数理解析研究所講究録
第497巻 1983年 96-115

Ⅱ型の古典領域の解析的自己同型群の決定

新谷卓郎

村瀬篤・菅野孝史 記

故新谷先生の遺稿の中に，"A note on an elementary determination of the group of holomorphic automorphisms of a classical irreducible bounded domain" と題する論文の草稿（英文）が存在する。以下は，その内容の復元を試みたものである。草稿は，最初に掲げる "Introduction" の他は散逸したのか，断片しか残っていないが，幸い先生の1978年度の東大における講義が，ほぼ同一の内容を含んでいるので，ここではそちらを主として参照した。講義ではⅠ型からⅣ型までを対象にしているが，紙数の関係もありここではⅡ型の領域に話を限ることにした。証明にはⅠ型に関する結果が本質的に用いられているが，それについては先生の講義に懇切な解説がある。

"Introduction" にもあるように，以下の結果は必ずしも original なものではないが，Ⅱ型の領域についての文献は少ないようだし（特に自己同型群の詳しい記述は余りみない），何よりそれは新谷先生の強靭な腕力を髣髴とさせる点で，

こういう形で発表することにした。 なお，文中の誤りについては筆者たちに責任がある。

最後に，先生の遺稿の発表を許していただいた新谷晶子さんに感謝いたします。

Introduction

C.L.Siegel determined the group of all holomorphic automorphisms of his generalized half plane in an elementary manner. H.Klingen modified Siegel's method and determined the automorphism groups of "generalized unit circles" in an elementary manner. E.Cartan determined the automorphism group of a general bounded irreducible symmetric domain applying deep results in differential geometry and Lie groups.

In the present note we modify methods of Siegel and Klingen and determine the groups of automorphisms of classical irreducible domains of types not discussed by them in an elementary manner.

§1. 主結果

$n\geqq 2$ に対し，$V_n=\{Z\in M_n(\mathbb{C})\mid {}^tZ=-Z\}\cong\mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 内の有界領域 $\mathfrak{D}_n$ を

$$\mathfrak{D}_n=\{z\in V\mid 1_n-z^*z>0\}$$

により定義する。（ここで $z^*={}^t\bar{z}$）$\mathfrak{D}_n$ は，II型の既約な有界対称領域である。$\mathfrak{D}_n$ の解析的自己同型のなす群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_n)$ は Lie 群をなすが，I型の領域に対する解析的自己同型群に関する結果（それ自体，ここにおけるのと類似の方法を用いることにより初等的に決定される）を用いて，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_n)$ を"初等的"に決定するのが目的である。$n=2$ のとき，$\mathfrak{D}_2$ は単位円の内部と解析的に同型だから，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_2)$ については，すでによく知られている。以後 $n\geqq 3$ とし，混乱のおそれのない限り $\mathfrak{D}_n$ を単に $\mathfrak{D}$ とかく。

さて，次のような Lie 群 G を考える：

$$G=\left\{g\in GL(2n,\mathbb{C})\;\middle|\; {}^tg\begin{pmatrix}0&1_n\\1_n&0\end{pmatrix}g=\begin{pmatrix}0&1_n\\1_n&0\end{pmatrix},\ g^*\begin{pmatrix}-1_n&0\\0&1_n\end{pmatrix}g=\begin{pmatrix}-1_n&0\\0&1_n\end{pmatrix}\right\}。$$

$g=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in G$，$z\in\mathfrak{D}$ に対して，

$$g\cdot z=(Az+B)(Cz+D)^{-1}$$

とおくと，$\Phi(g):z\longmapsto g\cdot z$ は，$\mathfrak{D}$ の解析的自己同型を定める。G は，この作用により $\mathfrak{D}$ に推移的に動くことが

知られている。$0 \in \mathcal{D}$ の isotropy 部分群は，

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & \\ & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in U(n) \right\}$$

と一致し，従って $\mathcal{D} \cong G/K$。写像 $\Phi : g \longmapsto \Phi(g)$ は，G から $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ への Lie 群としての準同型を与えるが，容易に $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{\pm 1\}$ なることがわかる。$\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ を $\Phi(G)$ によって記述する次の結果を証明することが，この小文の目的である。

