数理解析研究所講究録
第 497 巻 1983 年 77-95

新谷卓郎氏の「裏返し変換と相対不変式のFourier変換」についての講演（1974年10月25日）

新谷卓郎 述

高知大理　室 政和 記

以下の記録は、故新谷卓郎氏が 1974年10月25日、数理解析研究所で行われた、概均質ベクトル空間に関する集会で話された講演の、ほぼ忠実な再現である。新谷氏がなくなられた現在、この内容が、新谷氏自身の手でまとめられ発表される機会は失われてしまった。しかしながら、基本的な結果であり、今後のためにもこれを公けにしておくことは重要であると思われるので、あえて当時の出席者のノートから再現を試みた。例を含めて、内容はすべて新谷氏の話されたものであるが、8年も前の記録であるので、思わぬ誤解があるかも知れない。それについては、すべて筆記者の責任であることを明記しておく。

1. $V_{\mathbb{C}} = M(n, m, \mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上の $n\times m$ 行列全体のなすベクトル空間で、$H_{\mathbb{C}}$ は $GL(n, \mathbb{C})$ の connected linear

algebraic subgroup であるとする。$x \in V_{\mathbb{C}}$ に対して,

$$(1) \qquad x \longmapsto h\,x\,g^{-1}$$

と $G_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{C}} \times GL(m, \mathbb{C}) \ni (h, g)$ が作用している。ここで,
$(G_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ が $\mathbb{C}$ 上の正則概均質ベクトル空間であると仮定する。さらに $n > 2m$ であることを仮定する。

$V_{\mathbb{C}}^{ウ} = M(n, n-m, \mathbb{C})$ とおき, $G_{\mathbb{C}}^{ウ} = H_{\mathbb{C}} \times GL(n-m, \mathbb{C}) \ni (h, g)$ とおく。(ここで, 右上のウは"裏返し"の意味で, 便宜上の記号である。) $y \in V_{\mathbb{C}}^{ウ}$ に対して,

$$(2) \qquad y \longmapsto {}^t h^{-1}\,y\,g^{-1}$$

の作用によって再び正則概均質ベクトル空間が得られる。
$(G_{\mathbb{C}}^{ウ}, V_{\mathbb{C}}^{ウ})$ を裏返し変換 (castling transform) によって得られた概均質ベクトル空間と呼ぶ。

$H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{C}} \cap GL(n, \mathbb{R})$ として, $G_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}} \times GL(m, \mathbb{R})$ とおくと, 自然に $(G_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ に real structure が入る。すなわち, $V_{\mathbb{R}} = M(n, m, \mathbb{R})$, $G_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}} \times GL(m, \mathbb{R})$ として, (1) の作用によって $(G_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ は $(G_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ の real form になる。同様に $V_{\mathbb{R}}^{ウ} = M(n, n-m, \mathbb{R})$, $G_{\mathbb{R}}^{ウ} = H_{\mathbb{R}} \times GL(n-m, \mathbb{R})$ と書くことによって $(G_{\mathbb{R}}^{ウ}, V_{\mathbb{R}}^{ウ})$ は $(G_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ の real form で, これを $(G_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ を裏返し変換することによって得られた概均質ベクトル空間とよぶ。

次の仮定をおく。

(3) $(G_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ は, singular set $S_{\mathbb{C}}$ を持ち, それは $V_{\mathbb{C}}$ 内の irreducible hypersurface である。(singular set とは $V_{\mathbb{C}}$ の $G_{\mathbb{C}}$-open orbit の補集合のことである。)

このとき, 不変式論の基本定理 (H. Weyl ; Classical groups [2] Chapter 2.) によって,

(4) $$S_{\mathbb{C}} = \{ x \in V_{\mathbb{C}} ;\ P(\Delta_1(x), \cdots, \Delta_{\binom{n}{m}}(x)) = 0 \},$$

