pmatrix}I_p&\\&-I_q\end{pmatrix}\right\}$$

と書かれる。但し I_p は p 行 p 列の単位行列を表わす。

例3.（対称行列空間）

今 $G=GL(n)$、$V=\{x\in M(n,\mathbb{C})\,;\,{}^tx=x\}$ として、表現 ρ を $\rho(g)\cdot x=g\cdot x\cdot {}^tg$（$g\in G,\ x\in V$）によって定める。任意の非退化対称行列は $g\cdot {}^tg$（$g\in G$）の形に書くことができるから G は V に概均質に作用しており、その特異点集合は $S=\{x\in V\,;\,\det x=0\}$ となる。

定義1.2

概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) に於いて V 上の 0 でない有理式 R は、等式

$$R(\rho(g)\cdot x)=\xi(g)\cdot R(x)$$

$$(\forall g\in G,\ \forall x\in V\,;\ \xi \text{は} G \text{の有理指標})$$

を満足するとき、指標 ξ に対応する相対不変式と呼ばれる。

さて、以下の議論を通じて、次の2つの仮定を設ける事にする。

仮定 1.

特異点集合 S は既約超曲面とする。

以下 S の定義多項式を $P(x)$ と書く。即ち

$S = \{ x \in V ; P(x) = 0 \}$。

仮定 2.

群 G は reductive であるとする。

さて、定義と仮定から直ちに従う次の事実に注意しよう。

命題 1.3

今 (G, ρ, V) を上記仮定 1), 2) を満たす概均質ベクトル空間とする。

この時特異点集合の定義多項式 P は斉次で、かつ (G, ρ, V) の相対不変式である。

逆に (G, ρ, V) の任意の相対不変式は、定数因子を除いて P の整数巾と一致する。

証明.

仮定により S は G の作用で不変であるから、既約多項式 $P(\rho(g) \cdot x)$ の零点集合は S と一致する。従って各 $g \in G$ に対して、

定数 $\chi(g)\in\mathbb{C}$ が存在して $P(\rho(g)\cdot x)=\chi(g)\cdot P(x)$ が成立つ。

次に R を任意の相対不変式として、R の素因子達の零点全体を S' としよう。すると R の相対不変性から、S' も G-不変な代数的集合である。もし $x\in S'-S\cap S'$ が存在すれば、$V-S=\rho(G)\cdot x\subset S'$ となって $R\neq 0$ なる仮定と矛盾が生じる。従って $S'\subset S$。故に R のどの素因子も定数倍を除いて P と一致し、従って R は P の整数巾の定数倍となる。

また、$t\in\mathbb{C}^{\times}$ に対し $P_t(x)=P(t\cdot x)$ とおけば容易に確かめられる如く P_t は P と同じ次数の (G,ρ,V) の相対不変式である。従って適当な定数 c_t に対して $P_t(x)=c_t\cdot P(x)$ となる。これは P が斉次多項式であることを示している。

以下では、既約多項式 P を、(G,ρ,V) の基本相対不変式と呼ぶことにする。また、相対不変式としての P に対応する G の指標を χ,

7

Pの次数をdと書くことにする。

さて，V^*をVの双対空間，ρ^*をGのV^*におけるρに反傾な表現とする。この時，群Gはreductiveであると仮定したので，(G, ρ^*, V^*)も再び概均質ベクトル空間となる。実質的に(G, ρ, V)とは同じ物であると思っても良い。以下S^*で(G, ρ^*, V^*)の特異点集合を，$Q(x^*)$でその基本相対不変式を示すことにする。即ち，$S^* = \{x^* \in V^* ; Q(x^*) = 0\}$。この時 $\deg Q = d$，又$Q(\rho^*(g)x^*) = \chi(g)^{-1}Q(x^*)$であることは容易に導かれる。

例1.（全行列空間）

$G = GL(n)$, $V = M(n, \mathbb{C})$, $S = \{x \in V ; \det x = 0\}$とする。この時基本相対不変式，対応する指標は，各々$P(x) = \det x$，$\chi(g) = \det g$で，内積$\langle x, y \rangle = \mathrm{tr}\, x\, {}^t y$によって$V^*$と$V$とを同一視すれば$S^* = S$となり，$Q = P$として良い。

例2.（二次型式）

$G = GO(V, P) = \{g \in GL(V) ; P(g \cdot x) = \chi(g) P(x)\}$。

もしVの次元が3以上ならば、非退化二次型式P自身が基本相対不変式であり、上のχが対応する指標である。

座標によってVを$\mathbb{C}^n$と、内積$\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}\, {}^t x \cdot y$によって$V^*$と$V$とを同一視する。このとき$S^*$は$S^* = \{x^* \in V^* ;\ Q(x^*) = 0\}$で与えられる。但し$P(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$，$(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$とする時、$Q(x^*) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$。

例3.（対称行列空間）

$G = GL(n)$，$V = \{x \in M(n, \mathbb{C}) ;\ {}^t x = x\}$，$\rho(g) x = g x {}^t g$。特異点集合は$S = \{x \in V ;\ \det x = 0\}$だから、$P(x) = \det x$，$\chi(g) = (\det g)^2$である。内積$\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}\, x \cdot y$によって$V^*$と$V$とを同一視すれば、$S^* = S$、$Q = P$となる。

次に，上の例2に於ては Laplacian $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$に相当する作用素を、我々の仮定を満たす概均質ベクトル空間に導入しよう。即ち，V上の定数係数微分作用素$Q(\mathrm{grad})$を，

$$Q(\mathrm{grad})\, e^{\langle x, x^* \rangle} = Q(x^*)\, e^{\langle x, x^* \rangle}$$

を満たすものとして定義する。座標系$(x_1,\cdots x_n)$に於ては、それは$Q(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial}{\partial x_n})$と書かれる。

補題 1.4

今(G,ρ,V)を概均質ベクトル空間，Pをその基本相対不変式とする。このとき或る多項式$b(s)$が存在して、

$$Q(\mathrm{grad})\,P(x)^s = b(s)\,P(x)^{s-1} \qquad (s=1,2,3,\cdots)$$

が成立つ。

証明

左辺を$R(x)$とおけば、これはV上の多項式であって等式$R(\rho(g)\cdot x)=\chi(g)^{s-1}R(x)$ $({}^\forall g\in G)$を満足する。従って命題1.2により、$R(x)=b(s)\cdot P(x)^{s-1}$なる$s$の函数$b(s)$が存在する。この時$b(s)$が$s$の多項式となる事は微分の実行により明らか。

補題の$b(s)$を、b-函数と呼ぶことにする。実例でb-函数を計算してみよう。

例 1.（全行列空間）

$G=GL(n)$, $V=M(n,\mathbb{C})$, $P(x)=Q(x)=\det x$。

行列xを$(x_{ij})_{1\le i,j\le n}$と表わせば

$$Q(\mathrm{grad}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{n1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{nn}} \end{vmatrix}$$

である。ここで、Capelli の等式

$$(\det x)\cdot Q(\mathrm{grad}) = \begin{vmatrix} D_{nn}+(n-1) & D_{n\,n-1} & \cdots & D_{n,1} \\ D_{n-1,n} & D_{n-1,n-1}+(n-2) & \cdots & D_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{1,n} & D_{1,n-1} & \cdots & D_{1,1} \end{vmatrix}$$

が成立する。

但し $D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\frac{\partial}{\partial x_{jk}}$ で、右辺は

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\cdot D_{\sigma(n)n}\, D_{\sigma(n-1)\,n-1}\cdots(D_{ii}+i-1)\cdots D_{\sigma(1)1}$$

を意味する。（Weyl [1], pp. 39 ~ 42 を参照のこと。各 D_{ij} は互いに非可換であるからその"行列式"は意味付けを要する。）

$$D_{ij}\,(\det x)^s = \begin{cases} 0 & (i\neq j) \\ s\cdot(\det x)^s & (i=j) \end{cases}$$

に注意すれば

$$Q(\mathrm{grad})(\det x)^s = b(s)\cdot(\det x)^{s-1}$$

$$b(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1)$$

を得る。

例 2.（二次型式）

$$G = GO(V,P),\quad P(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,\quad Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j.$$

但し $a_{ij}=a_{ji}$, $(b_{ij})=(a_{ij})^{-1}$。

この時 $Q(\mathrm{grad})=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ である。特に、$P(x)=x_1^2+\cdots+x_n^2$ の時 $Q(\mathrm{grad})$ は通常の Laplacian になる。この例では $Q(\mathrm{grad})P(x)^s=4s(s+\frac{n}{2}-1)P(x)^{s-1}$ が直接計算できるから、$b(s)=4s(s+\frac{n}{2}-1)$。

例 3.（対称行列空間）

$G=GL(n)$, $V=\{x\in M(n,\mathbb{C})\,;\,{}^t x=x\}$。

$P(x)=Q(x)=\det x$。

我々は内積 $\langle x,y\rangle=\mathrm{tr}\,x\cdot y$ によって V と V^* とを同一視しているから、

$$Q(\mathrm{grad})=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{11}} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{1n}} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{12}} & \frac{\partial}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{1n}} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{2n}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{nn}} \end{vmatrix}$$

である。この時 $b(s)=s(s+\frac{1}{2})\cdots(s+\frac{n-1}{2})$。これは Capelli の等式と類似の公式を用いても証明できるが、ここでは別の方法を紹介しよう。それは Siegel が利用した次の積分を用いる:

$$(\#)\quad \int_{T>0} (\det T)^{s-\frac{n+1}{2}} e^{-\pi \mathrm{tr}(T\cdot X)}\,dT$$

$$= \pi^{-sn+\frac{n(n-1)}{2}} \Gamma(s-\tfrac{n-1}{2})\Gamma(s-\tfrac{n-2}{2})\cdots\Gamma(s)\,(\det X)^{-s}$$

ここに、積分は正定値実対称行列全体のなす $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 内の領域にわたり、$dT=\prod_{1\le i\le j\le n} dt_{ij}$ はその上のユークリッド測度、X は $\mathrm{Re}\,X$ が正定値である対称行列とし、又 $\mathrm{Re}\,s$ は十分大とする。すると

$$\int_{T>0} \{Q(\mathrm{grad})(\det T)^s\}^{-\frac{n+1}{2}} e^{-\pi\,\mathrm{tr}(T\cdot X)}\,dT$$

$$= b(s-\tfrac{n+1}{2})\, \pi^{-(s-1)n+\frac{n(n-1)}{2}} \Gamma(s-1-\tfrac{n-1}{2})\Gamma(s-1-\tfrac{n-2}{2})\cdots\Gamma(s-1)\,(\det X)^{-(s-1)}$$

左辺に部分積分を行なった後再び(#)を適用すれば,

$$(\text{左辺}) = \pi^{n}\pi^{-ns+\frac{n(n-1)}{2}}\Gamma(s-\tfrac{n-1}{2})\Gamma(s-\tfrac{n-2}{2})\cdots\Gamma(s)\,(\det X)^{-s}$$

を得る。よってガンマ函数の函数等式により、$b(s)$ が計算される。

命題 1.5

(G, ρ, V) を概均質ベクトル空間とし、その基本相対不変式 P の次数を $d=\deg P$ とする。この時

(i) $b(s)$ は s の d 次多項式である。

(ii) d は $2n$ の約数であって、$\chi(g)^{\frac{2n}{d}} = (\det\rho(g))^{2}$。

(iii) $b(s) = (-1)^d\, b(1-\frac{n}{d}-s)$

証明.