<u>定理 1</u>

(i) $n \neq 4$ のとき，$\mathrm{Aut}(\mathcal{D}) = \Phi(G)$。

(ii) $n = 4$ のとき，$\Phi(G)$ は $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ の指数 2 の部分群である。$\varphi_0 : \begin{pmatrix} X & Z \\ -{}^tZ & Y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} X & {}^tZ \\ -Z & Y \end{pmatrix}$ は $\mathcal{D}$ の解析的自己同型をひきおこし しかも $\varphi_0 \notin \Phi(K)$（従って，$\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ は φ_0 と $\Phi(G)$ により生成される。）

$\mathrm{Aut}(\mathcal{D})_0$ を 0 の isotropy 部分群とする。G は，$\mathcal{D}$ に推移的に作用するから 次の事実を示せば十分である。

(i)′ $n \neq 4$ のとき $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})_0 = \Phi(K)$

(ii)′ $n = 4$ のとき $[\mathrm{Aut}(\mathcal{D})_0 : \Phi(K)] = 2$

かつ　$\varphi_0 \in Aut(\mathcal{D})_0 - \Phi(K)$。

§2. 準備

1°.　Dを，0を含む $\mathbb{C}^N$ 内の有界領域，$Aut(D)$ を D からDへの1:1 onto な双正則写像のなす群とする。

$\varphi \in Aut(D)$，$z \in D$ に対し，

$$J(\varphi, z) = (\partial(\varphi(z))_\alpha / \partial z_\beta)_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$$

とおく。$J(\varphi, z)$ は $Aut(D)$ の $GL(N, \mathbb{C})$ に値をとる保型因子である。

<u>定理A (H. Cartan)</u>

$\psi \longmapsto J(\psi, 0)$ は，$Aut(D)_0$ から $GL(N, \mathbb{C})$ への単射準同型で，像は $GL(N, \mathbb{C})$ 内で compact.

任意の $t \in \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ に対し $z \in D \Rightarrow tz \in D$ が成り立つとき，すなわち $\mathbb{T} \subset Aut(D)_0$ のとき，D を<u>0を中心とする円領域</u>という。

<u>Corollary</u>　Dを 0を中心とする円領域とする。$Aut(\mathcal{D})_0$ は $\mathbb{C}^n$ の非退化な線型変換 L で $L(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ を

みたすもののなす群と一致する。

で.

<u>Lemma 1</u>　$Aut(D)$ は D に推移的に作用するとする。このとき，D 上の $N\times N$ 次正値 Hermite 行列に値をとる函数 $H(Z)$ で

(1)　　$H(\varphi(Z)) = J(\varphi, Z)\, H(Z)\, J(\varphi, Z)^*$

が任意の $\varphi \in Aut(D)$ に対して成りたつものが存在する。

$Aut(D)$ の部分群 G と $z_0 \in D$ に対し　$G_{z_0} = \{ g \in G \mid g(z_0) = z_0 \}$ とする。$\widetilde{G_{z_0}} = \{ J(g, z_0) \mid g \in G_{z_0} \}$ は $GL(N, \mathbb{C})$ の部分群である。一般に $GL(N, \mathbb{C})$ の部分群 S が $\mathbb{C}^N$ に<u>既約に作用する</u>とは，$T \in M_N(\mathbb{C})$ に対し

$$TA = AT \quad \forall A \in S \implies T = \lambda 1_N \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

なることをいう。

<u>Lemma 2</u>　G を $Aut(D)$ の部分群で D に推移的に働き，$\widetilde{G_{z_0}}$ が $\mathbb{C}^N$ に既約に作用するような $z_0 \in D$ が存在するとする。このとき D 上の正値 Hermite 行列に値をとる函数 $H(Z)$ で，(1) が任意の $\varphi \in G$ に対して成りたつものがあれば (1) は任意の $\varphi \in Aut(D)$ に対しても正しい。

3°.

<u>Lemma 3</u>　$H(Z,W)$ を $D\times D$ 上定義されたなめらかな函数で，Z について holomorphic，W について antiholomorphic，さらに $H(Z,Z)=0$ $(\forall Z\in D)$ とする。このとき H は $D\times D$ 上恒等的に 0 となる。

4°.