と書くことができることが示される。ここで, $P(\delta_1, \cdots, \delta_{\binom{n}{m}})$ は $\binom{n}{m}$-変数の同次多項式であり, $\Delta_i(x)$ は, x (= $n \times m$ 行列) の m 次小行列式であるところの $\binom{n}{m}$ 個の $V_{\mathbb{C}}$ 上の m 次同次多項式である。$P(\delta_1, \cdots, \delta_{\binom{n}{m}})$ が, 次数 d の多項式であるとき, $P(x) = P(\Delta_1(x), \cdots, \Delta_{\binom{n}{m}}(x))$ は degree $d \cdot m$ の同次多項式であり, $(G_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ の相対不変式である。Real form に制限したときにも同様のことが成立し, $S_{\mathbb{R}} = \{ x \in V_{\mathbb{R}} ;\ P(\Delta_1(x), \cdots, \Delta_{\binom{n}{m}}(x)) = 0 \}$ である。一方, (3) の仮定から, $(G_{\mathbb{C}}^{\vee}, V_{\mathbb{C}}^{\vee})$ も singular set $S_{\mathbb{C}}^{\vee}$ は, irreducible hypersurface であり, それは,

$$(5)\quad \Omega_{\mathbb{C}}^{\flat} = \{ y \in V_{\mathbb{C}}^{\flat} ;\ P(\Delta_1^*(y), \cdots, \Delta^*_{\binom{n}{n-m}}(y)) = 0 \}$$

と書ける。（ $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ である。）ここで，$\Delta_i^*(y)$ は y（$= n \times (n-m)$ 行列）の $(n-m)$ 次小行列式であるところの $(n-m)$ 次同次多項式である。そしてそれらは，

$$(6)\qquad \det(x, y) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{m}} \Delta_i(x)\Delta_i^*(y)$$

によって定義されるものであるとする。(5)を real form に制限することによって，

$$(7)\quad \Omega_{\mathbb{R}}^{\flat} = \{ x \in V_{\mathbb{R}}^{\flat} ;\ P(\Delta_1^*(y), \cdots, \Delta^*_{\binom{n}{m}}(y)) = 0 \}$$

が得られる。$V_{\mathbb{R}}$ 上に内積を，

$$(8)\quad \langle x, x' \rangle = tr({}^t x \cdot x') \qquad (x, x' \in V_{\mathbb{R}})$$

によって入れ，$V_{\mathbb{R}}^{\flat}$ 上に内積を，

$$(9)\quad \langle y, y' \rangle = tr({}^t y \cdot y') \qquad (y, y' \in V_{\mathbb{R}}^{\flat})$$

によって入れることによって，$V_{\mathbb{R}}$，$V_{\mathbb{R}}^{ウ}$ を各々の dual space $V_{\mathbb{R}}^*$，$V_{\mathbb{R}}^{*ウ}$ と同一視することができる。すると，$V_{\mathbb{R}}^*$，$V_{\mathbb{R}}^{*ウ}$ は，$G_{\mathbb{R}}$ の作用 $x' \longmapsto {}^t h^{-1} x' {}^t g$ $(x \in V_{\mathbb{R}}^*,\ (h,g) \in G_{\mathbb{R}})$ 及び $y' \longmapsto h\, y' {}^t g'$ $(y \in V_{\mathbb{R}}^{*ウ},\ (h,g') \in G_{\mathbb{R}}^{ウ})$ によって 概均質ベクトル空間になる。このようにして得られた概均質ベクトル空間は，やはり singular set が irreducible hypersurface になり

$$(10)\quad S_{\mathbb{R}}^{*} = \{ x' \in V_{\mathbb{R}}^*\ ;\ Q(\Delta_1(x'), \cdots, \Delta_{\binom{n}{m}}(x')) = 0 \},$$

$$S_{\mathbb{R}}^{*ウ} = \{ y' \in V_{\mathbb{R}}^*\ ;\ Q(\Delta_1^*(y'), \cdots, \Delta_{\binom{n}{m}}^*(y')) = 0 \},$$

と，d 次の polynomial Q をもって書ける。特に $H_{\mathbb{R}}$ が reductive であれば，Q と P は同じにとることができる。

2. 次に $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$，及び $V_{\mathbb{R}}^{ウ} - S_{\mathbb{R}}^{ウ}$ が，どのような Connected Components に分かれるか見てみよう。

$$(11)\quad P\ ;\ V_{\mathbb{R}}' = \{ x \in V_{\mathbb{R}}\ ;\ \mathrm{rank}\, x = n \} \longrightarrow \mathrm{Grass}_m(\mathbb{R}^n)$$