(i) 複素線型代数群 G が reductive ならば、その極大コンパクト群 K の複素化に一致することが知られている（Weyl のユニタリ制限）。V の適当な座標系をとれば、$\rho(K) \subset U(n)$（ユニタリ群）となり、内積 $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ による V^* と V との同一視を行なう時 $Q(x) = \bar{P}(x) = \overline{P(\bar{x})}$（ $\bar{}$ は複素共役を意味する）と取ることができる。

さて、$P(x) = \sum a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ と置く。ここで $P(1,0,\cdots,0) = a_{d0\cdots0} \neq 0$ と仮定して一般性を失わない。

$$
\begin{aligned}
Q(\mathrm{grad})^m P(x)^m &= \Big(\sum \bar{a}_{i_1\cdots i_n}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\big)^{i_1}\cdots\big(\tfrac{\partial}{\partial x_n}\big)^{i_n}\Big)^m \cdot \Big(\sum a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\Big)^m \\
&= (dm)!\,|a_{d0\cdots0}|^{2m} + (\text{非負の項}) \\
&\geq (dm)!\,|a_{d0\cdots0}|^{2m}
\end{aligned}
$$

この左辺は定義によって $b(m)\,b(m-1)\cdots b(1)$ と書くことができる。今 $d' = \deg b(s)$ とおくと、適当な定数 C' に対して $|b(s)| \leq C'|s|^{d'}$ が $|s| \geq 1$ で成立つから、不等式により

$$c'^m (m!)^{d'} \geq c^m (dm)! \quad (c = |a_{d0\cdots0}|^2 > 0)$$

なる評価を得る。この式にStirlingの公式を適用すれば、$d' \geq d$が分るが、$d' \leq d$は明らかであるから$d = d'$。

(ii) 上記により $b(s) = b_0 s^d + \cdots$, $b_0 \neq 0$ と書ける。さて、GはreductiveだからVの適当な座標系に関して、$\rho(G)$は転置をとる作用で不変であり、この時$P = Q$と仮定できる。以下この座標を固定する。

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) P(x)^s = b(s) P(x)^{s-1}$$

であるから、s^dの係数を比べれば

$$P\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial P}{\partial x_n}\right) = b_0 \cdot P(x)^{d-1}$$

今写像$y(x)$を

$$y : V - S \to V, \; x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{1}{P} \operatorname{grad} P(x)$$

によって定義する。すると$P(y(x)) = \dfrac{b_0}{P(x)}$となっているが、$b_0 \neq 0$だから$y$の像は$V - S$に入る。又$y(\rho(g) \cdot x) = {}^t\rho(g)^{-1} y(x)$が成立っているから、$y$は$V - S$の上への写像である。故

にそのヤコビアンは generic point では消えていない：

$$J(x) = \det\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n} \ne 0$$

そこで，$R(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}$ とおけば，R は G の作用により

$$R(\rho(g)\cdot x) = {}^t\rho(g)^{-1}R(x)\,\rho(g)^{-1}$$

なる変換性を持つ。よって $J(\rho(g)x) = (\det\rho(g))^{-2} \times J(x)$ で，$J(x)$ は相対不変式になる。従って $J(x) = c\cdot P(x)^m$ ($\exists c\in\mathbb{C}^\times, \exists m\in\mathbb{Z}$)。一方 J の斉次次数は $-2n$ であるから，P のそれと比較して $-2n = m\cdot d$ を得る。よって $d|2n$ であって，$\chi(g)^{-\frac{2n}{d}} = (\det\rho(g))^{-2}$ となる。

(iii) この証明は後になされる。（§2、系 2.3）

さて，一般に b-函数を決定するにはどうしたら良いだろうか。これに関して次の事が予想されている。今概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) が $\mathbb{R}$ 上定義されているとしよう。特異点集合の $\mathbb{R}$-有理点 $S_{\mathbb{R}}$ は，$G_{\mathbb{R}}$ の作用で $S_{\mathbb{R}} = \bigcup_i S_i$ と軌道分解を受ける。（一般に特異点集合 S に含ま

れる軌道を特異軌道と呼ぶ)。ここで、その軌道の一つ S_i 上にある測度 dv_i があって、

$$\int_{S_i} f(\rho(g)x)\,dv_i(x) = \chi(g)^{\lambda} \int_{S_i} f(x)\,dv_i(x)$$

(f は $V_{\mathbb{R}}$ 上の十分性質の良い函数)

が成立つことを仮定する。この時、

予想[注1](相当一般的な仮定の下で) $s-\lambda \mid b(s)$.

この予想が成立っている例を挙げて見よう。

例3.(対称行列空間)

$$G = GL(n),\quad V = \{ x \in M(n,\mathbb{C})\ ;\ {}^t x = x \}$$

この時は $G_{\mathbb{R}} = GL(n,\mathbb{R})$、$V_{\mathbb{R}} = V \cap M(n,\mathbb{R})$ である。

特異点集合は、$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{r=0}^{n-1} \bigcup_{i=0}^{r} S_i^r$ と $G_{\mathbb{R}}$ の軌道に分解される。ここに

$$S_i^r = \{ x \in V_{\mathbb{R}}\ ;\ x \text{ は正の固有値を } i \text{ 個、負の固有値を } (r-i) \text{ 個持つ} \}$$

これに対して、dv_i^r なる測度を次式で定める:

$$\int_{S_i^r} f(x)\,dv_i^r(x) = \int_{S_i^r} f(x)\,(\det x_r)^{-\frac{n+1-r}{2}} \prod_{\substack{1 \le k \le l \le n \\ k \le r}} dx_{kl}$$

($S_i^r \ni x$ は $x = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{n-r} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} x_r & * \\ \hline * & * \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, n-r \end{array} \end{array}$, $\det x_r \neq 0$ と表わしておく)

すると．

$$\int_{S_i^r} f(gx{}^tg)\, dv_i^r(x) = (\det g)^{-r} \int_{S_i^r} f(x)\, dv_i^r(x)$$

$\chi(g)^{-\frac{r}{2}} = (\det g)^{-r}$ であったから、この時予想の形は

$$s + \frac{r}{2} \mid b(s) \qquad (\quad = 0, 1, \cdots, n-1)$$

となる。実際 $b(s) = s(s+\frac{1}{2})\cdots(s+\frac{n-1}{2})$ となることは既に見た通りである。

例 4．（二元三次型式の空間）

$$G = GL(2),\ V = \{x \in \mathbb{C}^4 ;\ x(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3\}$$

即ち、V は二元三次型式全体のなすベクトル空間とする。

$$(\rho(g)x)(u,v) = x(au+cv,\ bu+dv),\quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

によって作用を定めると，(G, ρ, V) は概均質ベクトル空間となっている事が分る。特異点集合は、$S = \{$ 退化した二元三次型式全体$\}$ となる。その定義多項式、即ち (G, ρ, V) の基本相対不変式は

$$\begin{aligned} f(x) &= x(u,v) \text{ の判別式} \\ &= 18x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 - 4x_2^3x_4 - 27x_1^2x_4^2 \end{aligned}$$

で与えられ，対応する指標は $\chi(g) = (\det g)^6$

となる。

今 $SL(2)$-不変な内積 $\langle x, y\rangle = x_4y_1 - \frac{1}{3}x_3y_2 + \frac{1}{3}x_2y_3 - x_1y_4$ によって V と V^* とを同一視する。

特異点集合 S は、

$$S = \{0\} \cup S_1 \cup S_2$$

$$S_1 = \{x \in V ;\ x(u,1) \text{ は三重根を持つ}\}$$

$$S_2 = \{x \in V ;\ x(u,1) \text{ は二重根を持ち、三重根は持たない}\}$$

と G の軌道に分解される。このとき、$S_{\mathbb{R}} = \{0\} \cup (S_1)_{\mathbb{R}} \cup (S_2)_{\mathbb{R}}$ が $G_{\mathbb{R}} = GL(2, \mathbb{R})$ による軌道分解を与えている。$(S_1)_{\mathbb{R}}$ 上に、測度 $d\nu_1$ を次式で定義する：

$$\int_{(S_1)_{\mathbb{R}}} f(x)\, d\nu_1(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(\rho(k_\theta a_t)v_0)\, d\theta \cdot \frac{dt}{t^3}$$

但し $k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $a_t = \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}$

$$v_0(u, v) = v^3 \quad (\text{i.e. } v_0 = (0, 0, 0, 1))$$

すると、

$$\int_{(S_1)_{\mathbb{R}}} f(\rho(g)x)\, d\nu_1(x) = (\det g)^{-1} \int_{(S_1)_{\mathbb{R}}} f(x)\, d\nu_1(x)$$

が成立しているから、予想によれば、$s + \frac{1}{6} \mid b(s)$ となる筈である。一方、定義から

$s \mid b(s)$は常に成立っており、更に命題1.4の(iii)を適用すれば、$b(s)$はこの場合偶函数である。しかも$b(s)$は4次式であるから結局$b(s) = c \cdot s^2(s+\frac{1}{6})(s-\frac{1}{6})$でなければならない。実際にこの式が$c = 2^4 \cdot 3^6$として成立することが確かめられている。

なお、この例4については、後に詳しく触れる。(§4参照)

さて、次に概均質ベクトル空間の裏返し変換(castling)について説明しよう。

概均質ベクトル空間(G, ρ, V)が、特に次の形をしているとする:

$$G = G_1 \times GL(m),\quad \rho = \rho_1 \otimes \rho_2,\quad V = W \otimes \mathbb{C}^m$$

(ρ_1はG_1のWに於ける表現, ρ_2は$GL(m)$の$\mathbb{C}^m$に於ける基本表現)

但し、$1 \leq m \leq n_1 = \dim W$と仮定する。これと並行して、次のようにおく:

$$G' = G_1 \times GL(n_1 - m),\quad \rho' = \rho_1^* \otimes \rho_2,\quad V' = W^* \otimes \mathbb{C}^{n_1 - m}$$

この時次の命題が成立つ。

命題1.6

三つ組(G', ρ', V')が概均質ベクトル空間になる為の必要十分条件は、(G, ρ, V)が概均質ベクトル空間となることである。このとき一方の特異点集合が既約超曲面であれば、他方についても同じことが成立つ。

証明

任意に座標系を選んで，$V = W \otimes \mathbb{C}^m$を、$n_1$行$m$列の全行列空間$M(n_1, m)$と同一視する。今$V_0 = \{x \in V \,;\, \mathrm{rank}\, x = m\}$とおいて、$V_0$からWの$m$次元部分空間全体のなすグラスマン多様体$Gr_m(W)$の上への写像

$$V_0 \to Gr_m(W),$$
$$x = (x_1, \cdots, x_m) \longmapsto \{x_1, \cdots, x_m \text{の張る部分空間}\}$$

を考える。この写像を通じて群G_1は$Gr_m(W)$に作用し、$GL(m)$はこの各ファイバーに推移的に作用している。従って，(G, ρ, V)が概均質であることと，$Gr_m(W)$がG_1によるZariski開軌道を持つこととは同等であ

る。一方、$Gr_m(W)$ から $Gr_{n_1-m}(W^*)$ へは、部分空間にその直交補空間を対応させる自然な双正則写像が存在し、これによって G_1 の ρ_1 を通じての $Gr_m(W)$ への作用は、反傾表現 ρ_1^* を通じた $Gr_{n_1-m}(W^*)$ への作用に移される。以上から、(G, ρ, V) と (G', ρ', V') の概均質性は同値である。また、V の G-不変な既約超曲面と、$Gr_m(W)$ の G_1-不変な既約超曲面とが1:1に対応することに注意すれば、命題の後半は明らかである。

三つ組 (G, ρ, V) からこうして作られた (G', ρ', V') を、(G, ρ, V) の裏返し変換によって得られた概均質ベクトル空間と呼ぶ。裏返し変換を繰り返すことによって、次々に概均質ベクトル空間の系列を作っていくことができる。始めに与えられた (G, ρ, V) が命題に於ける様な形をしていない時でも、群 G を $G \times GL(1)$ でおき替えて得られる $(G \times GL(1), \rho \otimes \rho_2, V \otimes \mathbb{C})$ はやはり概均質であり、しかも相対不変式は斉次だから、基本相対不変式は元の空間のそれと一致

する。そこで (G, ρ, V) の代りに $(G \times GL(1), \rho \otimes \rho_2, V \otimes \mathbb{C})$ を考えてこれを裏返しすることができる。

それでは、裏返し変換によって b-函数はどう変化するだろうか。次の定理はそれに答える：

定理1.7（新谷）

概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) は命題1.6の形であるとし、その裏返し変換を (G', ρ', V') とする。各々の基本相対不変式を P, P'；b-函数を $b(s)$, $b'(s)$ とすれば、それらの次数は

$$d = \deg P = d_1 m \ , \quad d' = \deg P' = d_1(n_1 - m)$$

と書くことができ，更に定数倍を除いて次の公式が成立つ：

$$\begin{aligned} & b(s) \cdot \prod_{i=0}^{d_1-1} (d_1 s - i)(d_1 s - i + 1) \cdots (d_1 s - i + n_1 - m - 1) \\ = \ & b'(s) \cdot \prod_{i=0}^{d_1-1} (d_1 s - i)(d_1 s - i + 1) \cdots (d_1 s - i + m - 1) \end{aligned}$$

証明

記号等の繁雑を避けて、$m = 1$ の場合に概略を述べることにしよう。本質的な点

は $m>1$ でも同様である。

座標をとって $V=W$ を $\mathbb{C}^{n_1}$ と、$V'=W^*\otimes\mathbb{C}^{n_1-1}$ を $M(n_1,n_1-1)$ と同一視する。また W^* は、内積 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ により W と同一視する。写像 $x(y)$ を次式で定義しよう：

$$V'\longrightarrow V\ ,\quad y=(y_{ij})_{\substack{1\le i\le n_1\\1\le j\le n_1-1}}\longmapsto x(y)$$

$$x(y)\text{ の第 } i \text{ 成分}=(-1)^{i-1}\det\begin{array}{c|c}\begin{pmatrix}y_{11}&\cdots&y_{1n_1-1}\\\vdots&&\vdots\\y_{n_11}&\cdots&y_{n_1n_1-1}\end{pmatrix}&i\end{array}$$

（第 i 行を除く）

これは、G_1 の作用により

$$x({}^t\rho_1(g_1)^{-1}\cdot y)=\det\rho_1(g_1)^{-1}\cdot\rho_1(g_1)\cdot x(y)\quad(g_1\in G_1)$$

なる変換性を持っている。この時、(G',ρ',V') の基本相対不変式は、写像 $x(y)$ を用いて $P'(y)=P(x(y))$ と表わされる。(Weyl [1] pp.36~56)