$p,q\geqq 1$ に対し $M(p,q,\mathbb{C})$ 内の有界領域

$$I_{p,q}=\{Z\in M(p,q,\mathbb{C})\mid 1_p-ZZ^*>0\}$$

を I 型の古典領域とよぶ。§1で述べたように次の結果を初等的に示すことができる。

<u>定理 B</u>

(i) $p\neq q$ のとき，$\mathrm{Aut}(I_{p,q})_\circ$ は $Z\longmapsto uZu'$ $(u\in U(p),\ u'\in U(q))$ の形の変換全体のなす群と一致する。

(ii) $p=q$ のとき，$\mathrm{Aut}(I_{p,q})_\circ$ は $Z\longmapsto uZu'$ $(u\in U(p),\ u'\in U(q))$ 及び $Z\longmapsto {}^tZ$ により生成される。

§3. 定理の証明

$\psi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})_0$ とする。$\mathcal{D}$ は 0 を中心とする円領域ゆえ定理 A の Corollary より，$L(\mathcal{D})=\mathcal{D}$ をみたす V の非退化な線型変換 L で，$L|_{\mathcal{D}} = \psi$ なるものが存在する。

$g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$，$z \in \mathcal{D}$ に対し，$j(g,z) = Cz+D$ とおくと，

(2) $$J(\Phi(g),z)(Z) = {}^t j(g,z)^{-1} Z\, j(g,z)^{-1} \quad (Z \in V).$$

$z \in \mathcal{D}$ に対し $h(z) = 1 - z^* z$ とおく。$g \in G$ に対し，

(3) $$h(\Phi(g)\cdot z) = j(g,z)^{*-1} h(z)\, j(g,z)^{-1}.$$

V に内積 $(\ ,\ )$ を $(Z,W) = \mathrm{tr}\, Z^* W$ により定める。

V の線型変換 $H(z)$ $(z \in \mathcal{D})$ を

$$H(z)(Z) = {}^t h(z)\, Z\, h(z) \qquad (Z \in V)$$

により定義すると，$H(z)$ は V の正値 Hermite 変換で，(2)，(3) より，(1)式が $\varphi \in \Phi(G)$ に対して成りたつことがわかる。ところが $\Phi(G)_0 = \{ J(k,0) \mid k \in K \} = \{ Z \mapsto uZ\,{}^t u \mid u \in U(n) \}$ は V に既約に作用するから Lemma 2 より

$$H(\varphi(z)) = J(\varphi,z) H(z) J(\varphi,z)^* \qquad (\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})).$$

特に $\varphi = L|_{\mathcal{D}}$ として（$J(\varphi,z) = L$ に注意すれば）

(4) $$H(L(z)) = L H(z) L^* \qquad (\forall z \in \mathcal{D})$$

(4) において $z=0$ として

(5) $$LL^* = 1_V$$

を得る。

$z, \zeta \in V$ に対し，V の線型変換 $H(z, \zeta)$ を

$$H(z, \zeta)(Z) = {}^t h(z, \zeta)\, Z\, h(z, \zeta)$$

により定義する。ただし $h(z, \zeta) = 1 - \zeta^* z$。$H(z, \zeta)$ は z について $\mathfrak{D}$ 上 holomorphic，ζ について $\mathfrak{D}$ 上 antiholomorphic かつ $H(z, z) = H(z)$ であるから Lemma 3 より $z, \zeta \in \mathfrak{D}$ に対して

$$H(\varphi(z), \varphi(\zeta)) = J(\varphi, z)\, H(z, \zeta)\, J(\varphi, \zeta)^*$$

$(\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{D}))$ を得る。特に $\varphi = L|_{\mathfrak{D}}$ として，

(6) $$H(L(z), L(\zeta)) = L\, H(z, \zeta)\, L^* \text{。}$$

(4), (6) は $z, \zeta \in V$ に対しても成りたつことに注意する。

$u \in U(n)$ に対し $Z \longrightarrow uZ\,{}^t u$ $(Z \in V)$ なる V の線型変換を L_u とかく。$\Phi(K) = \{L_u \mid u \in U(n)\}$ である。適当な $u \in U(n)$ をとれば，$L_u \circ L$ が

$$\begin{pmatrix} & z_1 & & & & \\ -z_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & z_m & \\ & & & -z_m & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

($z_i \in \mathbb{C}$，$n = 2m$ または $2m+1$；右下隅の 0 は，n が奇数のときのみ現われる（以下同様））の形の各元を fix することを示そう。そのために次の二つの結果を引用する。