の map を考える。ここに，$\mathrm{Grass}_m(\mathbb{R}^n)$ は，$\mathbb{R}^n$ の中の m 次元

部分空間のなす空間である。$V_{\mathbb{R}}$の点 x に対して，x の第1列から第 m 列によって張られる m 次元ベクトル空間は $\mathbb{R}^n$ の中の m 次元部分空間とみなすことができる。この m 次元部分空間には，$GL(m,\mathbb{R})$ が作用しているが，それは $\mathbb{R}^n$ の部分空間そのものは変えず，基底の変換を行うためだけに作用する。そこで $V_{\mathbb{R}}'$ の各点は $Grass_m(\mathbb{R}^n)$ の一点に対応している。$H_{\mathbb{R}}$ が $GL(n,\mathbb{R})$ の scalar multiplication を含んでいる subgroup であるとすると，$Grass_m(\mathbb{R}^n)$ には，$GL(n,\mathbb{R})$ の subgroup $H_{\mathbb{R}}$ が自然に作用している。これは $V_{\mathbb{R}}$ への作用と compatible である。$V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}\subset V_{\mathbb{R}}'$ であるから，自然に $V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}$ から $Grass_m(\mathbb{R}^n)$ への map が定義され，その image は $Grass_m(\mathbb{R}^n)$ の中の open set になっている。そこで

$$
\begin{aligned}
(12)\quad Grass_m(\mathbb{R}^n)' &= \text{Image of } V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}} \\
&= W_1\cup\cdots\cup W_l\cup W_{l+1}\cup\cdots\cup W_{l+l'}
\end{aligned}
$$

と $H_{\mathbb{R}}^+$-orbits（$H_{\mathbb{R}}^+$ は $H_{\mathbb{R}}$ の単位元を含んだ connected component）に分解したとする。これは，$Grass_m(\mathbb{R}^n)'$ の connected component decomposition である。ここで，W_i の inverse image を $\widetilde{V}_i=p^{-1}(W_i)$ とおくと，$\widetilde{V}_i$ は，$G_{\mathbb{R}}^+=H_{\mathbb{R}}^+\times GL^+(m,\mathbb{R})$ の作用によってひとつの orbit (single orbit) があるいは2つ

のorbitsより成る（double orbit）かのいずれかである。我々は $\widetilde{V}_1, \cdots, \widetilde{V}_\ell$ は single orbit, $\widetilde{V}_{\ell+1}, \cdots, \widetilde{V}_{\ell+\ell'}$ は double orbit で，$\widetilde{V}_{\ell+i} = V_{\ell+i}^{+} \cup V_{\ell+i}^{-}$ と書けるものとする。

実際このことは，次のようにしてわかる。$P(x) \in W_i$ として $H_{P(x)}^{+}$ を $P(x) \in Grass_m(\mathbb{R}^n)$ における isotropy subgroup とする。このとき，適当な $GL(n, \mathbb{R})$ の元 u をとって，$u \cdot P(x) = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$（$* \in M(m, \mathbb{R})$ 0 は $n-m \times m$ のゼロ行列）と書くことができる。したがって，

$$(13) \qquad u\, H_{P(x)}^{+}\, u^{-1} = \left\{ \begin{array}{cc} \overbrace{}^{m} & \overbrace{}^{n-m} \end{array} \begin{pmatrix} *_1 & *_2 \\ 0 & *_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \right\}$$

と書ける。このとき，

(14) $*_1$ の determinant が常に positive であるならば，
$\widetilde{V}_i$ は double orbit,
$*_1$ の determinant が negative になりうるならば，
$\widetilde{V}_i$ は single orbit,

である。なぜならば，$x_1, x_2 \in \widetilde{V}_i$ で $P(x_1) = P(x_2) = P(x)$ であったとする。x_1 の第1列ベクトルから第m列ベクトルのなす orientation と，x_2 のそれが異っているとき，x_1, x_2 が $H_{P(x)}^{+} \times GL^{+}(m, \mathbb{R})$ の作用で移りうることと，$u\, H_{P(x)}^{+}\, u^{-1}$ の $*_1$ が negative determinant になることは同値であるからである。x_1 と x_2 が同じ orientation を持っているときは，$GL^+(m,\mathbb{R})$ の作用で，両者は移りうる。

したがって，

$$(15)\quad V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2 \cup \cdots \cup \tilde{V}_l \cup V_{l+1}^{+} \cup V_{l+1}^{-} \cup \cdots \cup V_{l+l'}^{+} \cup V_{l+l'}^{-}$$

と，$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は connected components に分解される。

一方 $\mathbb{R}^n$ とその dual space $\mathbb{R}^{n*}$ を

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \begin{array}{l} x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n*} \end{array}$$