さて、双方の b-函数は次の式で定められている：

$$(4)\quad\begin{aligned}&P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot P(x_1,\cdots x_n)^s=b(s)\cdot P(x_1\cdots x_n)^{s-1}\\&P\left(\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right)\cdot P(x(y)_1,\cdots x(y)_n)^s=b'(s)\,P(x(y)_1,\cdots,x(y)_n)^{s-1}\end{aligned}$$

ここに、

$$\frac{\partial}{\partial y^i}=(-1)^{i-1}\det\begin{array}{c|c}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y_{11}}&\cdots&\frac{\partial}{\partial y_{1,n_1-1}}\\\vdots&&\vdots\\\frac{\partial}{\partial y_{n_1 1}}&\cdots&\frac{\partial}{\partial y_{n_1,n_1-1}}\end{vmatrix}&i\end{array}$$

$b(s)$ と $b'(s)$ の関係を知る為に，まずいくつかの記号を導入しよう。

$\mathcal{P}$: W上の多項式環

$\mathcal{D}$: W上の定数係数微分作用素の作る環

$\mathcal{P}_0'$: $V'=W\otimes\mathbb{C}^{n_1-1}$ 上の $SL(n_1-1)$ の作用で（絶対）不変な多項式全体の環

$\mathcal{D}_0'$: V' 上の $SL(n_1-1)$ の作用で（絶対）不変な定数係数微分作用素全体のなす環

とおく。$\mathcal{P}$ 及び $\mathcal{D}$ は自然に $GL(W)$-加群であり，その作用は互いに反傾的である。

また，環の同型

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_0', \quad P_1(x) \longmapsto P_1(x(y))$$

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_0', \quad Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \longmapsto Q_1\left(\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right)$$

が存在する。

ここで２つの写像

$$\mathcal{P}\otimes\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$\Phi_1 : P(x)\otimes Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \longmapsto Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)P(x)$$

$$\Phi_2 : P(x)\otimes Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \longmapsto Q\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)P(x(y))$$ の，同型

$\mathcal{P} \to \mathcal{P}_0'$ による逆像を考えよう。容易に確かめられる通り、これらは GL(W)-準同型である。

l 次斉次多項式全体を $\mathcal{P}_l$ で, l' 次斉次作用素全体を $\mathcal{D}_{l'}$ で表わせば, $\mathcal{P}_l$, $\mathcal{D}_{l'}$ は共に GL(W)-加群として既約である。また、$\mathcal{P}_l \otimes \mathcal{D}_{l'}$ の既約成分への分解に於て、$\mathcal{P}_{l-l'}$ と同値な既約成分は重複度1で現われることが Littlewood-Richardson の規則(*)を用いて計算される。従って $\mathcal{P}_l \otimes \mathcal{D}_{l'} \to \mathcal{P}_{l-l'}$ へ制限すれば, 2つの準同型 Φ_1, Φ_2 は定数倍を除き一致しなければならない。

特に $l=d_1$, $l'=d_1 s$ の場合に, $\Phi_1 = c\cdot\Phi_2$ としたとき (4) によって $c = b(s)/b'(s)$ である。この c を簡単な多項式で計算しよう。

$$\Phi_1\left(x_1^{d_1 s} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{d_1}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{d_1} \cdot x_1^{d_1 s}$$

$$= d_1 s \cdot (d_1 s - 1) \cdots (d_1 s - d_1 + 1)\, x_1^{d_1(s-1)}$$

一方, Capelli の等式により

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_{21}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_{2,n_1-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_{n_1 1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_{n_1,n_1-1}} \end{bmatrix}^{d_1} \cdot \det \begin{bmatrix} y_{21} & \cdots & y_{2,n_1-1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n_1 1} & \cdots & y_{n_1,n_1-1} \end{bmatrix}^{d_1 s}$$

(*) D.E. Littlewood and A.R. Richardson, Phil. Trans. Roy. Soc. A 233 (1934) 99.

$$= d_1 s\cdot(d_1 s+1)\cdots(d_1 s+n_1-2)$$
$$\times(d_1 s-1)\cdot(d_1 s)\cdots(d_1 s-1+n_1-2)$$
$$\times\cdots$$
$$\times(d_1 s-d_1+1)(d_1 s-d_1+2)\cdots(d_1 s-d_1+1+n_1-2)$$
$$\times\det\begin{vmatrix} y_{21} & \cdots & y_{2,n_1-1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n_1 1} & \cdots & y_{n_1,n_1-1}\end{vmatrix}^{d_1(s-1)}$$

故に、

$$c = b(s) : b'(s)$$
$$= d_1 s\cdot(d_1 s-1)\cdots(d_1 s-d_1+1)$$
$$: d_1 s(d_1 s+1)\cdots(d_1 s+n_1-2)\cdots\cdots(d_1 s-d_1+1)(d_1 s-d_1+2)\cdots(d_1 s-d_1+1+n_1-$$

を得る。

例.

三つ組 (G, ρ, V) を

$$G = SO(n)\times GL(m),\quad V = M(n, m),$$
$$\rho(g_1, g_2)x = g_1 x\,{}^t g_2 \quad (g_1\in SO(n),\ g_2\in GL(m),\ x\in V)$$

によって定める。この (G, ρ, V) は概均質で、$x=(x_1,\cdots,x_m)$ (x_i は n 次元列ベクトル) と表わした時、$P(x) = \det(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\le i,j\le m} = \det{}^t x\cdot x$ が基本相対不変式となる。

この例では、b-函数が次式で与えられ

ることが分っている：

$$b(s) = s\left(s+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(s+\frac{n-1}{2}\right)\left(s+\frac{n}{2}-1\right)\left(s+\frac{n-1}{2}-1\right)\cdots\left(s+\frac{n-m+1}{2}-1\right)$$

$n>m$と仮定すれば，(G, ρ, V)の裏返し変換(G', ρ', V')は、$G' = SO(n)\times GL(n-m)$, $V' = M(n, n-m)$となって再びこの形の概均質ベクトル空間である。そこでb-函数を比較してみれば，この例で定理が成立していることが分る。

付記.

最近，相対不変式の複素巾$P(x)^s$のフーリエ変換（次節p.30参照）が裏返し変換によって受ける変化の公式も得られた（新谷）。それによれば、変換行列$\left(\varepsilon_{ij}(s)\, t_{ij}(s)\right)$は、裏返し変換を行なった時、次元と相対不変式の次数だけによるスカラーの因子が掛かるだけの変化を受ける。この因子のうちガンマ因子を比較することによって，特にb-函数の変化の公式が再び得られる。

§2. Local zeta function の函数等式

この節では、概均質ベクトル空間上に"local"なゼータ函数を導入して、その函数等式を証明することを目標とする。本節を通じて、概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) は実数体 $\mathbb{R}$ 上で定義されているものとする。

まず記号を整えよう。群 $G_{\mathbb{R}}$ の単位元を含む連結成分を G^+ で表わし、

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_l, \quad V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_l^*$$

を G^+ による軌道への分解とする。群 G は reductive と仮定しているので、軌道の数は双対空間でも同数になる。基本相対不変式 $P(x)$ の有理指標 $\chi(g)$ は、G^+ 上正値をとる。従って、$P(x)$ は $P(\rho(g)\cdot x) = \chi(g)\cdot P(x)$ によって、各軌道 V_i 上で定符号である[注2]。V^* 上の基本相対不変式 $Q(x^*)$ についても全く同様。そこで

$$\varepsilon_i = \operatorname*{sgn}_{x \in V_i} \cdot P(x), \quad \varepsilon_j^* = \operatorname*{sgn}_{x^* \in V_j^*} Q(x^*) \quad (i, j = 1, \cdots, l)$$

と置く。

次に、$\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ 及び $\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ を、それぞれ $V_{\mathbb{R}}$ 及び $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の急減少函数空間とする。このとき、local zeta function を次の式で定義する：

$$\Phi_i(f, s) = \int_{V_i} f(x)\,|P(x)|^s\,dx, \qquad f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$$

$$\Phi_j^*(f^*, s) = \int_{V_j^*} f^*(x^*)\,|Q(x^*)|^s\,dx^*, \qquad f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$$

これらは $\operatorname{Re} s > 0$ で絶対収束して、s の正則函数を表わす。

最後に、b-函数を $b(s) = b_0 \prod_{i=1}^{d} (s - c_i)$ （$b_0 \in \mathbb{R}$, $b_0 \neq 0$ $c_i \in \mathbb{C}$）と分解した時に、対応して γ-因子

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{d} \Gamma(s - c_i + 1)$$

を定義する。これはゼータ函数の解析接続に重要な役割を果たす。

目標は次の定理である：

定理 2.1

(i) local zeta function $\Phi_i(f, s)$, $\Phi_j^*(f^*, s)$ は、s の有理型函数として複素全平面に解析接続される。

(ii) 今 $f(x)$ を $f^*(x^*) \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ のフーリエ変換

$$f(x) = \int_{V_{\mathbb{R}}^*} f^*(x^*)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle}\, dx^*$$

とすれば、函数等式

$$\Phi_i(f, s-\tfrac{n}{d}) = \gamma(s-\tfrac{n}{d})(2\pi)^{-ds}|b_0|^s e^{\frac{d\pi\sqrt{-1}}{2}s} \times \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_{ij}(s)\, t_{ij}(s)\, \Phi_j^*(f^*, -s)$$

が成立する。ここに

$$\varepsilon_{ij}(s) = \begin{cases} 1 & (\varepsilon_i \varepsilon_j^* b_0 > 0 \text{ のとき}) \\ e^{-\pi\sqrt{-1}s} & (\varepsilon_i \varepsilon_j^* b_0 < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

また $t_{ij}(s)$ は $e^{-2\pi\sqrt{-1}s}$ の或る多項式であって その次数は $\left[\frac{d}{2}\right]$ ($\varepsilon_i \varepsilon_j^* b_0 > 0$ のとき) $\left[\frac{d-1}{2}\right]$ ($\varepsilon_i \varepsilon_j^* b_0 < 0$ のとき) を越えない。

試験函数 f, f^* を除いて考えれば、これは相対不変式 $P(x)$ の複素巾のフーリエ変換が次の形で与えられることを主張している：

$$\int_{V_i} |P(x)|^{s-\frac{n}{d}} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle} dx = \gamma(s-\tfrac{n}{d})(2\pi)^{-ds}|b_0|^s e^{\frac{d\pi\sqrt{-1}}{2}s} \times \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_{ij}(s)\, t_{ij}(s)\, |Q(x^*)|_j^{-s}$$

但し

$$|Q(x^*)|_j^{-s} = \begin{cases} |Q(x^*)|^{-s} & (x^* \in V_j^* \text{ の時}) \\ 0 & (x^* \notin V_j^* \text{ の時}) \end{cases}$$

これは、よく知られた公式

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-tx} dt = \Gamma(s)\cdot x^{-s} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

の一つの拡張を与えている。

未定の因子 $t_{ij}(s)$ については、これ以上詳し

い情報は今の所得られていない。注3

函数等式の証明に入る前に、それが成立する根拠となる事実を次に述べておこう。

命題 2.2

(i) すべての複素数 $s \in \mathbb{C}$ に対して、

$$Q(\mathrm{grad})\,|P(x)|_i^s = \varepsilon_i b(s)\,|P(x)|_i^{s-1}$$

が成立する。

(ii) $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上の函数 $f(x)$ が、等式

$$f(\rho(g)x) = \chi(g)^s f(x) \qquad (\forall g \in G^+)$$

を満たせば、適当な定数 $c_1, \cdots, c_\ell$ を以て

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i\,|P(x)|_i^s$$

と書ける。(逆は明らかである)

これと並行して、

(ii)* $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ 上の函数 $f^*(x^*)$ が、等式

$$f^*(\rho^*(g)x) = \chi(g)^{-s} f^*(x^*) \qquad (\forall g \in G^+)$$

を満たせば、適当な定数 $c_1^*, \cdots, c_\ell^*$ を以て

$$f^*(x^*) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j^*\,|Q(x^*)|_j^s$$

と書ける。

証明

任意に $x_i \in V_i$ を固定して、$P(x_i) \neq 0$ に注意し $c_i = f(x_i)/|P(x_i)|^s$ とおけば、

$$f(\rho(g)x_i) = \chi(g)^s f(x_i) = c_i\, \chi(g)^s |P(x_i)|^s = c_i\, |P(\rho(g)x_i)|^s$$

を得る。V_i は G^+ の単一軌道だから、(ii) は明らかである。(ii)* も全く同様。

次に、$f(x) = Q(\mathrm{grad})\,|P(x)|_i^s$ とおく。これは $f(\rho(g)x) = \chi(g)^{s-1} f(x)$ を満たし、その台は V_i に含まれるから、(ii) によって適当な定数 $c(s)$ を選べば $f(x) = c(s)\,|P(x)|_i^{s-1}$ が成立つ。$c(s)$ は明らかに s の多項式である。特に s が自然数ならば，$b(s)$ の定義によって $c(s) = \varepsilon_i\, b(s)$ $(s = 1, 2, 3, \cdots)$、従って $c(s) \equiv \varepsilon_i b(s)$ が成立つ。

定理の証明.