<u>Lemma 4</u> $n \geqq 3$ のとき，$z, \zeta \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し，

$H(\mathfrak{z}, \zeta) = 1_V$ ならば $\zeta^* \mathfrak{z} = 0$

<u>Lemma 5</u> $Z \in V$ に対し

$$L_u(Z) = \begin{pmatrix} & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_m & \\ & & & -\lambda_m & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

なる $u \in U(n)$ が存在する。

<u>Corollary</u> $Z, W \in V$ に対し，Z^*Z と W^*W の固有多項式が一致すれば ある $u \in U(n)$ に対し $W = L_u(Z)$.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0_{n-2} \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0_2 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & 0_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad f_m = \begin{pmatrix} 0_{2m-2} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

とする。$i \neq j$ ならば $f_j^* f_i = 0$ ゆえ $H(f_i, f_j) = 1_V$. $f_i \in \mathfrak{D}$ より $L(f_i) \in \mathfrak{D}$ だから Lemma 4 より

$$(7) \qquad L(f_j)^* L(f_i) = 0 \qquad (i \neq j)$$

を得る。(4), (5) より $\det H(Z) = \det H(L(Z))$。一方 $\det H(Z) = \det h(Z)^{n-1}$ だから $\det h(Z) = \det h(L(Z))$. Z を tZ $(t \in \mathbb{C})$ でおきかえて

$$\det(1_n - |t|^2 Z^* Z) = \det(1_n - |t|^2 L(Z)^* L(Z))。$$

従って 次を得る。

<u>Lemma 6</u>　$Z\in V$ に対して　Z^*Z と $L(Z)^*L(Z)$ の固有多項式は一致する。

Lemma 5 の Corollary より適当な $u\in U(n)$ をとれば $L_u\circ L(f_1)=f_1$ と仮定してよい。従って $i\geq 2$ のとき

(8)　$$(L(f_i))^*f_1=0 \quad 。$$

今，$L(f_i)$ を次のように block 分けする。

(9)　$$\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} & v_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} & v_m \\ -{}^tv_1 & \cdots & -{}^tv_m & 0 \end{pmatrix},$$

ここで $z_{\alpha\beta}\in M_2(\mathbb{C})$，$v_\alpha\in\mathbb{C}^2$（ただし n が偶数のとき，v_α たちはあらわれない。(以下同様))。(8) により

$$z_{11}=z_{12}=\cdots=z_{1m}=z_{21}=\cdots=z_{m1}=0 \quad , v_1=0 \;。$$

$u=\begin{pmatrix} 1_2 & \\ & u' \end{pmatrix}$　$(u'\in U(n-2))$ を適当にとれば L を $L_u\circ L$ でおきかえることにより

$$L(f_1)=f_1,\ L(f_2)=f_2\ ,(L(f_i))^*L(f_j))=0\ (i\neq j)$$

をみたすようにできる。この操作をくりかえすことにより $L_u\circ L(f_i)=f_i$ $(1\leq i\leq m)$ なる $u\in U(n)$ が存在することがわかる。

我々は今 $\Phi(K)\backslash \mathrm{Aut}(\mathcal{D})_o$ の代表元を求めるこ

とが目標なのだから，今後 $\mathcal{L}$ は $V_0=\left\{\begin{pmatrix} & z_1 & & \\ -z_1 & & \ddots & \\ & & & z_n \\ & & -z_n & 0 \end{pmatrix} \middle| z_i\in\mathbb{C}\right\}$
の各元を fix すると仮定してよい。$\mathfrak{z}_0=\begin{pmatrix} & z_1 & & \\ -z_1 & & \ddots & \\ & & & z_n \\ & & -z_n & 0 \end{pmatrix}\in V_0$
に対して $h(\mathfrak{z}_0)=\begin{pmatrix} \lambda_1 1_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n 1_2 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$ $(\lambda_\alpha = 1-|z_\alpha|^2)$
なることに注意すれば $Z\in V$ を (9) のように block 分けしたとき，

$$H(\mathfrak{z}_0)(Z)=\left(\begin{array}{c|c} \lambda_i\lambda_j z_{ij} & \lambda_i v_i \\ \hline -\lambda_i {}^t v_i & 0 \end{array}\right)$$