によって同一視すると，次の同型写像

$$(16)\quad Grass_m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} Grass_{n-m}(\mathbb{R}^{n*}).$$

が自然に，直交補空間をとるという作用で定義される。したがって $W_i \longmapsto W_i^{\vee}$ を自然に対応させることができて，$V_{\mathbb{R}}^{\vee} - S_{\mathbb{R}}^{\vee}$ の connected component 分解も $H_{P(x)}^{+}$ が変化しないことから同様にして行うことができて，

$$(17)\quad V_{\mathbb{R}}^{\vee} - S_{\mathbb{R}}^{\vee} = \tilde{V}_1^{\vee} \cup \tilde{V}_2^{\vee} \cup \cdots \cup \tilde{V}_l^{\vee} \cup V_{l+1}^{\vee +} \cup V_{l+1}^{\vee -} \cup \cdots \cup V_{l+l'}^{\vee +} \cup V_{l+l'}^{\vee -}$$

が得られる。

さて各 component $\tilde{V}_i$ 上に support を持つ相対不変超函数を次

のように定義する。

(18) $$|P(x)|^{s}_{i+} = \begin{cases} |P(x)|^{s} & x \in \widetilde{V_i} \\ 0 & x \notin \widetilde{V_i} \end{cases} \text{ if } i \leq l$$
$$\qquad\qquad \begin{cases} |P(x)|^{s} & x \in V_i^{+} \cup V_i^{-} \\ 0 & x \notin V_i^{+} \cup V_i^{-} \end{cases} \text{ if } i \geq l+1$$

$$|P(x)|^{s}_{i-} = \begin{cases} 0 & & \text{if } i \leq l \\ |P(x)|^{s} & x \in V_i^{+} & \\ -|P(x)|^{s} & x \in V_i^{-} & \text{if } i \geq l+1 \\ 0 & x \notin V_i^{+} \cup V_i^{-} & \end{cases}$$

$\widetilde{V_i^{\vee}}$ 上に support を持つ相対不変超函数 $|P^{\vee}(y)|^{s}_{i\pm}$ も同様にして定義することができる。また $V_{\mathbb{R}}^{*}$, $V_{\mathbb{R}}^{*\vee}$ 上においてもそれぞれ，$|Q(x')|^{s}_{i\pm}$，$|Q^{\vee}(y')|^{s}_{i\pm}$ を定義することができる。いずれの場合にも $Re(s) \gg 0$ のとき連続函数として定義された超函数を s について analytic に全平面に解析接続することによって，すべての s について超函数が定義できる。

このとき，正則概均質ベクトル空間の理論から次のことが得られる。

(19) $$\int_{V_{\mathbb{R}}} |P(x)|^{s-\frac{n}{d}}_{i\pm} \exp(2\pi\sqrt{-1}\, tr({}^{t}x \cdot x'))\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{l+l'} a_{ij}^{\pm}(s)\, |Q(x)|_{j\pm}^{-s},$$

$$\int_{V_{\mathbb{R}}} |P^{\vee}(y)|_{i\pm}^{s-\frac{n}{d}} \exp(2\pi\sqrt{-1}\, tr({}^t y \cdot y'))\, dy$$

$$= \sum_{j=1}^{l+l'} a_{ij}^{\pm\vee}(s)\, |Q^{\vee}(y)|_{j\pm}^{-s},$$

ここで，$a_{ij}^{\pm}(s)$，$a_{ij}^{\pm\vee}(s)$ は s についての有理型函数であり，dx，dy は $M(n,m,\mathbb{R})$，$M(n-m,m,\mathbb{R})$ 上に自然に定義されるユークリッド測度である。このとき次の関係式が得られる。

<u>定理</u>

(20) $$v_m^{+}(s) = (2\pi)^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot 2^m \cdot (2\pi)^{-ms}\, \Gamma(s)\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-m+1)$$
$$\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \cdots\cdots \cdot \sin\left(\frac{\pi(s-m+2)}{2}\right)$$
$$v_m^{-}(s) = i^m (2\pi)^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot 2^m \cdot (2\pi)^{-ms}\, \Gamma(s)\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-m+1)$$
$$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi(s-1)}{2}\right) \cdot \cdots\cdots \cdot \sin\left(\frac{\pi(s-m+1)}{2}\right)$$