まず、$\gamma(s+1) = b_0^{-1} b(s+1)\gamma(s)$ であることに注意する。すると命題 2.2 の (i) から

$$\frac{1}{\gamma(s)} \Phi_i(f, s) = \frac{b_0^{-1} b(s+1)}{\gamma(s+1)} \int_{V_i} f(x)\, |P(x)|^s\, dx$$

$$= \frac{b_0^{-1}}{\gamma(s+1)} \int_V f(x)\, \varepsilon_i\, Q(\mathrm{grad})\, |P(x)|_i^{s+1}\, dx$$

$\mathrm{Re}\, s \gg 0$ として右辺を部分積分すれば、

$$\frac{1}{\gamma(s)}\Phi_i(f,s) = \frac{\varepsilon_i b_0^{-1}(-1)^d}{\gamma(s+1)}\Phi_i(Q(\mathrm{grad})f,\ s+1)$$

を得る。この右辺は $\mathrm{Re}\, s > -1$ で正則になることに注意しよう。この手続きを繰返せば、結局 $\frac{1}{\gamma(s)}\Phi_i(f,s)$ は全有限平面に整函数として解析接続されることが分る。従って第1の主張が示されたばかりか、更に詳しく $\Phi_i(f,s)$ は高々 $\gamma(s)$ と同じだけの極を持つだけであることも分った。

函数等式の証明の方は、厳密には長くなるので、如何にもっともらしいかを示す事で満足することにしよう。定義から

$$\Phi_i(\hat{f^*},\ s-\tfrac{n}{d}) = \int_{V_i}\left\{\int_{V_{\mathbb{R}}^*} f^*(x^*)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle} dx^*\right\}|P(x)|^{s-\frac{n}{d}}dx$$

であるが、収束の困難を無視して積分順序を入れ替えると、

$$(\text{右辺}) = \int_{V_{\mathbb{R}}^*}\left\{\int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle}|P(x)|^{s-\frac{n}{d}}dx\right\} f^*(x^*)\,dx^*$$

となる。そこで $\int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle}|P(x)|^{s-\frac{n}{d}}dx = \varphi_i(x^*,s)$ と置こう。(i)の結果、$\frac{1}{\gamma(s-\frac{n}{d})}\varphi_i(x^*,s)$ は整函数であろうと期待されるが、それを認めることにして先へ進もう。今、

34

$$\varphi_i(\rho^*(g)x^*, s) = \int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, \rho^*(g)x^*\rangle} |P(x)|^{s-\frac{n}{d}} dx$$

$$= \int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x', x^*\rangle} |P(\rho(g)x')|^{s-\frac{n}{d}} |\det\rho(g)|\, dx'$$

$$= \chi(g)^s \varphi_i(x^*, s) \qquad (\because |\det\rho(g)| = \chi(g)^{\frac{n}{d}})$$

が成立つ。故に、命題2.2の(ii)によって、$\varphi_i(x^*, s) = \sum_{j=1}^{l} w_{ij}(s)\, |Q(x^*)|_j^{-s}$ （$w_{ij}(s)$は整函数）と書ける。一方、

$$b(s-\tfrac{n}{d}+1)\varphi_i(x^*, s) = \int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle} b(s-\tfrac{n}{d}+1)|P(x)|^{s-\frac{n}{d}} dx$$

$$= \int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle} \varepsilon_i Q(\mathrm{grad}) |P(x)|^{s-\frac{n}{d}+1} dx$$

$$= \varepsilon_i (-2\pi\sqrt{-1})^d Q(x^*) \int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle} |P(x)|^{s-\frac{n}{d}+1} dx$$

$$= \varepsilon_i (-2\pi\sqrt{-1})^d Q(x^*)\, \varphi_i(x^*, s+1)$$

ここで部分積分を行なった。この式を、$w_{ij}(s)$についての式に書き替えれば、

$$\sum_{j=1}^{l} b(s-\tfrac{n}{d}+1) w_{ij}(s) |Q(x^*)|_j^{-s} = \varepsilon_i (-2\pi\sqrt{-1})^d Q(x^*) \times \sum_{j=1}^{l} w_{ij}(s+1) |Q(x^*)|_j^{-s-1}$$

$$\therefore\ w_{ij}(s+1) = \varepsilon_i \varepsilon_j^* b(s-\tfrac{n}{d}+1)(2\pi)^{-d} \sqrt{-1}^{\,d} w_{ij}(s)$$

更に $c_{ij}(s) = \dfrac{1}{\gamma(s-\frac{n}{d})} w_{ij}(s)$ とおけば、これもsの整函数で、上式は$c_{ij}(s)$については

$$c_{ij}(s+1) = b_0 \varepsilon_i \varepsilon_j^* \cdot (2\pi)^{-d} \sqrt{-1}^{\,d} c_{ij}(s)$$

となる。そこで、$t_{ij}(s)$ を次式で定める：

$$c_{ij}(s) = |b_0|^s (2\pi)^{-ds} e^{\frac{d\pi\sqrt{-1}}{2}s}\, t_{ij}(s)\, \varepsilon_{ij}(s)$$

$$\varepsilon_{ij}(s) = \begin{cases} 1 & (b_0 \varepsilon_i \varepsilon_j^* > 0 \text{ の時}) \\ e^{-\pi\sqrt{-1}s} & (b_0 \varepsilon_i \varepsilon_j^* < 0 \text{ の時}) \end{cases}$$

こうすれば、$t_{ij}(s)$ は整函数であって、かつ $t_{ij}(s+1) = t_{ij}(s)$ を満たす。そして、以上で得られた式を書き下せば、

$$\int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle} |P(x)|^{s-\frac{n}{d}} dx = \gamma(s-\tfrac{n}{d})(2\pi)^{-ds} |b_0|^s e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}ds} \times \sum_{j=1}^{l} \varepsilon_{ij}(s)\, t_{ij}(s)\, |Q(x^*)|_j^{-s}$$

これが求める式であった。

因子 $t_{ij}(s)$ をもう少し調べよう。上式の左辺は、$\mathrm{Re}\, s$ を一定にして $\mathrm{Im}\, s \to \infty$ とした時、$\mathrm{Im}\, s$ の多項式程度に増大する。（この事実は厳密には面倒であるが）。一方右辺の係数は、$\mathrm{Im}\, s$ の指数函数程度に増大する。よって $t_{ij}(s)$ も $\mathrm{Re}\, s$ 一定、$\mathrm{Im}\, s \to \infty$ の時 $\mathrm{Im}\, s$ の指数函数程度に増大する。ところが周期 1 を持つ整函数がこの性質を持てば、それは実は $e^{2\pi\sqrt{-1}s}$ の（負巾を含む）多項式である。そこで、両辺の増大度を

比べることによって、$t_{ij}(s)$ が $e^{2\pi\sqrt{-1}s}$ の負巾を含まない多項式であって、次数は高々 $[\frac{d}{2}]$ ($b_0\varepsilon_i\varepsilon_j^* > 0$) 又は $[\frac{d-1}{2}]$ ($b_0\varepsilon_i\varepsilon_j^* < 0$) であることが結論される。

系 2.3.

(G, ρ, V) に関する仮定 1), 2) の下に

$$b(s) = (-1)^d\, b(1 - \tfrac{n}{d} - s)$$

証明.

今 $Q(\mathrm{grad})$ と並行して $P(\mathrm{grad})$ という作用素を導入すれば、$P(\mathrm{grad})\,Q(x^*)^s = b'(s)\,Q(x^*)^{s-1}$ を満たす多項式 $b'(s)$ の存在が同様の議論によって示される。実は(最高次係数迄込めて)$b'(s) = b(s)$ であることが言える。囲4

また、$P(\mathrm{grad})\,|Q(x^*)|_j^s = b(s)\,\varepsilon_j^*\,|Q(x^*)|_j^{s-1}$ も成立する。さて、

$$\int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle} |P(x)|^{s-\frac{n}{d}} dx = \gamma(s-\tfrac{n}{d}) \sum_{j=1}^{\ell} c_{ij}(s)\, |Q(x^*)|_j^{-s}$$

の両辺に $P(\mathrm{grad})$ を施せば、

$$(\text{右辺}) = \gamma(s-\tfrac{n}{d}) \sum_{j=1}^{\ell} c_{ij}(s)\, \varepsilon_j^*\, b(-s)\, |Q(x^*)|_j^{-s-1}$$

$$(\text{左辺}) = (2\pi\sqrt{-1})^d \int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle} \varepsilon_i\, |P(x)|^{s-\frac{n}{d}+1} dx$$

$$= \varepsilon_i \,(2\pi\sqrt{-1})^d \gamma(s-\tfrac{n}{d}+1) \sum_{j=1}^{\ell} c_{ij}(s+1) |Q(u^*)|_j^{-s-1}$$

従って、

$$\varepsilon_i (2\pi\sqrt{-1})^d \gamma(s-\tfrac{n}{d}+1) c_{ij}(s+1) = \varepsilon_j^* \gamma(s-\tfrac{n}{d}) c_{ij}(s) b(-s)$$

ここに $c_{ij}(s+1) = b_0 \varepsilon_i \varepsilon_j^* (-2\pi\sqrt{-1})^{-d} c_{ij}(s)$ を代入すると，少なくとも一つの $c_{ij}(s)$ は0でないから、結局

$$b(s-\tfrac{n}{d}+1) = (-1)^d b(-s)$$

を得る。

以下少し実例を述べよう。因子 $t_{ij}(s)$ が計算できるのは，今の所何らかの意味で積分が陽に計算可能な場合に限られている[注3]。

例1.（全行列空間）

$$G = GL(n),\ V = M(n),\ P(x) = \det x,\ \chi(g) = \det g。$$

このとき $G^+ = GL^+(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R});\ \det g > 0\}$ であり，

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2,\quad V_i = \{x \in V_{\mathbb{R}};\ (-1)^{i-1}\det x > 0\}$$

従って $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^* = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^* = -1$ である。またこの例では $b(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1)$ であったから、$\gamma(s) = \Gamma(s+1)\Gamma(s+2)\cdots\Gamma(s+n)$ である。

この場合，函数等式は

$$\int_{(-1)^{i-1}\det x>0} e^{2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}\,{}^t x\cdot y}\,|\det x|^{s-n}\,dx$$

$$= \Gamma(s-n+1)\Gamma(s-n+2)\cdots\Gamma(s)(2\pi)^{-ns}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}n}{2}s}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_{ij}(s)t_{ij}(s)|\det x|_j^{-s}$$

$$\varepsilon_{ij}(s) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ e^{-\pi\sqrt{-1}s} & (i\neq j) \end{cases}$$

となる。ここで $t_{ij}(s)$ は次のように計算される（佐藤－新谷 [1], pp. 142－145）。まず，

$$\int_{V_i} e^{-\pi\,\mathrm{tr}\,{}^t x\cdot x}|\det x|^{s-n}dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{n^2}{2}-\frac{ns}{2}}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\frac{s-j}{2})}{\Gamma(\frac{j+1}{2})}$$

$(i=1,2)$

が成立つ。この計算には，岩沢分解 $x=k\cdot t$ $\left(k\in SO(n),\ t=\begin{pmatrix} t_{11} & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn}\end{pmatrix},\ t_{ii}>0\right)$ を用いれば良い。函数等式の試験函数として，特にフーリエ変換で不変な $f(x)=e^{-\pi\,\mathrm{tr}\,{}^t x\cdot x}$ をとろう。今 $\varepsilon_0=\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$ とおいて，$f_{\varepsilon_0}(x)=f(\varepsilon_0 x)$

を代入して見れば，行列 $(\varepsilon_{ij}(s)\,t_{ij}(s))_{1\le i,j\le 2}$ が $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ と可換であることが分り，$t_{11}=t_{22}$，$t_{12}=t_{21}$ が導かれる。そこで，上記積分を利用し，$t_{ij}(s)$ が周期 1 であること，及びガンマ函数の倍角公式を併せ用いること

により、次の結果が得られる：

$$t_{11}(s) = t_{22}(s) = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}\,n}{2}s}(2\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}}2^{n-1}\Big(\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\cos\frac{\pi(s+1)}{2}\cdots\cos\frac{\pi}{2}(s-n+1)$$
$$+\sqrt{-1}^{\,n}\sin\frac{\pi}{2}s\cdot\sin\frac{\pi}{2}(s+1)\cdots\sin\frac{\pi}{2}(s-n+1)\Big)$$

$$t_{12}(s) = t_{21}(s) = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}(n-2)}{2}s}(2\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}}2^{n-1}\Big(\cos\frac{\pi}{2}s\cdot\cos\frac{\pi}{2}(s+1)\cdots\cos\frac{\pi}{2}(s-n+1)$$
$$-\sqrt{-1}^{\,n}\sin\frac{\pi}{2}s\cdot\sin\frac{\pi}{2}(s+1)\cdots\sin\frac{\pi}{2}(s-n+1)\Big)$$