一方 $\mathcal{L}(\mathfrak{z}_0)=\mathfrak{z}_0$ なることと，(4) より，$H(\mathfrak{z}_0)$ と $\mathcal{L}$ は可換である。以上より容易に次を得る。

<u>Lemma 7</u>

(10) $$\mathcal{L}(Z)=\left(\begin{array}{c|c} L_{ij}(Z_{ij}) & L_i(v_i) \\ \hline -{}^t L_i(v_i) & 0 \end{array}\right)$$

ただし L_{ij} は $M_2(\mathbb{C})$ の線型変換，L_i は $\mathbb{C}^2$ の線型変換である。

$\mathcal{L}|_{V_0}=id$ ゆえ，L_{ii} は恒等写像であることに注意する。

$V'=\left\{\begin{pmatrix} 0_2 & W \\ -{}^tW & 0_{n-2}\end{pmatrix} \middle| W\in M(2,n-2,\mathbb{C})\right\}$ とすると，
Lemma 7 より $\mathcal{L}$ は V' の線型変換をひきおこす。
$\begin{pmatrix} 0 & W \\ -{}^tW & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{D} \iff W\in I_{2,n-2}$ だから $\mathcal{L}|_{V'\cap\mathfrak{D}}$ は $I_{2,n-2}$ の 0 を fix する解析的自己同型をひきおこす。

以後，場合を分けて考察する。

(I) $n \geqq 5$ の場合

$n-2>2$ だから，定理Bより，ある $u_1 \in U(2)$，$u' \in U(n-2)$ に対し

$$L\left(\begin{pmatrix} 0 & W \\ -{}^tW & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & u_1 W u' \\ -{}^t(u_1 W u') & 0 \end{pmatrix} \qquad (W \in M(2, n-2, \mathbb{C}))。$$

このことと (10) により

$$L_{1i}(Z) = u_1 Z u_i \qquad (Z \in M_2(\mathbb{C}),\ 2 \leqq i \leqq m)$$

$$L_1(v) = u_1 v t \qquad (v \in \mathbb{C}^2)$$

なる $u_1, u_2, \cdots, u_m \in U(2)$，$t \in \mathbb{T}$ が存在する。

今 $\mu_i \in \mathbb{T}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ を $\mu_i {}^t u_i^{-1} \in SU(2)$ となるようにとり，
$u = \begin{pmatrix} \mu_1 u_1^{-1} & & & \\ & \mu_2 {}^t u_2^{-1} & & \\ & & \ddots \ \mu_m {}^t u_m^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ とおく。$u f_i {}^t u = f_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ ゆえ $L_u \circ L$ は V_0 の各元を fix し，block $Z_{12}, \cdots, Z_{1m}, v_1$ たちを，それぞれ scalar 倍する変換となる。すなわち，

$$(11) \qquad L_u \circ L(Z) = \begin{pmatrix} Z_{11} & \lambda_2 Z_{12} & \cdots\cdots & \lambda_m Z_{1m} & \lambda u_1 \\ & Z_{22} & * \ \cdots\cdots & * & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & * & & Z_m & * \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$(\lambda_i, \lambda \in \mathbb{T})$。

以後 L は (11) の形をとるものとする。ここで再び場合を分ける。

(a) $n = 2m$ が偶数のとき

$X = (x_{ij}) \in V$ に対し Pfaffian $Pf(X)$ を

(12) $$\mathrm{Pf}(X) = (2^m \cdot m!)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2m}} \mathrm{sgn}\,\sigma \; x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

により定義する。よく知られているように $\det X = (\mathrm{Pf}(X))^2$ $(X \in V)$。Lemma 6 より $\det L(Z)^* L(Z) = \det(Z^* Z)$ ゆえ, $|\mathrm{Pf}(Z)| = |\mathrm{Pf}(L(Z))|$。従って $\mathrm{Pf}(L(Z))/\mathrm{Pf}(Z)$ は V 上の絶対値 1 の有理函数。これは $\mathrm{Pf}(L(Z)) = c\,\mathrm{Pf}(Z)$ $(\forall Z \in V)$ なる $c \in \mathbb{T}$ が存在することを示す。L が V_0 の各元を fix することに注意して上式の両辺の係数を比較すれば $c = 1$, すなわち

(13) $$\mathrm{Pf}(L(Z)) = \mathrm{Pf}(Z)$$

を得る。

任意の j $(2 \leq j \leq m)$ に対して Z として $\begin{pmatrix} z_{11} & 0 & z_{1j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^t z_{1j} & 0 & z_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の形のものをとると, (13) と (11) より