とおいたとき，

(21) $$a_{ij}^{\pm\vee}(s) = \frac{v_{m-n}^{\pm}(ds)}{v_m^{\pm}(ds)}\, a_{ij}^{\pm}(s)$$

が得られる。

この定理によって $|P(x)|_{i\pm}^{s}$ の Fourier 変換を計算すれば $|P^{\vee}(x)|_{i\pm}^{s}$ の Fourier 変換が得られる。特に Fourier 変換公式のガンマ

ファクターを比較することによって，б函数の変換公式も得られる。

3. 以下この定理の証明をかんたんに述べる。

まず，$|\det x|_{\pm}^{s-m} = \begin{cases} |\det x|^{s-m} & (\det x > 0) \\ \pm|\det x|^{s-m} & (\det x < 0) \end{cases}$ と定義して，

その Fourier 変換を計算すると

$$(22)\quad \int_{M(m,\mathbb{R})} |\det x|_{\pm}^{s-m} \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(x\cdot y))\,dx = \mathcal{V}_m^{\pm}(s)\,|\det y|_{\pm}^{-s}$$

と書けることに注意しよう。$GL(m,\mathbb{R}) = \{r\cdot x\,;\ |\det x|=1,\ r>0\}$ によって座標を分けて書いたとき，$M(m,\mathbb{R})$ 上の測度 $|\det x|^{s-m}dx$ は，$r^{m(s-1)}dr^m\cdot dx'$ と書きあらわされる。ここに dx' は $\{|\det x| = 1\}$ 上の $SL(m,\mathbb{R})$ 不変測度である。すると

$$(23) = \int_0^{\infty} r^{m(s-1)}dr^m \Big(\underline{\underline{\int_{x\in SL(m,\mathbb{R})} \exp(2\pi\sqrt{-1}\,r\,\mathrm{tr}(x\cdot y))\,dx' \pm \int_{x\in\{\det x=-1\}} \exp(2\pi\sqrt{-1}\,r\,\mathrm{tr}(x\cdot y))\,dx'}}$$

と書かれる。この式のうしろ側の下線部分を $A_{\pm}(r^m)$ と書くことにすると，

$$(24)\quad \int_0^{\infty} A^{\pm}(r^m)\,r^{m(s-1)}\,dr^m = \mathcal{V}_m^{\pm}(s)\,|\det y|_{\pm}^{-s}$$

と書ける。これを逆 Mellin 変換して，(*)

$$(25)\quad A^{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{-\infty i}^{+\infty i}\int_0^{\infty} A^{\pm}(r^m)\, r^{m(s-1)}\, dr^m\, t^{-s}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{-\infty i}^{+\infty i} v_m^{\pm}(s)\, |\det y|_{\pm}^{-s}\, t^{-s}\, ds\ .$$

ここで積分路 $\int_{-\infty i}^{+\infty i} ds$ は，被積分函数の pole をさけるため $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ へ曲げて取って積分路の右側では特異点がないようにする。

$$(26)\quad F_m^{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{-\infty i}^{+\infty i} v_m^{\pm}(s)\, t^{-s}\, ds$$

が $t>0$ で定義されるが，$t<0$ でも $F^{\pm}(t) = \pm F^{\pm}(-t)$ によって定義すれば，

$$(27) = \begin{cases} F_m^{+}(t\,|\det y|) & (+ \text{ の場合}) \\ \begin{cases} F_m^{-}(t\,|\det y|) & \text{if } \det y > 0 \\ -F_m^{-}(t\,|\det y|) & \text{if } \det y < 0 \end{cases} & (- \text{ の場合}) \end{cases}$$

と書けるので，結局

$$(28)\quad A_m^{\pm}(t) = F_m^{\pm}(t \det y)$$

が得られる。

次に

$$(29)\quad \int_{V_{\mathbb{R}}} |P(x)|_{i\pm}^{s-\frac{n}{d}} \exp(2\pi\sqrt{-1}\, \mathrm{tr}({}^t x \cdot x'))\, dx$$