例 2.（二次型式）

非退化実二次型式 $P(x)$ の符号を (p, q) とする。但し $n = p+q \geq 3$ と仮定する。

$$G_{\mathbb{R}} = \{ g \in GL(n, \mathbb{R}) \,;\, P(gx) = \chi(g)\cdot P(x) \}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{ x \in V_{\mathbb{R}} \,;\, P(x) = 0 \}$$

であった。この時 G^+ による軌道分解は符号によって異なり、

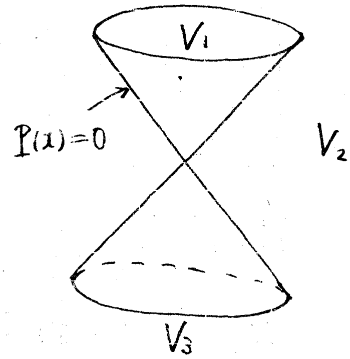
$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \begin{cases} V_1 & (p=0 \text{ 又は } q=0) \\ V_1 \cup V_2 \cup V_3 & (p=1 \text{ 又は } q=1) \\ V_1 \cup V_2 & (p>1,\ q>1) \end{cases}$$

となる。ここに例えば $p=1$ の時は

$$V_2 = \{ x \in V_{\mathbb{R}} \,;\, P(x) < 0 \}$$

$$V_1 \cup V_3 = \{ x \in V_{\mathbb{R}} \,;\, P(x) > 0 \}$$

である。



ここで $q=0$、即ち P が

40

正定値の時には、試験函数として $e^{-\pi P(x)}$ を取って計算すればよい。

また、$q>0$ の時には、$P_0(x)+\sqrt{-1}P_1(x)$（$P_1(x)$ は正又は負定値）のフーリエ変換を計算しておいて、$P_1\to\pm 0$ とする議論で計算される。（Gel'fand-Šilov [1]）

$p\geq 2, q\geq 2$ の時について結果のみ挙げれば次の通り：

$$\left(\varepsilon_{ij}(s)\,t_{ij}(s)\right)_{i\leq i,j\leq 2} = -|\det P|^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}\begin{pmatrix}\sin\pi(s-\frac{p}{2}) & -\sin\pi\cdot\frac{p}{2}\\ -\sin\pi\cdot\frac{n p}{2} & \sin\pi\cdot(s-\frac{q}{2})\end{pmatrix}$$

例3.（対称行列空間）

$$G_{\mathbb{R}} = GL(n,\mathbb{R}),\quad V_{\mathbb{R}} = \{x\in M(n,\mathbb{R})\ ;\ {}^t x = x\}$$

$$P(x) = \det x,\quad S_{\mathbb{R}} = \{x\in V_{\mathbb{R}}\ ;\ P(x)=0\}$$

$$\rho(g)\cdot x = g\cdot x\cdot {}^t g\ 。$$

G^+ の作用で、

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_0 \cup \cdots \cup V_n$$

$$V_i = \{x\in V_{\mathbb{R}}\ ;\ x \text{ は正の固有値を } i \text{ 個持つ}\}$$

と分解される。また、V^* は内積 $\langle x,y\rangle = \mathrm{tr}\,xy$ で V と同一視する。b-函数は $s(s+\frac{1}{2})\cdots(s+\frac{n-1}{2})$ であったから、$\gamma(s) = \Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{3}{2})\cdots\Gamma(s+\frac{n+1}{2})$。

さて，積分 $\int_{V_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle}|\det x|^{s-\frac{n+1}{2}}dx$ を計算するのに，V_0 に対して Siegel が行なった論法を適用しよう。

$$T = \left\{ t = \begin{pmatrix} t_{11} & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix} \; ; \; t_{ii} > 0,\ i = 1, \cdots, n \right\}$$

とおく時

$$V_i \approx \bigcup_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)} \bigcup_{t \in T} t \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{bmatrix} \cdot {}^t t$$

が，次元の低い代数的集合を除いて成立つ。ここに $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ は、うち i 個が 1，$(n-i)$ 個が -1 となるような組全体にわたる。この $x = t \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{bmatrix} \cdot {}^t t$ について，$e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle}|\det x|^s$ は $e^{2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(t\cdot[\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n]{}^t t \cdot y)}(t_{11}\cdots t_{nn})^{2s}$ となるから、二次型式の場合の計算に帰着し、結局

$$\varepsilon_{ij}(s)\, t_{ij}(s) = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \sqrt{-1}^{(n+1)(i+j-\frac{n}{2})} (-1)^{\frac{(n-j)(n-j+1)}{2}}$$
$$\times \sum_{r=\max(0,i+j-n)}^{\min(i,j)} (-1)^{r(n+1)} \alpha_{jr}\, \alpha_{n-j,i-r}\, e^{(2r-i-j)\pi\sqrt{-1}}$$

を得る。但し

$$\alpha_{\ell m} = \sqrt{-1}^{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \times \begin{cases} (-1)^{\frac{\ell-m}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\ell}{2} \\ \frac{m}{2} \end{pmatrix} & (\ell, m : \text{even}) \\ 0 & (\ell : \text{even},\ m : \text{odd}) \\ (-1)^{\frac{\ell+1-m}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\ell-1}{2} \\ \frac{m}{2} \end{pmatrix} & (\ell : \text{odd},\ m : \text{even}) \\ (-1)^{\frac{\ell-m}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\ell-1}{2} \\ \frac{m-1}{2} \end{pmatrix} & (\ell, m : \text{odd}) \end{cases}$$

例4.（二元三次型式の空間）

$$G_{\mathbb{R}} = GL(2,\mathbb{R}),\quad V_{\mathbb{R}} = \{ x(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3,\ x_i \in \mathbb{R} \}$$

$$(\rho(g)x)(u,v) = x(au+cv, bu+dv),\quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{R}}.$$

基本相対不変式は

$$P(x) = 18x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 - 4x_2^3x_4 - 27x_1^2x_4^2$$

であった。

このときの軌道分解は

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2 \ ;\quad V_i = \{x \in V_{\mathbb{R}} \ ;\ (-1)^{i-1}P(x) > 0\}$$

となる。

この例では今迄に述べた方法はどれも適用できないが、幸い変数や軌道の数が小さいので、言わばなりふり構わないやり方ができて、次のようになる：

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{ij}(s)\, t_{ij}(s) \end{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}s} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & \sin \pi s \\ 3\sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix}$$

（証明は新谷[1]を見て戴きたい。）

§3. 概均質ベクトル空間上のゼータ函数

前節迄の準備をもとに、ここで概均質ベクトル空間上のゼータ函数であるディリクレ級数を導入し、その函数等式を導くことにしよう。この節を通じて、(G, ρ, V) は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で定義された概均質ベクトル空間とする。記号 P, Q, χ, G^+ 等は前節と同じ意味で断わりなしに用いる事にし、更に新たに幾つかの記号を定める。

まず, $G^1 = \{g \in G^+ ; \chi(g) = 1\}$ とおく。χ は有理指標であるから、これも reductive な線型代数群となる。その離散部分群 $G^1_{\mathbb{Z}}$ を、Γ と略記することにする。

次に $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_\ell$ を G^+ による軌道分解とする。この時, $x \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の isotropy $G^+_x = \{g \in G^+ ; \rho(g)x = x\}$ は再び reductive になることが示される。(佐藤-新谷[2], Lemma 2.1)。命題 1.5 の (ii) によって, $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上には $\Omega(x) = |P(x)|^{-\frac{n}{d}} dx$ で定義

されるG-不変なn-型式が存在する。これを、実解析多様体としての同型写像$G^+/G_x^+ \longrightarrow V_i$, $g \longmapsto \rho(g)\cdot x$（但し$x \in V_i$）によって$G^+/G_x^+$上に引戻し、$\Omega(\rho(g)\cdot x)$と表わすことにする。

これらの群G^+, G^1, G_x^+上には、不変測度dg, d^1g, dv_xが定数倍を除いて唯一つ存在する。そこで、これらは次式によって正規化されているものとする：

$$\int_{G^+} f(g)\,dg = \int_{G^+/G^1} \left(\int_{G^1} f(\dot{g} g_1)\, d^1 g_1 \right) \frac{d\chi(\dot{g})}{\chi(\dot{g})}$$

（$f \in L^1(G^+)$。$\frac{d\chi(\dot{g})}{\chi(\dot{g})}$は、同型$\chi : G^+/G^1 \to \mathbb{R}$による、$\frac{dx}{x}$の逆像）

$$\int_{G^+} \varphi(g)\,dg = \int_{G^+/G_x^+} \Omega(\rho(g)x) \int_{G_x^+} \varphi(gh)\, dv_x(h)$$

（$\varphi \in L^1(G)$）

ここで、次の仮定を設ける。

仮定 3

積分 $$I'(f) = \int_{G^1/G^1_{\mathbb{Z}}} \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}} - S \cap V_{\mathbb{Z}}} f(\rho(g)x)\, d^1 g$$ 及び

$$I'(f^*) = \int_{G^1/G^1_{\mathbb{Z}}} \sum_{x^* \in V^*_{\mathbb{Z}} - S^* \cap V^*_{\mathbb{Z}}} f^*(\rho^*(g)\cdot x^*)\, d^1 g$$

は、すべての$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$, $f^* \in \mathcal{S}(V^*_{\mathbb{R}})$に対し

て絶対収束する。

この仮定の下に、$\Gamma_x = \Gamma \cap G_x^+$ $(x \in V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}})$ とおくと、

$$\mu(x) = \int_{G_x^+/\Gamma_x} d\nu_x$$

は有限であることが後に示される。容易に分るように、同値関係 $x \sim x' \Leftrightarrow x' = \rho(\gamma)x$ $({}^{\exists}\gamma \in \Gamma)$ を定める時、$\mu(x)$ の値はこの Γ-同値類にのみ依存する。全く並行して $\mu^*(x^*)$ なる量も定義される。

定義 3.1

今 $L \subset V_{\mathbb{Q}}$, $L^* \subset V_{\mathbb{Q}}^*$ を $G_{\mathbb{Q}}$-不変な格子とする。これらに対して (G, ρ, V) 上のディリクレ級数を次の様に定義する：

$$\xi_i(s, L) = \sum_{x \in \Gamma \backslash L_i} \mu(x) |P(x)|^{-s} \quad (L_i = L \cap V_i)$$

$$\xi_j^*(s, L^*) = \sum_{x^* \in \Gamma \backslash L_j^*} \mu^*(x^*) | \quad (L_j^* = L^* \cap V_j^*)$$

以上の設定の下に、我々の目標とする定理を述べよう。但し L は $V_{\mathbb{Q}}$ の $G_{\mathbb{Q}}$-不変な格子を表わし、$L^* \subset V_{\mathbb{Q}}^*$ はその双対格子とする。また $v(L) = \int_{V/L} dx$ とおく。

定理 3.2.

ディリクレ級数 $\xi_i(s, L)$, $\xi_j^*(s, L^*)$ $(i, j = 1, \cdots, l)$ は $\mathrm{Re}\, s$ が十分大なる時に絶対収束して、$b(s-\frac{n}{d})\xi_i(s, L)$, $b(s-\frac{n}{d})\xi_j^*(s, L^*)$ は全平面に整函数として解析接続される。そして、次の函数等式が成立する：

$$\xi_i(\tfrac{n}{d}-s, L) = v(L)^{-1}(2\pi)^{-ds}|b_0|^s \gamma(s-\tfrac{n}{d})\, e^{\frac{\pi\sqrt{-1}d}{2}s} \times \sum_{j=1}^{l} \varepsilon_{ji}(s)\, t_{ji}^*(s)\, \xi_j^*(s, L^*)$$

ここに函数 $\varepsilon_{ji}(s)$, $t_{ji}^*(s)$ は、定理 2.1 に現われる物とする。

以下順を追って証明の大筋を辿る事にしよう。

始めに、$\omega(x)$ は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上の $(n-1)$-型式であって、$dP \wedge \omega = dx$ を満たす物とする。具体的には、Euler の恒等式によって

$$\omega(x) = \frac{1}{P(x)\cdot d} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

と置けば良い。この時、$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対し

$$\int_{V_i} f(y)\,\delta(P(y) - \varepsilon_i t)\,dy \underset{\mathrm{def.}}{=\!=} \int_{\{y \in V_i;\, P(y) = \varepsilon_i t\}} f(y)\,\omega(y) \qquad (t > 0)$$

と書くことにする。

また，定義から容易に分るように，$|P(x)|^{1-\frac{n}{d}}\omega(x) = \tilde{\omega}(x)$ は V_i 上の G^+-不変な $(n-1)$-型式を与える。

補題 3.3

仮定 3 の下に，次式が成立つ：

$$\int_{G^1/\Gamma} \sum_{x\in L_i} f(\rho(g)\cdot x)\, d'g = \sum_{x\in\Gamma\backslash L_i} \mu(x)|P(x)|^{1-\frac{n}{d}} \int_{V_i} f(y)\,\delta(P(y)-P(x))\,dy$$

$$(\forall f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}))$$

証明.