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} z_{11} & z_{1j} \\ -{}^t z_{1j} & z_{jj} \end{pmatrix} = \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} z_{11} & \lambda_j z_{1j} \\ -\lambda_j {}^t z_{1j} & z_{jj} \end{pmatrix}$$

を得る。これより $\lambda_j^2 = 1$ すなわち $\lambda_j = \pm 1$。L に $\mathcal{L}_u$ ($u = \begin{pmatrix} 1_2 & & & \\ & \lambda_2 1_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m 1_2 \end{pmatrix}$) を合成することにより Lemma 7 において最初から $\mathcal{L}_{12} = \cdots = \mathcal{L}_{1m} = 1_{M_2(\mathbb{C})}$ とおいてよいことがわかる。

次に, $2 \leq \alpha < \beta \leq m$ に対し

$$V'' = \left\{ \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & z_{1\alpha} & 0 & z_{1\beta} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & z_{\alpha\alpha} & 0 & z_{\alpha\beta} & 0 \\ & * & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & z_{\beta\beta} & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in V \right\}$$ とおく。仮定から

L は $V'' \cap \mathcal{D}$ をそれ自身にうつす。$Z \in V''$ に対し

$$Z \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_n \iff \widetilde{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{1\alpha} & z_{1\beta} \\ -{}^t z_{1\alpha} & z_{\alpha\alpha} & z_{\alpha\beta} \\ -{}^t z_{1\beta} & -{}^t z_{\alpha\beta} & z_{\beta\beta} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_6$$

であるから，L は $\mathcal{D}_6$ の解析的自己同型 $\widetilde{L}$ をひきおこす。仮定から $\widetilde{L}(\widetilde{Z}) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{1\alpha} & z_{1\beta} \\ & z_{\alpha\alpha} & L_{\alpha\beta}(z_{\alpha\beta}) \\ * & & z_{\beta\beta} \end{pmatrix}$。

さて $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z_{1\beta} \\ 0 & 0 & z_{\alpha\beta} \\ -{}^t z_{1\beta} & -{}^t z_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_6 \iff \begin{pmatrix} z_{1\beta} \\ z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \in I_{2,4}$

ゆえ，$\widetilde{L}$ はさらに $I_{2,4}$ の 0 を fix する解析的自己同型 $\widetilde{\widetilde{L}}$ をひきおこす：$\widetilde{\widetilde{L}}\begin{pmatrix} z_{1\beta} \\ z_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1\beta} \\ L_{\alpha\beta}(z_{\alpha\beta}) \end{pmatrix}$。定理Bより

ある $u_1 \in U(4)$, $u_2 \in U(2)$ に対し

$$\widetilde{\widetilde{L}}(\widetilde{\widetilde{z}}) = u_1 \widetilde{\widetilde{z}} u_2 \qquad (\widetilde{\widetilde{z}} \in I_{2,4}).$$

このことから ある $u \in U(2)$ に対し

$$L_{\alpha\beta}(z) = uz \qquad (z \in M_2(\mathbb{C}))$$

であることがわかる。さて

さて $\zeta = \begin{pmatrix} 0 & W & 0 \\ -{}^t W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{C}) \quad (W \in M_2(\mathbb{C}))$ とすると

$\hat{\iota}(\zeta)=\zeta$ ゆえ，$\hat{\iota}$ は $H(\zeta)$ と可換。従って

$$ {}^t(1-W^*W)uZ = u\,{}^t(1-W^*W)Z \quad (\forall Z, W \in M_2(\mathbb{C})) $$

を得るが，これは $u=t1_2$ $(t\in\mathbb{T})$ を意味する。等式 $Pf(\hat{Z}) = Pf(\hat{\iota}(\hat{Z}))$ の両辺の係数を比較することにより $t=1$ を得る。

結局，Lemma 7 において $L_{12}=\cdots=L_{1m}=1_{M_2(\mathbb{C})}$ ならば，任意の α,β $(2\leq\alpha<\beta\leq m)$ に対し $L_{\alpha\beta}=1_{M_2(\mathbb{C})}$ でなければならないことが示された。これで n が偶数で $n\neq 4$ のときの定理1 (i)′ が証明された。

