数理解析研究所講究録
第 497 巻 1983 年 73-76

裏返変換によるb-関数の変換公式について

新谷卓郎 述
木村達雄 記

私が修士二年の頃，新谷先生がプリンストン研究所におられ，お手紙で，裏返変換によるb-関数の変換公式の証明を教えていただいた事があります。その後，お会いした時，これについては論文を書くつもりだと何回か言っておられたのですが，遂にその機会を失ないましたので，ここにその手紙の内容を公表します。但し，これは私の東大修士論文（1973）の164頁～167頁に"新谷先生の結果"として書いたもののコピーです。手紙そのものは，今みつかりません。

定理（新谷卓郎）　$V = n$次元ベクトル空間，$G \subset GL(V)$でVはG-moduleとして既約とする。$m < n-m$とする。$(G \times GL(m), V \otimes \mathbb{C}^m)$が既約正則概均質ベクトル空間，$f(x)$をその既約相対不変多項式，$b(s)$をその$b$-関数とする。その時，裏返変換$(G \times GL(n-m), V^* \otimes \mathbb{C}^{n-m})$も既約正則概均質ベクトル空間で，その相対不変式$\tilde{f}(y)$の$b$-関数$\tilde{b}(s)$は，

$$\tilde{b}(s) = b(s) \prod_{i=0}^{\frac{d}{m}-1} \prod_{j=m}^{n-m-1} \left(\frac{d}{m}s - i + j\right) \quad (d = \deg f)$$

で与えられる。

（証明の大略） n, m（$0<m<n-m<n$）を正整数とし x_{ij}（$1\leq i, j\leq n$）を n^2 個の不定元とする。

次の諸記号を導入する。

$\Lambda=\{\lambda=(i_1,\cdots,i_m)\ ;\ 0<i_1<\cdots<i_m\leq n\}$

$\Lambda'=\{\lambda'=(j_1,\cdots,j_{n-m}\ ;\ 0<j_1<\cdots<j_{n-m}<n\}$

$\lambda=(i_1,\cdots,i_m)$ に対し，

$$\operatorname{sgn}\lambda \overset{def}{=} (-1)^{i_1+\cdots+i_m},\quad x_\lambda \overset{def}{=} \det\begin{pmatrix} x_{i_1 1} & \cdots & x_{i_1 m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_m 1} & \cdots & x_{i_m m}\end{pmatrix}$$

$\lambda'=(j_1,\cdots,j_{n-m})$ に対して

$$\operatorname{sgn}\lambda' \overset{def}{=} (-1)^{j_1+\cdots+j_{n-m}},\quad x_{\lambda'} \overset{def}{=} \det\begin{pmatrix} x_{j_1\, m+1}, & \cdots, & x_{j_1 n} \\ \vdots & & \\ x_{j_{n-m}\, m+1}, & \cdots, & x_{j_{n-m} n}\end{pmatrix}$$

とする。 次に R を $\{x_\lambda\ ;\ \lambda\in\Lambda\}$ と 1 で生成される，mn 個の不定元 $\{x_{ij}\ ;\ 1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m\}$ に関する多項式環の部分環とし，R_k をその mk 次斉次部分とする。 次に

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \overset{def}{=} \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i_1 1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_1 m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{i_m 1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_m m}}\end{pmatrix}$$

とおき，T を $\{\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\ ;\ \lambda\in\Lambda\}$ と 1 で生成される微分作用素のなす環とし，T_k をその mk 次斉次部分とする。 Λ のかわりに Λ'，x_λ，$\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ のかわりに $x_{\lambda'}$，$\frac{\partial}{\partial x_{\lambda'}}$ を用いて，R'，T'，R'_k，T'_k を同様に定義する。

$g\in GL(n)$ に対し，x を $n\times m$ 行列とみて $g\cdot(x_\lambda)\overset{def}{=}(gx)_\lambda$ と定義すれば，R は $GL(n)$-module になる。そして各 R_k

は$GL(n)$-submoduleになる。R_kとT_kを，$\langle Q(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}), P(x_\lambda)\rangle = Q(\frac{\partial}{\partial x_\lambda})P(x_\lambda)$によって，互いに他のdualとみて，$T_k$に$R_k$とcontragredient（反傾的）な$GL(n)$-moduleの構造を入れる。　次に，$g(x_{\lambda'}) = ({}^t g^{-1} x)_{\lambda'} \cdot \det g$　と定義する事によりR'に$GL(n)$-module structureを定義し，それにdualな$GL(n)$-module structureをT'に導入する。

いま，$\lambda \in \Lambda$に対して，$\lambda' \in \Lambda'$をλに"complementary な元"（即ち，$\{\lambda, \lambda'\} = \{1, 2, \cdots, n\}$）とすれば，

$$x_\lambda \mapsto \mathrm{sgn}\,\lambda' \cdot x_{\lambda'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mapsto \mathrm{sgn}\,\lambda' \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\lambda'}}$$

はそれぞれ，$R \to R'$，$T \to T'$への階別を保つalgebra isom.に拡張される。しかもこれは$GL(n)$-module isom.になっている。

（この命題の証明には，Weylのclassical groupsの'$SL(n)$のvector invariantsに関する第二基本定理"の節にあるGrassmann varietyの定義方程式の記述を用いる。）

写像$T_k \otimes R_l \xrightarrow{\varphi} R_{l-k}$を，$Q(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}) \otimes P(x_\lambda) \mapsto Q(\frac{\partial}{\partial x_\lambda})P(x_\lambda)$で定義する。　写像$T_{k'} \otimes R_l' \xrightarrow{\varphi'} R_{l-k}'$も同様に定義する。

これらは，G-module homomorphismである。

φと$\tau^{-1} \circ \varphi' \circ \tau' \otimes \tau$は，$T_k \otimes R_l \to R_{l-k}$への二つのG-module homomorphismである。

しかしながらR_k, T_kは既約$GL(n)$-moduleであり，しかもR_{l-k}は$T_k \otimes R_l$の$GL(n)$-既約moduleへの分解

に multiplicity 1 で表われる。（$T_k \otimes R_\ell$ の既約 modules へ の分解は Littlewood-Richardson rule によって explicit に求まる。）

従って，$\varphi = c\,\tau^{-1}\circ\varphi'\circ\tau'\otimes\tau$ なる定数 c が存在する。

特殊な場合に Capelli's identity を用いて両辺の作用を調べてみると，$c^{-1} = \prod_{i=0}^{k-1}\prod_{j=m}^{n-m-1}(\ell - i + j)$ を得る。

これから $\hat{b}(s) = \prod_{i=0}^{\frac{d}{m}-1}\prod_{j=m}^{n-m-1}\left(\frac{d}{m}s - i + j\right) b(s)$ を得る。//