の積分を次のようにして行う。$x \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ に対して，$g_1 \in SL(m,\mathbb{R}) \cup SL(m,\mathbb{R})^-$ を右から作用させると，$|P(x \cdot g_1)| = |P(x)|$ である。 $(SL(m,\mathbb{R})^- = \{g \in M(m,\mathbb{R});\ \det g = -1\})$ $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ を $SL(m,\mathbb{R})$ の作用で割った空間を $\widetilde{W}$ とし，$\widetilde{W}_i$ を $|P(x)|_{i+}^{s}$ の台となる component とする。任意の点 $x \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は，$\widetilde{W}$ の点 $\widetilde{x}$ と $g_1 \in SL(m,\mathbb{R})$ をもって $x = \widetilde{x} \cdot g_1$ と書ける。$\widetilde{x} \in \widetilde{W}_i$ による orbit $\widetilde{x} \cdot SL(m,\mathbb{R})$ は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 内の orbit であるが，$i \leq l$ ならば，$\widetilde{x} \cdot SL(m,\mathbb{R})^- = \widetilde{x} \cdot SL(m,\mathbb{R})$，$i > l$ ならば $\widetilde{x} \cdot SL(m,\mathbb{R})^- \neq \widetilde{x} \cdot SL(m,\mathbb{R})$ であることを注意する。(19)の定義式より

$$(29) = \int_{\widetilde{W}_i \ni \widetilde{x}} d\widetilde{x} \int_{g_1 \in SL(m,\mathbb{R}) \cup SL(m,\mathbb{R})^-} |P(\widetilde{x} \cdot g_1)|_{i\pm}^{s-\frac{n}{d}} \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}({}^t g_1 {}^t\widetilde{x} \cdot x'))\, dg_1$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_i} \int_{\widetilde{W}_i \ni \widetilde{x}} |P(\widetilde{x})|_{i\pm}^{s-\frac{n}{d}}\ F_m^{\pm}(\det({}^t\widetilde{x} \cdot x'))\, d\widetilde{x} = \sum_{j=1}^{l+l'} a_{ij}^{\pm}(s)\, |Q(x')|_{j\pm}^{s}$$

ここで $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & i > l \\ 2 & i \leq l \end{cases}$ である。同様に裏返し変換したあとの函数についても，

$$(30) \quad \int_{V_{\mathbb{R}}^{\flat}} |P^{\flat}(y)|^{s-\frac{n}{d}} \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}({}^t y \cdot y'))\, dy$$

$$= \int_{\widetilde{W}_i^{\flat} \ni \widetilde{y}} d\widetilde{y} \int_{g_1 \in SL(n-m,\mathbb{R}) \cup SL(n-m,\mathbb{R})^-} |P^{\flat}(\widetilde{y} \cdot g_1)|_{i\pm}^{s-\frac{n}{d}} \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}({}^t g_1 {}^t\widetilde{y}\, y'))\, dg_1\, d\widetilde{y}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_i} \int_{\widetilde{W}_i^{\flat} \ni \widetilde{y}} |P^{\flat}(\widetilde{y})|_{i\pm}^{s-\frac{n}{d}}\ F_{n-m}^{\pm}(\det {}^t\widetilde{y} \cdot y')\, d\widetilde{y}$$

が得られる。ここで $\widetilde{W}_i^{\flat}$ は $V_{\mathbb{R}}^{\flat}-S_{\mathbb{R}}^{\flat}$ を $SL(n-m,\mathbb{R})$ の作用で割ったものの $|P^{\flat}(y)|_{i+}^{s}$ の台となっている Component である。

Mellin 変換の逆変換により(*)

$$(31)\quad F_{n-m}^{\pm}(\det{}^t\tilde{y}\cdot y') = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{-\infty i}^{+\infty i} dz \int_0^{\infty} d\lambda\ F_m^{\pm}((\det{}^t\tilde{y}\cdot y')\cdot\lambda)\lambda^{z-1} \times \frac{v_{n-m}^{\pm}(z)}{v_m^{\pm}(z)}$$

が得られるので、これを(30)に代入して、形式的に積分順序の交換を行う(*)ことによって、

$$(30) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty i}^{+\infty i} dz\ \frac{1}{\varepsilon_i}\int_{\widetilde{W}_i^{\flat}\ni\tilde{y}} |P(\tilde{y})|_{i\pm}^{s-\frac{n}{d}} F_m^{\pm}((\det{}^t\tilde{y}\cdot y')\cdot\lambda) \times \lambda^{z-1}\frac{v_{n-m}^{\pm}(z)}{v_m^{\pm}(z)}\, d\tilde{y}$$