任意の $f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して，至る所で $|f(x)| \leq f_0(x)$ となるような $f_0\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ がとれることに注意すれば，仮定 3 から，補題の左辺が絶対収束することが導かれる。特に，f として至る所正値をとるような $\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ の函数を取る事により，上式から $\mu(x)<\infty$ であることも同時に知られる。

等式の成立を示そう。今、格子 L の各部分 $L_i = L\cap V_i$ は，$L_i = \bigcup_{x\in\Gamma\backslash L_i} \bigcup_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_x} \rho(\gamma)\cdot x$ と、disjoint union に書けるから，

$$\int_{G^1/\Gamma} \sum_{x\in L_i} f(\rho(g)\cdot x)\, d'g = \int_{G^1/\Gamma} \sum_{x\in\Gamma\backslash L_i} \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_x} f(\rho(g\cdot\gamma)x)\, d'g$$

$$= \sum_{x\in\Gamma\backslash L_i} \int_{G^1/\Gamma_x} f(\rho(g)\cdot x)\, d'g$$

ここで，実解析的多様体の同型

$$G/G_x \longrightarrow \{y\in V_i \,;\, P(y)=P(x)\}$$

$$g \longmapsto \rho(g)\cdot x$$

によって $\tilde{\omega}(x)$ を引戻せば、G'/G_x 上の不変測度 $\tilde{\omega}(\rho(g)x)$ が得られる。そして $d\nu_x$ の正規化の仕方から，$|P(x)|^{-\frac{n}{d}}dx = \frac{dP(x)}{|P(x)|}\wedge\tilde{\omega}(x)$ により

$$\int_{G'}\varphi(g)\,d'g = \int_{G'/G_x}\tilde{\omega}(\rho(g_1 h)x)\int_{G_x}\varphi(g_1 h)\,d\nu_x(h)$$
$$(\varphi\in L^1(G'))$$

が成立つことは容易に分る。従って

$$\sum_{x\in\Gamma\backslash L_i}\int_{G'/\Gamma_x} f(\rho(g)x)\,d'g = \sum_{x\in\Gamma\backslash L_i}\int_{G'/G_x}\tilde{\omega}(\rho(g_1)x)\int_{G_x/\Gamma_x} f(\rho(g_1 h)x)\,d\nu_x(h)$$
$$= \sum_{x\in\Gamma\backslash L_i}\int_{G_x/\Gamma_x} d\nu_x\int_{G'/G_x}\tilde{\omega}(\rho(g_1)x)\,f(\rho(g_1)x)$$
$$= \sum_{x\in\Gamma\backslash L_i}\mu(x)\,|P(x)|^{1-\frac{n}{d}}\int_{V_i} f(y)\,\delta(P(y)-P(x))\,dy$$

となり補題は示された。

ここで，補題の右辺を考えて見よう。自然数 r を適当に選べば、$rL\subset V_{\mathbb{Z}}$ かつ $rP(x)$ は $\mathbb{Z}$-係数、とできる。このとき $P(x)$ は L_i 上で $\frac{m}{r}\varepsilon_i$ ($m=1,2,\cdots$) なる値をとるから，右辺は

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_{V_i} f(y)\,\delta\!\left(P(y)-\frac{m}{r}\varepsilon_i\right)dy \times \left(\sum_{\substack{x\in\Gamma\backslash L_i\\ P(x)=\varepsilon_i\frac{m}{r}}}\mu(x)\left(\frac{m}{r}\right)^{1-\frac{n}{d}}\right)$$

と変形される。

今 $a_f(m) = \int_{V_i} f(y)\delta(P(y) - \frac{m}{r}\varepsilon_i)dy$ と置けば、f を $\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ で動かすとき，$\{a_f(m)\}_{m=1}^{\infty}$ は任意の急減少数列を走らせることができる。それを掛けても収束する事から，適当な $C>0, a>0$ に対して

$$\sum_{\substack{x \in \Gamma\backslash L_i \\ |P(x)| = \frac{m}{r}}} \mu(x) \left(\frac{m}{r}\right)^{1-\frac{n}{d}} \leq C \cdot m^a \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

が成立つ。故に，$\mathrm{Re}\, s$ が十分大であれば，級数 $\xi_i(s, L)$ は絶対収束する。

次に，$L' = L - L \cap S$, $L^{*\prime} = L^* - L^* \cap S^*$ として

$$Z(f, L, s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{x \in L'} f(\rho(g)x)dg$$

$$Z^*(f^*, L^*, s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^{-s} \sum_{x^* \in L^{*\prime}} f^*(\rho^*(g)x^*)dg$$

と置く。すると

補題 3.4

上記 $Z(f, L, s)$, $Z^*(f^*, L^*, s)$ は，$\mathrm{Re}\, s$ が十分大ならば絶対収束し，次式が成立つ：

$$Z(f, L, s) = \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i(s, L)\Phi_i(f, s - \tfrac{n}{d})$$

$$Z^*(f^*, L^*, s) = \sum_{j=1}^{\ell} \xi_j^*(s, L^*)\Phi_j^*(f^*, s - \tfrac{n}{d})$$

証明.

$$Z(f, L, s) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{x \in \Gamma\backslash L_i} \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_x} f(\rho(g \cdot \gamma)x)dg$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{x \in \Gamma\backslash L_i} \int_{G^+/\Gamma_x} \chi(g)^s f(\rho(g)x)dg$$

50

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{x \in \Gamma \backslash V_i} \int_{G^+/G_x} \chi(g)^s \Omega(\rho(g)x) f(\rho(g)x) \cdot \int_{G_x/\Gamma_x} d\nu_x$$

但し、$\Omega(x) = |P(x)|^{-\frac{n}{d}} dx$ であった。ここで $\chi(g)^s \Omega(\rho(g)x) = |P(x)|^{-s} |P(\rho(g)x)|^s \Omega(\rho(g)x)$ と書くことができるから、

$$(\text{上式の右辺}) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{x \in \Gamma \backslash V_i} \mu(x) |P(x)|^{-s} \int_{G^+/G_x} |P(\rho(g)x)|^s f(\rho(g)x) \times \Omega(\rho(g)x)$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \xi_i(s, L) \int_{V_i} |P(y)|^{s-\frac{n}{d}} f(y)\, dy$$

$Z^*(f^*, L^*, s)$ についても全く同様である。

さて、定理の証明に移ろう。良く知られている様に、次の Poisson の和公式が成立つ：

$$\sum_{x \in L} f(\rho(g)x) = v(L)^{-1} \chi(g)^{-\frac{n}{d}} \sum_{x^* \in L^*} f^*(\rho^*(g) \cdot x^*) \quad (g \in G^+)$$

$$\text{但し} \quad f^*(x^*) = \int_{V_{\mathbb{R}}} f(x)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^* \rangle} dx$$

今、

$$Z_+(f, L, s) = \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \geq 1}} \chi(g)^s \sum_{x \in L'} f(\rho(g) \cdot x)\, dg$$

$$Z_+^*(f^*, L^*, s) = \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \leq 1}} \chi(g)^{-s} \sum_{x^* \in L^{*\prime}} f^*(\rho^*(g) x^*)\, dg$$

と置けば、これらは s の整函数である。実際積分は Re s が十分大きい時に絶対収束するので、χ(g) の動く範囲によりすべての s につい

て絶対収束する。よって、Poissonの和公式を用いて $Z(f, L, s)$, $Z^*(f^*, L^*, s)$ を書き改めれば

$$
\begin{aligned}
Z(f, L, s) &= Z_+(f, L, s) + v(L)^{-1} Z_+^*(f^*, L^*, \tfrac{n}{d}-s) \\
&\quad + \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \le 1}} \chi(g)^s \Big\{ v(L)^{-1} \chi(g)^{-\frac{n}{d}} \sum_{x^* \in L^* \cap S^*} f^*(\rho^*(g)x^*) - \sum_{x \in L \cap S} f(\rho(g)x) \Big\} dg \\
Z^*(f^*, L^*, s) &= Z_+^*(f^*, L^*, s) + v(L) Z_+(f, L, \tfrac{n}{d}-s) \\
&\quad + \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \ge 1}} \chi(g)^{-s} \Big\{ v(L) \chi(g)^{\frac{n}{d}} \sum_{x \in L \cap S} f(\rho(g)x) - \sum_{x^* \in L^* \cap S^*} f^*(\rho^*(g)x^*) \Big\} dg
\end{aligned}
\tag{!}
$$

が成立つ。即ち Z, Z^* を、s について正則な部分と特異な部分に分離する事ができた。ここで積分を遂行することは一般には望み得ないので、次のような trick を用いる。

今、試験函数として

$$f(x) = Q(\mathrm{grad}) f_0(x), \quad f_0 \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}})$$

を取ることにしよう。フーリエ変換して、

$$f^*(x^*) = (-2\pi\sqrt{-1})^d Q(x^*) f_0^*(x^*)$$

従って f も f^* も共に特異点集合の上で消えている。この時 Z 及び Z^* は s の整函数になり、Poissonの和公式から

$$Z(f, L, \tfrac{n}{d}-s) = v(L)^{-1} Z^*(f^*, L^*, s)$$

が成立つ。更に、特に $f_0 \in C_0^\infty(V_i)$ と取れば

$$Z(f, L, \tfrac{n}{d}-s) = \xi_i(\tfrac{n}{d}-s, L)\,\Phi_i(Q(\mathrm{grad})f_0, -s)$$
$$= \varepsilon_i\,\xi_i(\tfrac{n}{d}-s, L)(-1)^d b(-s)\int_{V_i} f_0(x)|P(x)|^{-s-1}dx$$

であるから，$\int_{V_i} f_0(x)|P(x)|^{-s-1}dx \neq 0$ となるように f_0 を選ぶことにより，$\xi_i(\tfrac{n}{d}-s, L)b(\tfrac{n}{d}-s-\tfrac{n}{d})$ が s の整函数に解析接続されることが分る。

一方，補題3.4の等式

$$v(L)^{-1}Z^*(f^*, L^*, s) = v(L)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell}\xi_j^*(s, L^*)\Phi_j^*(f^*, s-\tfrac{n}{d})$$

に，前節で得られた local zeta function の函数等式（定理2.1）を適用すれば，$\mathrm{Supp}\,f_0 \subset V_i$ 故

$$v(L)^{-1}Z^*(f^*, L^*, s) = v(L)^{-1}\sum_{j=1}^{\ell}\xi_j^*(s, L^*)\gamma(s-\tfrac{n}{d})(2\pi)^{-ds}|b_0|^s e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}ds}$$
$$\times\ \varepsilon_{ji}^*(s)\,t_{ji}^*(s)\,\Phi_i(f, -s)$$

故に，上で得た式と比較して

$$\xi_i(\tfrac{n}{d}-s, L) = v(L)^{-1}\gamma(s-\tfrac{n}{d})(2\pi)^{-ds}|b_0|^s e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}ds}$$
$$\times\sum_{j=1}^{\ell}\varepsilon_{ji}^*(s)\,t_{ji}^*(s)\,\xi_j^*(s, L^*)$$

を得る。

§4. 二元三次型式の空間

今迄に述べて来た一般論を，例4として引合いに出して来た二元三次型式の空間について適用してみよう（§1，例4参照）。詳しい議論は新谷[1]に譲る。

概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) は，

$$G_{\mathbb{Q}} = GL(2, \mathbb{Q})$$

$$V_{\mathbb{Q}} = \{\text{有理係数の二元三次型式全体}\}$$
$$= \{\, x(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3 \,;\, {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 \}$$

なる自然な $\mathbb{Q}$-構造を持つ。

基本相対不変式は

$$P(x) = x(u,v)\text{ の判別式}$$
$$= 18x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 - 4x_2^3x_4 - 27x_1^2x_4^2$$

で与えられ，これには指標 $\chi(g) = (\det g)^6$ が対応する。

前述の如く、我々は $SL(2)$-不変な交代双一次型式 $\langle x, y\rangle = x_4y_1 - \frac{1}{3}x_3y_2 + \frac{1}{3}x_2y_3 - x_1y_4$ によって V と V^* とを同一視する。

以下、標準的な記法に従い

$$k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad a_t = \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad n(u) = \begin{pmatrix} 1 & \\ u & 1 \end{pmatrix}$$

と略記することにすれば、$G^+ = GL^+(2, \mathbb{R})$ の任意の元は

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix} \cdot k_\theta a_t n(u), \quad \lambda > 0, -\pi < \theta \leq \pi, t > 0,$$
$$-\infty < u < +\infty$$

と一意的に書くことができる(岩沢分解)。群 G^+ 上の不変測度 $dg = (\det g)^{-2} \cdot da \cdot db \cdot dc \cdot dd$ $\left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$ は、これらのパラメータによって

$$dg = 2 \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} \cdot d\theta \cdot \frac{dt}{t^3} \cdot du$$

と表わされる。故に、前節で導入された $\frac{d\chi(g)}{\chi(g)}$, d^1g は、現在の例ではそれぞれ

$$\frac{d\chi(g)}{\chi(g)} = 12 \cdot \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad d^1g = \frac{1}{6} \cdot d\theta \cdot \frac{dt}{t^3} \cdot du$$

で与えられる。

前節の一般論を適用する為に、まず積分

$$I'(f) = \int_{SL(2,\mathbb{R})/\Gamma} \sum_{x \in V'_{\mathbb{Z}}} f(\rho(g)x)\, d^1g$$

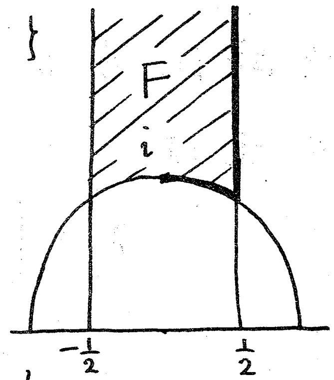
$$(f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}),\ \Gamma = SL(2, \mathbb{Z}),\ V'_{\mathbb{Z}} = V_{\mathbb{Z}} - V_{\mathbb{Z}} \cap S)$$

の絶対収束性を示そう。今の場合それから

$I'(f^*)$の絶対収束性が導かれる。

補題 4.1

$$F = \{z\in\mathbb{C} \;;\; \mathrm{Im}\, z>0,\ -\tfrac12 < \mathrm{Re}\, z \le \tfrac12,\ |z|\ge 1$$
$$\text{かつ } |z|=1 \text{ のとき } \mathrm{Re}\, z \ge 0\}$$



を、複素上半平面におけるSL(2,$\mathbb{Z}$)の標準的基本領域とすれば、

$$\mathfrak{F} = \{k_\theta n(u) a_t \;;\; 0\le\theta<\pi,\ t^2(i+u)\in F\}$$

は SL(2, $\mathbb{Z}$)/Γ の一つの基本領域を与える。

証明.