(b) $n=2m+1$ が奇数のとき

(a) と同様の論法で，L に適当な L_u $(u\in U(n))$ を合成することにより最初から $L_{ij}=1_{M_2(\mathbb{C})}$ $(1\leq i,j\leq m)$ と仮定してよいことが示される。また適当な $L_{\left(\begin{smallmatrix}1_{n-1} & \\ & t\end{smallmatrix}\right)}$ $(t\in\mathbb{T})$ を合成することにより $L_1=1$ としてよい。

$\mathfrak{z}\in M(2m-2,2,\mathbb{C})$, $u'\in\mathbb{C}^{2m-2}$ に対し

$$ \begin{pmatrix} 0_{2m-2} & \mathfrak{z}\,u \\ -{}^t\mathfrak{z} & \\ -{}^tu & 0_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{D} \iff (\mathfrak{z}\ u) \in I_{2m-2,3}. $$

従って $L'\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1u_1 \\ \vdots \\ L_{m-1}u_{m-1}\end{pmatrix}$ $(u_1,\cdots,u_{m-1}\in\mathbb{C}^2)$ とおくと $(\mathfrak{z}\,u') \longmapsto (\mathfrak{z}\,L'u')$ は $I_{2m-2,3}$ の 0 を fix する自己同型をひきおこす。定理B より $v_1\in U(2m-2)$, $v_2\in U(3)$ で $v_1(\mathfrak{z}\,u')v_2 = (\mathfrak{z}\ L'u')$ なるものが存在する。これより L' は

scalar 倍の変換であることがわかるが $L_1=1$ だから L' も恒等変換である。

次に $z\in M(2m-2,2,\mathbb{C})$, $u_m\in\mathbb{C}^2$ に対し

$$\begin{pmatrix} 0_{2m-2} & z & 0 \\ -{}^tz & 0_2 & u_m \\ 0 & -{}^tu_m & 0 \end{pmatrix}\in\mathfrak{D} \iff \begin{pmatrix} z \\ {}^tu_m \end{pmatrix}\in I_{2m-1,2}\ .$$

従って $\begin{pmatrix} z \\ {}^tu_m \end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} z \\ {}^t(L_m u_m) \end{pmatrix}$ は $I_{2m-1,2}$ の 0 を fix する自己同型をひきおこす。定理 B より $v_3\in U(2m-1)$, $v_4\in U(2)$ で $\begin{pmatrix} z \\ {}^t(L_m u_m) \end{pmatrix}=v_3\begin{pmatrix} z \\ {}^tu_m \end{pmatrix}v_4$ なるものが存在する。これより $L_m u_m=\mu u_m$ なる $\mu\in\mathbb{T}$ がある。適当な Pfaffian をとって考えれば $\mu=1$ を得る。これで n が奇数で $n\geq 5$ の場合の定理が証明された。

II. $n=4$ の場合

$L\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ -{}^tz_{12} & z_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_{11} & L_{12}(z_{12}) \\ -{}^tL_{12}(z_{12}) & z_{22} \end{pmatrix}$ で，L_{12} は $I_{2,2}$ の 0 を fix する解析的自己同型をひきおこすことを思いだそう。定理 B より，ある $u\in U(2)$ に対し $L_{12}(z)=uz\,{}^tu$ 又は $u\,{}^tz\,{}^tu$ とかけるから，I における議論をくりかえせば，$n=4$ のときの定理の証明は次の Lemma に帰着される。

<u>Lemma 8</u> $\varphi_0\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ -{}^tz_{12} & z_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_{11} & {}^tz_{12} \\ -z_{12} & z_{22} \end{pmatrix}$ は，

$\mathcal{D}=\mathcal{D}_4$ の解析的自己同型で，しかも $\varphi_0 \notin \Phi(K)$.