が得られる。$\widetilde{W}_i$ と $\widetilde{W}_i^{\flat}$ は自然に同型でありそれによって $P(\tilde{x})$ と $P^{\flat}(\tilde{y})$ は等しい。したがって、

$$(31)\quad \frac{1}{\varepsilon_i}\int_{\widetilde{W}_i^{\flat}\ni\tilde{y}} |P^{\flat}(\tilde{y})|_{i\pm}^{s-\frac{n}{d}} F_m^{\pm}((\det{}^t\tilde{y}\cdot y')\lambda)\, d\tilde{y} = \frac{1}{\varepsilon_i}\int_{\widetilde{W}_i\ni\tilde{x}} |P(\tilde{x})|_{i\pm}^{s-\frac{n}{d}} F_m^{\pm}((\det{}^t\tilde{x}\cdot x')\lambda)\, d\tilde{x}$$

が得られる。x', y' もここでは $\widetilde{W}_i, \widetilde{W}_i^{\flat}$ の元としてみている。実際 $SL(n-m,\mathbb{R}), SL(m,\mathbb{R})$ の作用で $\det{}^t\tilde{y}\cdot y'$, $\det{}^t\tilde{x}\cdot x'$ の値は

不変だからこの等式はその意味で正しい。これと(29)より

$$(31) = \sum_{j=1}^{l+l'} a_{ij}^{\pm}(s)\,|Q(\lambda^{\frac{1}{m}}\cdot x')|_{j\pm}^{-s} = \sum_{j=1}^{l+l'} a_{ij}^{\pm}(s)\,|Q(y')|_{j\pm}^{-s}\cdot\lambda^{-ds},$$

これを(30)式に代入することによって,

$$(30) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty i}^{+\infty i} dz \sum_{j=1}^{l+l'} a_{ij}^{\pm}(s)\,|Q(y')|_{j\pm}^{-s}\,\lambda^{-ds+z-1}\,\frac{\vartheta_{n-m}^{\pm}(z)}{\vartheta_m^{\pm}(z)}$$

$$= \sum_{j=1}^{l+l'} a_{ij}^{+}(s)\,\frac{\vartheta_{n-m}^{\pm}(ds)}{\vartheta_m^{\pm}(ds)}\cdot|Q(y')|_{j\pm}^{-s}.$$

一方(19)の式より

$$(30) = \sum_{j=1}^{l+l'} a_{ij}^{\pm\prime}(s)\,|Q'(y')|_{j\pm}^{-s}.$$

したがって 両方を比較することにより結論が得られる。

(注) 途中で(*)を付した(逆)Mellin 変換の可能性や積分順序の交換については,その正当性をたしかめる必要がある。ただし次のことが成立する。$\varphi(z)$を $Re(z)$ が充分大のところで singularity を持たぬ解析函数として,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty d\lambda\int_{-i\infty}^{+i\infty}\lambda^{z-ds-1}\,\varphi(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\int_0^1 d\lambda \int_{-i\infty}^{+\infty i} \lambda^{z-ds-1}\varphi(z)\,dz + \int_1^\infty d\lambda \int_{-i\infty}^{+i\infty} \lambda^{z-ds-1}\varphi(z)\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{|z-ds|=c} \varphi(z)(z-ds)^{-1}dz + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{Re}(z-ds)<0} \varphi(z)(z-ds)^{-1}dz$$

$$+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{Re}(z)\ll 0} \frac{\varphi(z)}{ds-z}\,dz = \varphi(ds).$$

したがって逆Mellin変換はMellin変換で反転できる。

<u>例 1</u>

$$\begin{cases} V_{\mathbb{R}} = M(n, m, \mathbb{R}) \\ G_{\mathbb{R}} = SO(n, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R}) \end{cases} \qquad (n > 2m)$$

とする。群の作用は,

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & g_1 x {}^t g_2 \\ \cap & & \cap \\ V_{\mathbb{R}} & & V_{\mathbb{R}} \end{array} \qquad (g_1, g_2) \in G_{\mathbb{R}}$$

である。相対不変式は $P(x) = \det({}^t x \cdot x)$ で, $S_{\mathbb{R}} = \{x \in V_{\mathbb{R}}\,;\, P(x) = 0\}$ で与えられる。$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は $G_{\mathbb{R}}^+ = SO(n, \mathbb{R}) \times GL^+(n, \mathbb{R})$ でひとつのorbitになっており, Fourier変換公式は

$$(32) \quad \int_{V_{\mathbb{R}}} \det({}^t x \cdot x)^{s-\frac{n}{2}} \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}({}^t x \cdot y))\,dx$$

$$= a(s) \quad \det({}^t y \cdot y)^{-s},$$

$$a(s) = \pi^{\frac{nm}{2}-2sm} \frac{\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{1}{2})\cdots\Gamma(s-\frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-s)\Gamma(\frac{n-1}{2}-s)\cdots\Gamma(\frac{n-m+1}{2}-s)},$$