まず、$\bar{n}(u) = {}^t n(u) = \begin{pmatrix}1 & u\\ & 1\end{pmatrix}$ と置けば、任意の $g\in G^1 = SL(2,\mathbb{R})$ は

$$g = a_t \bar{n}(u) k_\theta \quad (t>0,\ -\infty<u<\infty,\ -\pi<\theta\le\pi)$$

の形にも一意的に表わされることに注意しておく。

さて、$G^1 = SL(2,\mathbb{R})$ は、一次分数変換によって複素上半平面 $\mathfrak{H} = \{z\in\mathbb{C} \;;\; \mathrm{Im}\, z>0\}$ に作用している：

$$g : z \longmapsto g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\left(g = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G^1,\quad z\in\mathfrak{H}\right)$$

そこで、任意の $g \in G'$ に対して ${}^tg(i) \in \mathfrak{H}$ であるから、適当な $\gamma \in \Gamma$ を選んで $\gamma({}^tg(i)) \in F$ とすることができる。$g' = \gamma\,{}^tg$ を $a_t \cdot \bar{n}(u) \cdot k_\theta$ の形に表わそう。必要なら更に $\begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \in \Gamma$ を乗じて、$-\pi < \theta \le 0$ と仮定して良い。この時、$g'(i) = t^2(u+i)$ であるから、

$$g = {}^tg' \cdot {}^t\gamma^{-1} = k_{-\theta} \cdot n(u) \cdot a_t \cdot {}^t\gamma^{-1}$$

$$0 \le -\theta < \pi, \quad t^2(u+i) \in F$$

従って $g \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F} \cdot \gamma$ であることが分った。

次に、$\gamma \neq \gamma'$ なら $\mathfrak{F} \cdot \gamma \cap \mathfrak{F} \cdot \gamma' = \phi$ である事を示したいが、実は例外の点があるのでここでは $\mathfrak{F} \cdot \gamma$, $\mathfrak{F} \cdot \gamma'$ が内点を共有しないことを示しておこう。後の目的の為にはそれで十分である。（厳密な意味での基本領域は $\mathfrak{F}^\circ$ と $\mathfrak{F}$ の間にある）。そこで、$\mathfrak{F}^\circ \cdot \gamma \cap \mathfrak{F}^\circ \cdot \gamma'$ が空でないとし、その点 $g \cdot \gamma = g' \cdot \gamma'$ をとろう。この時 ${}^t\gamma(z) = {}^t\gamma'(z')$ （$z = {}^tg(i)$, $z' = {}^tg'(i) \in F^\circ$）であるから ${}^t\gamma = \pm {}^t\gamma'$ が成立つ。従って、$g = \pm g'$ であるが、θ の範囲から $g = g'$, $\gamma = \gamma'$ となる。

補題 4.2

今Mを、次の性質を持つ$V_{\mathbb{Z}}$の部分集合とする。即ち

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in M \implies x_1\neq 0 \text{ 又は } x_2\neq 0$$

この時、任意の$f\in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$に対して

$$\int_{\mathfrak{F}}\sum_{x\in M}|f(\rho(g)\cdot x)|\,d'g<\infty$$

証明.

いま$t^2(i+u)\in F$とすれば、$t\geq\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $|u|\leq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-1}$であるから、$c>0$及び$l>0$を適当に選べば、

$$\int_{\mathfrak{F}}\sum_{x\in M}|f(\rho(g)\cdot x)|\,d'g\leq\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-l}^{l}du\int_c^\infty\frac{dt}{t}\sum_{x\in M}|f(\rho(k_\theta n(u)a_t)x)|$$

しかるに、任意の$f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$と、任意のコンパクト集合$K\subset GL(V_{\mathbb{R}})$に対して、

$$|f(g\cdot x)|\leq f_0(x)\qquad(\forall g\in K)$$

が成立つような$f_0\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$が取れる事が知られている。この事実を用いれば

$$(\text{上式の右辺})\leq 2\pi\cdot 2l\cdot\int_c^\infty\frac{dt}{t}\sum_{x\in M}f_0(\rho(a_t)\cdot x)$$

$$=4\pi l\int_c^\infty\frac{dt}{t}\sum_{x\in M}f_0(t^3x_1,tx_2,t^{-1}x_3,t^{-3}x_4)$$

今$x\in M$ならx_1,x_2の一方は0でないことに注意すれば、この積分が有限になること

が導かれる。

上の補題において，特に $M = V'_{\mathbb{Z}} = V_{\mathbb{Z}} - V_{\mathbb{Z}} \cap S$ を取れば、$I'(f)$ の絶対収束性が得られる。

以下，L は前節と同様 $V_{\mathbb{R}}$ 内の $\rho(G_{\mathbb{Z}})$-不変な格子を表わすものとする。

既に p. 18，例4で見た如く、

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2, \quad V_i = \{x \in V_{\mathbb{R}} ; (-1)^{i-1} P(x) > 0\} \ (i=1$$

が、G^+ による $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の軌道分解であった。ここで $x \in V_1$ に対しては、isotropy G^+_x は位数 3 の巡回群となり、また V_2 の方には G^+ が単純推移的に作用している事が知られる（新谷[1]，Proposition 2.2）。従って $x \in V_1$ の時、群 $\Gamma_x = G^+_x \cap \Gamma$ の位数 $\varepsilon(x) = \#\Gamma_x$ は 3 又は 1 となる。

今、$\Omega(x) = |P(x)|^{-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_4$ とおけば，$\Omega(x)$ は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上の G-不変な 4-型式で，直接計算によって

$$\Omega(\rho(g) \cdot x) = \begin{cases} dg & (x \in V_1) \\ \frac{1}{3} dg & (x \in V_2) \end{cases}$$

なる事が確かめられる（新谷[1], Proposition 2.4

そして，$x \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ に対し

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon(x)} & (x \in L \cap V_1) \\ \dfrac{1}{3} & (x \in L \cap V_2) \end{cases}$$

となる。よって、定理3.2により、

$$\xi_1(s, L) = \sum_{x \in \Gamma \backslash L \cap V_1} \varepsilon(x)^{-1} |P(x)|^{-s}$$

$$\xi_2(s, L) = \sum_{x \in \Gamma \backslash L \cap V_2} 3^{-1} |P(x)|^{-s}$$

とおけば、これら2つのディリクレ級数は、全平面に解析接続されて次の函数等式をみたす（§2, 例4参照）:

$$\begin{pmatrix} \xi_1(1-s, L) \\ \xi_2(1-s, L) \end{pmatrix} = V(L)^{-1} \Gamma(s)^2 \Gamma(s-\tfrac{1}{6}) \Gamma(s+\tfrac{1}{6}) \cdot 3^{6s} \pi^{-4s}$$

$$\times \frac{1}{18} \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & \sin \pi s \\ 3 \sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(s, L^*) \\ \xi_2(s, L^*) \end{pmatrix}$$

特に $L = V_{\mathbb{Z}}$ と取ろう。

$$h(n) = \#\{ P(x) = n \text{ となる整係数二元三次型式の } SL(2,\mathbb{Z})\text{-同値類} \} \quad (n \neq 0)$$

とおけば、これは有限になることが古典的に知られている。この $h(n)$ を用いて、我々のディリクレ級数は次の様に書き下せる：

$$\xi_1(s, L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} - 3^{-1} \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(9x^2+3xy+y^2)^{2s}}$$

$$\xi_2(s, L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(-n)}{n^s}$$

$\xi_j(s, L^*)$についても類似の表現が可能である。ここにL^*は$L=V_{\mathbb{Z}}$の、内積$\langle\ ,\ \rangle$に関する双対格子で、$L^* = \{x \in V_{\mathbb{Z}}\ ;\ 3|x_2,\ 3|x_3\}$である。

一般論により、$\xi_i(s, L)b(s-1) = \xi_i(s, L)(s-1)^2(s-\frac{5}{6})(s-$
$(i=1,2)$は整函数である。従って$\xi_i(s, L)$は、$s=\frac{5}{6}, \frac{7}{6}$に高々1位の、$s=1$に高々2位の極を持ち得る。以下$L=V_{\mathbb{Z}}$の場合に、$\xi_i(s, L)$が$s=1, \frac{5}{6}$に実際に1位の極を持ち、他では正則な函数であることを示し、同時に留数を計算しよう

既に見た如く、特異点集合$S_{\mathbb{R}}$の軌道分解に

$$S_{\mathbb{R}} = \{0\} \cup S_1 \cup S_2$$

$$S_1 = \{x \in V_{\mathbb{R}}\ ;\ \text{方程式}\ x(u,1)=0\ \text{が三重根を持つ}\}$$

$$S_2 = \{x \in V_{\mathbb{R}}\ ;\ x(u,1)=0\ \text{は二重根を持ち、三重根は持たない}\}$$

で与えられる。群$SL(2, \mathbb{R})$のS_2への作用は、単純推移的である。今$v_4 = {}^t(0,0,0,1) \in S_1$とおけば$v_4$を固定する$SL(2,\mathbb{R})$の部分群は、$N = \{n(u)\ ;\ u \in$
で与えられる。従って、均質空間$SL(2,\mathbb{R})/N$に

写像 $g \longmapsto \rho(g)\cdot v_4$ によって S_1 と同一視される。

今 $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して、

$$\Sigma_1(f) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(\rho(k_\theta a_t)\cdot v_4)\frac{dt}{t^3}\,d\theta$$

とおく(積分は絶対収束する)。次に $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ と $s \in \mathbb{C}$ とに対して、

$$\Sigma_2(f, s) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho(k_\theta a_t n(u))\cdot v_3)\frac{dt}{t^{3+s}}\,d\theta\,du$$

$$v_3 = {}^t(0, 0, 1, 0)$$

とおけば、この積分は $\mathrm{Re}\, s > 1$ なる時絶対収束する。更に $\Sigma_2(f, s)$ は s の有理型函数として全平面に解析接続されて、$s=0$ はその正則点であることが容易に分る。そこで $\Sigma_2(f) = \Sigma_2(f, 0)$ とおこう。

補題 4.3

いま f を、$V_{\mathbb{R}}$ 上の C^∞-函数であって、その台はコンパクトで $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ に含まれるものとする。(即ち $f \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}})$) そうすれば次式の積分は絶対収束して右辺に等しい:

$$(\star)\quad \int_{SL(2,\mathbb{R})/\Gamma} \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}}^* \cap S} f^*(\rho^*({}^t g)\cdot x)\,dg = f^*(0)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^2}{6} + \Sigma_1(f^*)\cdot\frac{1}{6}\cdot\zeta\left(\frac{2}{3}\right) + \Sigma_2(f^*)\,\frac{3}{6}\cdot\zeta(-1)$$

ここに、f^* は f のフーリエ変換である:

$$f^*(x^*) = \int_{V_{\mathbb{R}}} f(x)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, x^*\rangle}\, dx$$