<u>Lemma の証明</u>

（後半の証明）　$\varphi_0 \in \Phi(K)$ とすると，

(14)
$$\begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix} \varphi_0(\mathfrak{z}) \cdot \begin{pmatrix} & -1_2 \\ 1_2 & \end{pmatrix} = u\mathfrak{z}\,{}^t u \quad (\forall \mathfrak{z} \in \mathcal{D})$$

なる $u=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in U(4)$ が存在する。(14) は $\mathfrak{z}=\begin{pmatrix} 0 & Z \\ -{}^tZ & 0 \end{pmatrix}$ $(Z \in M_2(\mathbb{C}))$ に対しても成りたつから

$$u_{11} Z = Z\,\overline{u_{22}} \ , \ -u_{12}{}^tZ = Z\,\overline{u_{21}} \ , \ u_{21} Z = -{}^tZ\,\overline{u_{12}}$$

が，任意の $Z \in M_2(\mathbb{C})$ に対して成りたつ。これより

$u_{11} = t\,1_2$ ， $u_{22} = \bar{t}\,1_2$ ， $u_{12} = u_{21} = 0_2$ $(t \in \mathbb{T})$ を

得る。(14) において $\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & \\ & Z_{22} \end{pmatrix}$ $(Z_{11}, Z_{22} \in M_2(\mathbb{C})$, ${}^tZ_{11} = -Z_{11}$, ${}^tZ_{22} = -Z_{22})$ とすると $t Z_{11} = \bar{t} Z_{22}$. これ

は矛盾!!　　　　　　　　（後半の証明終わり）

（前半の証明）　まず，次のよく知られた事実に注意する.

$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}$ $(A, B, D \in M_n(\mathbb{C})$, $A=A^*$, $D=D^*)$ に対し，

$$X>0 \iff A>0, D>0, D-B^*A^{-1}B>0 \text{。}$$

これより　$Z = \begin{pmatrix} X & Z \\ -{}^tZ & Y \end{pmatrix} \in V$ に対し

$$Z \in \mathcal{D} \iff 1 - Z^*Z > 0$$

$$\iff A = 1_2 - (X^*X + {}^tZ^*\,{}^tZ) > 0$$

$$E = D - (Z^*X - Y^*\,{}^tZ)A^{-1}(X^*Z - {}^tZ^*Y) > 0$$

$$D = 1_2 - (Z^*Z + Y^*Y) > 0.$$

今 $X=\begin{pmatrix} & x \\ -x & \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} & y \\ y & \end{pmatrix}$ $(x, y\in\mathbb{C})$ とし,

$Z=u_1 t u_2$ $(u_1, u_2 \in U(2)$, $t=\begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2\end{pmatrix}$; $t_1, t_2>0)$

とおく。 X^*X と Y^*Y は scalar 行列であることに注意すれば

$$A={}^tu_1^*A_1{}^tu_1,\quad D=u_2^*D_1u_2,\quad E=u_2^*E_1u_2,$$

ただし

$$A_1=1-(X^*X+\tilde{t}),\quad D_1=1-(YY^*+\tilde{t})$$
$$E_1=D_1-(X^*t-t^*Y)^*A_1^{-1}(X^*t-t^*Y)$$
$$\left(\tilde{t}=\begin{pmatrix}|t_1|^2 & \\ & |t_2|^2\end{pmatrix}\right)$$

を得る。 よって

$$Z\in\mathfrak{D}\iff A_1>0,\ E_1>0\ .$$

右の条件は X, Y, t のみに依存することと, Z と ${}^tZ$ に対しては 分解 u_1tu_2 において 同じ t がとれることに注意すれば

$$Z\in\mathfrak{D}\iff\varphi_0(Z)\in\mathfrak{D}$$

が示される。 (Lemma の証明終わり)

(III) $n=3$ の場合

$$L\begin{pmatrix} z & u \\ -{}^tu & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & L_1u \\ -{}^t(L_1u) & 0\end{pmatrix}\quad (z=-{}^tz\in M_2(\mathbb{C}),$$

$u\in\mathbb{C}^2)$ であった。 ただし L_1 は $\mathbb{C}^2$ の線型変換。

$\begin{pmatrix} 0 & u \\ -{}^tu & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{D}\iff u\in I_{2,1}$ ゆえ, L_1 は $I_{2,1}$ の

0をfixする解析的自己同型をひきおこす。定理Bより
$L_1 \in U(2)$。今 $\mu \in \mathbb{T}$ を，$\det(\mu L_1)=1$ なるよう
にとり，$U = \begin{pmatrix} \mu L_1 & \\ & \mu^{-1} \end{pmatrix} \in U(3)$ とおけば

$$U Z {}^tU = L(Z) \qquad (\forall Z \in V) \quad .$$

従って $Aut(\mathcal{D})_0 = \Phi(K)$ が証明された。