で与えられる。$a(s)$ が先に求めた $GL(n,\mathbb{R})$ に関しての裏返し変換によって変換公式 (21) と対応している。

例 2

$V_{\mathbb{R}} = M(2n, 2m, \mathbb{R})$

$G_{\mathbb{R}} = Sp(2n, \mathbb{R}) \times GL(2m, \mathbb{R})$ $\qquad (n > 2m)$

とする。ただし $Sp(2n, \mathbb{R}) = \{ g \in GL(2n, \mathbb{R});\ gJ{}^tg = J \}$ $\left(J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix} \right)$ である。群の作用は,

$$x \longmapsto g_1 x {}^t g_2 \qquad (x \in V_{\mathbb{R}},\ (g_1, g_2) \in G_{\mathbb{R}})$$

である。相対不変式は, $P(x) = \mathrm{Pf}({}^t x J x)$ で, $S_{\mathbb{R}} = \{ x \in V_{\mathbb{R}};\ P(x) = 0 \}$。$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は, $P(x) \gtrless 0$ によって 2つの connected components に分かれる。実際 $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} \longrightarrow Grass_{2m}(\mathbb{R}^{2n})$ の image においては, ひとつの orbit であるが, $Grass_{2m}(\mathbb{R}^{2n})$ の generic point をとってみると, その isotropy subgroup が

$\left\{ \begin{pmatrix} Sp(m, \mathbb{R}), & * \\ 0 & , Sp(n-m, \mathbb{R}) \end{pmatrix} \right\}$ と同型になることが直接計算で確かめられる。したがって, $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は 2つに分かれる。このとき Fourier 変換公式は,

$$(33)\quad \int_{V_R} (\mathrm{Pf}\ {}^t x J x)_{\pm}^{s-\frac{n}{2}} \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}\,({}^t x J y))\,dx$$

$$= A(s)\ (\mathrm{Pf}\ {}^t y J y)_{\pm}^{-s}$$

$$A(s) = 2^{2mn}\ \pi^{m(2n-1)}\ (2\pi)^{-2sm} \times (-1)^{(n-m)m} \sin^m(\pi s)$$
$$\Gamma(s)\Gamma(s-2)\cdots\Gamma(s-2m+2) \times \Gamma(s-2n+2m-1)$$
$$\Gamma(s-2n+2m-3)\cdots\Gamma(s-2n+1)$$

で与えられ，$A(s)$ が先に求めた $GL(2m,\mathbb{R})$ に関しての裏返し変換による変換公式と対応している。

参考文献

[1] 新谷卓郎述，神保道夫記；概均質ベクトル空間のゼータ函数について．（1974年6月 京大集中講義記録）

[2] H Weyl ; Classical groups (Princeton)

[3] 佐藤幹夫述 新谷卓郎記；概均質ベクトル空間の理論（数学の歩み 15-1 (1970) 85−157）

訂正　1月20日(1983年)付で，立教大学の佐藤文広氏よりあやまりの指摘を受けましたので，注の形で訂正させていただきます。佐藤文広氏に感謝いたしますとともに，下記の訂正もすべて筆記者の責任であることを明記しておきます。

P.15の(注)について　"ただし，次のことが成立する"(3行目の文章)は，あやまりで，新谷氏はこのようなことは述べられなかった。この文章は次のように訂正する。

"その正当性については，たとえば下記のような変形の正当性がたしかめられればよい。以下の例についてはこのことはたしかめることができる。"

P.5　下から6行目　"特に $H_{\mathbb{R}}$ が reductive であるならば，PとQは同じにとれる。"を次のように訂正する。

"特に $H_{\mathbb{R}}$ が reductive ならば，適当な座標変換によって，PとQを同じにとることができる。"

P.2　下から7行目　"$H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{C}} \cap GL(n, \mathbb{R})$ として，…… real structure が入る。"を次のように訂正する。

"$H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{C}} \cap GL(n, \mathbb{R})$ として，…… real structure が入るものとする。"