証明に先立って、この補題を応用して $\xi_i(s,L)$ の留数が計算されることを示そう。

以下、s の２つの函数 $F_1(s), F_2(s)$ の差が整函数である時は $F_1(s) \sim F_2(s)$ と書くことにする。前節 p.51 の式(!)により、$f \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}})$ ならば

$$\sum_{i=1}^{2} \xi_i(s,L)\,\Phi_i(f, s-1) = Z(f, L, s)$$

$$\sim \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g)\le 1}} \chi(g)^{s-1} \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}}^* \cap S} f^*(\rho^*(g)\cdot x)\, dg$$

$$= \int_{\substack{G^+/SL(2,\mathbb{R}) \\ \chi(g)\le 1}} \frac{d\chi(g)}{\chi(g)}\cdot \chi(g)^s \int_{SL(2,\mathbb{R})/\Gamma} \sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}^*\cap S} (f_g)^*(\rho^*(g_1)x)\, d'g_1$$

（但し $f_g(x) \underset{def}{=} f(\rho(g)\cdot x)$）

$$= \int_{\substack{G^+/SL(2,\mathbb{R}) \\ \chi(g)\le 1}} \chi(g)^s \frac{d\chi(g)}{\chi(g)} \left\{ (f_g)^*(0)\cdot \frac{\pi^2}{36} + \frac{1}{6}\zeta\left(\tfrac{2}{3}\right)\Sigma_1((f_g)^*) + \frac{3}{6}\zeta(-1)\Sigma_2((f_g)^*) \right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{36(s-1)} f^*(0) + \frac{\zeta(\frac{2}{3})}{6(s-\frac{5}{6})}\Sigma_1(f^*) + \frac{\zeta(-1)}{2(s-1)}\Sigma_2(f^*)$$

（ $(f_g)^*(0) = \chi(g)^{-1} f^*(0)$, $\Sigma_1((f_g)^*) = \chi(g)^{-\frac{5}{6}}\Sigma_1(f^*)$,
$\Sigma_2((f_g)^*) = \chi(g)^{-1}\Sigma_2(f^*)$ に注意 ）[注5]

一方、

$$f^*(0) = \Phi_1(f,0) + \Phi_2(f,0)$$

$$\Sigma_1(f^*) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})(2\pi)^{\frac{1}{3}}}{3\Gamma(\frac{2}{3})}\left\{ \sqrt{3}\,\Phi_1\left(f, -\tfrac{1}{6}\right) + \Phi_2\left(f, -\tfrac{1}{6}\right) \right\}$$

$$\Sigma_2(f^*) = -\frac{2}{3}\pi^2\{3\Phi_1(f,0) + \Phi_2(f,0)\}$$

であることが示される（新谷[1], Prop. 2.5, 2.6）。

よって係数を比較することにより

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \xi_1(s,L) = \frac{\pi^2}{36} + \frac{1}{2}\cdot\zeta(-1)\cdot\left(-\frac{2}{3}\pi^2\right)\cdot 3$$

$$= \frac{\pi^2}{9} \qquad \left(\zeta(-1) = -\frac{1}{12}\right)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{5}{6}} \xi_1(s,L) = \zeta\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(2\pi)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

を得る。

同様にして $\xi_2(s,L)$ の留数も計算される。

補題4.3の証明.

いま $f \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}})$ とすれば，Poisson の和公式によって

$$\chi(g)^{-1}\sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}^*\cap S^*} f^*(\rho^*(g)\cdot x)$$

$$= \sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}-V_{\mathbb{Z}}\cap S} f(\rho(g)\cdot x) - \chi(g)^{-1}\sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}^*-V_{\mathbb{Z}}^*\cap S^*} f^*(\rho^*(g)\cdot x)$$

よって、補題 4.2 により

$$\int_{SL(2,\mathbb{R})/\Gamma} \left|\sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}^*\cap S^*} f^*(\rho^*(g)\cdot x)\right| d'g < \infty$$

が結論される。即ち、式(☆)の左辺の積分は絶対収束する。

次に、$\Lambda = \{(0,0,3m,n)\ ;\ (m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}\}$ とおけば，

$$V_{\mathbb{Z}}^{*} \cap S^{*} = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{\gamma \in \Gamma/\Gamma \cap (\pm N)} \gamma\Lambda \quad (\text{disjoint union})$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ u & 1 \end{pmatrix} ; u \in \mathbb{R} \right\}$$

となる（新谷[1], Proposition 2.10）。ここで更に $M = \bigcup_{\gamma \in \Gamma - \Gamma\cap(\pm N)/\Gamma\cap(\pm N)} \gamma\Lambda$ とおけば、M は補題4.2の条件を満足する。よって，$\mathfrak{F}$ を補題4.1で導入された $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ の基本領域とすれば、

$$\int_{\mathfrak{F}} \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma\cap(\pm N)/\Gamma\cap(\pm N)} \sum_{x \in \Lambda} | f^{*}(\rho^{*}(g\cdot\gamma)\cdot x) | \, d'g < \infty$$

従って，問題の積分は

$$f^{*}(0)\cdot \int_{\mathfrak{F}} d'g + \int_{\bigcup_{\gamma \in \Gamma/\Gamma\cap(\pm N)} \mathfrak{F}\gamma} \sum_{x \in \Lambda} f^{*}(\rho^{*}(g)x)\, d'g$$

$$= f^{*}(0)\cdot \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{12}\cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^3} \int_0^1 du \sum_{x \in \Lambda} f^{*}(\rho^{*}(k_\theta a_t n(u))x)$$

に等しい。この最後の積分が $(0,2\pi)\times(0,\infty)\times(0,1)$ で絶対収束することも同時に証明された。

さて，$s \in \mathbb{C}$ をパラメータとする積分

$$(\dagger) \quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{3+s}} \int_0^1 du \sum_{x \in \Lambda} f^{*}(\rho^{*}(k_\theta a_t n(u))\cdot x)$$

は，$\mathrm{Re}\, s \geq 0$ なる時に絶対収束して，$s=0$ なるとき $\frac{1}{12}$ なる因子を除いて上式右辺の第2項と一致する。

もしRe s>2であるならば，被積分函数を表わす級数の各項をその絶対値で置き替えた物もやはり収束する。よって，Re s>2ならば

$$\tilde{f}^*(x) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_0^{2\pi} f^*(\rho^*(k_\theta)x)\,d\theta$$

とおいたとき，(†)は

$$\int_0^\infty\int_0^1 \sum_{x\in\Lambda} \tilde{f}^*(\rho^*(a_t\cdot n(u))x)\,\frac{dt}{t^{3+s}}\cdot du$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \int_0^\infty \tilde{f}^*(0,0,0,t^{-3}n)\,\frac{dt}{t^{3+s}}$$

$$+ \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}-\{0\}\\ n\in\mathbb{Z}}} \int_0^\infty\int_0^1 \tilde{f}^*(0,0,3t^{-1}m,\ t^{-3}(3mu+n))\,\frac{dt}{t^{3+s}}\,du$$

$$= 2\zeta\left(\frac{s+2}{3}\right)\int_0^\infty \tilde{f}^*(0,0,0,t^{-3})\,\frac{dt}{t^{3+s}}$$

$$+ \sum_{m\in\mathbb{Z}-\{0\}} \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}^*(0,0,mt^{-1},\ t^{-3}u)\,\frac{dt}{t^{3+s}}\cdot du$$

$$= 2\cdot\zeta\left(\frac{s+2}{3}\right)\int_0^\infty \tilde{f}^*(0,0,0,t^{-3})\,\frac{dt}{t^{3+s}}$$

$$+ 2\cdot\zeta(s-1)\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}^*(0,0,t^{-1},u)\,\frac{dt}{t^{s}}\cdot du\cdot 3^{1-s}$$

に等しい。

これを s=0 にまで解析接続することにより，

$$\int_{SL(2,\mathbb{R})/\Gamma} \sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}^*\cap S} f^*(\rho^*(g)\cdot x)\,d'g$$

$$= \frac{\pi^2}{36}\cdot f^*(0) + \frac{1}{6}\cdot\zeta\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\Sigma_1(f^*) + \frac{3}{6}\cdot\zeta(-1)\cdot\Sigma_2(f^*)$$

を得る。

最後に数論への応用について触れておこう。

Landau は、正項数列 $\{a_n\}$ の部分和 $\sum_{a_n \le x} a_n$ の漸近評価を，付随したディリクレ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}$ の函数論的性質から導く方法を与えた（Göttingen Nachrichten, 1915）。彼の方法を適用すれば、

$$\sum_{n=1}^{x} h(n) = \frac{\pi^2}{9} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{15} \zeta\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(2\pi)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot x^{\frac{5}{6}} + O\left(x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}\right)$$

$$(x \to \infty)$$

を得る。

一方，Davenport は，Q 上既約な、判別式の値 n $(n \neq 0)$ をとる整係数二元三次型式の類数を $h_i(n)$ とした時に

$$\sum_{n=1}^{x} h_i(n) = \frac{\pi^2}{36} \cdot x + O\left(x^{\frac{15}{16}}\right)$$

を示した（J. London Math. Soc. 1952）。

また一方，$h_r(n)$ を、判別式 n の可約な整係数二元三次型式の類数とすると，Landau の方法が適用できて

$$\sum_{n=1}^{x} h_r(n) = \sum_{n=1}^{x} (h(n) - h_i(n))$$
$$= \frac{\pi^2}{12} \cdot x + O\left(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right)$$

が得られる。従って、Davenport の評価は次の如く改良される。

$$\sum_{n=1}^{x} h_1(n) = \frac{\pi^2}{36}\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{15}\zeta\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(2\pi)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot x^{\frac{5}{6}} + O\left(x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}\right)$$

$$(x \to \infty)$$

函数 $\xi_1(s, L)$ は、$s=1$ に留数 $\frac{\pi^2}{9}$ の一位の極を持つ。留数の計算の際に見た如く、$\frac{\pi^2}{9}$ のうち $\frac{\pi^2}{36}$ は特異軌道 $\{0\}$ からの、$\frac{\pi^2}{12}$ は特異軌道 S_1 からの寄与である。それらが各各既約或いは可約の整係数二元三次型式の類数の部分和の漸近展開における主項の係数を与えていることは面白い。

（完）

注1.　この予想はMicrolocal Calculusの方法により、更に精密な形で解決された。

注2.　ここで$P(x)$は実係数の多項式であるとしてよい。一般に(G, ρ, V)が$\mathbb{C}$の部分体k上で定義されている時には，基本相対不変式P, Qをk-係数多項式にとることができる。実際，いま拡大$\mathbb{C}/k$のGalois群の元σを有理函数に作用させたものを$R^{\sigma}(x)$と書けば，$P(\rho(g)\cdot x) = \chi(g)P(x)$ $(g \in G)$より$P^{\sigma}(\rho(g)x) = \chi^{\sigma}(x)P^{\sigma}(x)$ $(g \in G)$。故に，P^{σ}は指標χ^{σ}に対応する相対不変式である。他方次数の比較から$P^{\sigma} = {}^{\exists}c_{\sigma} \cdot P$，従ってまた$\chi^{\sigma} = \chi$。故に，定数因子を除き$P$は（同様に$Q$も）$k$-係数多項式。とくに$b$函数も$k$-係数多項式となる。

実は，$b(s)$は常に有理数体で因数に分解することが知られる（柏原正樹，Inventiones Math. 38 (1976) 33）。

注3.　Microlocal Calculusの著しい応用として，因子$t_{ij}(s)$を決定するアルゴリズムが得られている。文献

注4.　我々は、群Gがreductiveと仮定しているから、命題1.5(i)と同じ議論で$Q(x) = \overline{P}(x)$となる座標がとれる。このときは$b'(s) = \overline{b}(s)$が明らかに成立つ。座標を変更してP, Qがそれぞれc_1P, c_2Qに変化したとすれば、こ

れらは共通のスカラー倍(c_1c_2)されるに過ぎず，従って つねに $b'(s)=\bar{b}(s)$。今の場合には (G,ρ,V)が$\mathbb{R}$上定義されているから，注2により $\bar{b}(s)=b(s)$にとれる。ゆえに $b'(s)=b(s)$が成立つ。

注5. $g\in G$ に対して $f_g(x)\equiv f(\rho(g)x)$ とおいたとき，次の式が成立するからである：

$$\Sigma_1(f_g)=\chi(g)^{-\frac{1}{6}}\Sigma_1(f),\ \Sigma_2(f_g)=\Sigma_2(f).$$

参考文献.

佐藤-新谷 [1] 概均質ベクトル空間の理論.
「数学の歩み」15巻1号, 1970, pp.85-157

[2] On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces,
Ann. of Math. vol 100, No 1, 1974
pp. 131 - 170

新谷卓郎 [1] On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms,
J. Math. Soc. Japan, vol. 24, No. 1
1972, pp. 132-188

木村達雄 [1] 既約な概均質ベクトル空間の研究.
東京大学修士論文, 1973

柏原-木村 [1] symbolの理論と b-函数
名古屋大学における講義ノート, 1974.

佐藤-木村 [1] Micro-local Analysis 入門
名古屋大学集中講義録, 1974
(to appear)

柏原－三輪 [1] Microlocal calculus と概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換
京大数理研及び東洋紡堅田研究所における講義録.
1974.

Gel'fand-Šilov [1] Generalized Functions, vol. 1
Academic Press.

H. Weyl [1] Classical Groups
Princeton