数理解析研究所講究録
第 497 巻 1983 年 116-138

実2次体のStark-新谷の合同類不変量とある相対類数について

立教大　　荒川　恒男

§0. introduction。

実2次体の類体構成問題に関連して、Stark [5] はある種のL-関数の一階導関数の $s=0$ での値を利用して、実2次体（総実代数体までこめた形で議論されているが）のある合同類群の不変量を構成し、その不変量の整数論的性格に関する予想を実例とともに提出した。雑に言えば、それらの不変量が実2次体のある合同類体の単数になっていることを主張する予想である。新谷 [2] は実2次体のある種のL-関数の $s=1$ での値が二重ガンマ関数のある特殊値を利用して記述できることを示し、二重ガンマ関数の特殊値が実2次体の類体構成問題に重要な役割を演ずるであろうことを示唆した。さらに [3] において、Starkの導入した実2次体の不変量が二重ガンマ関数のある特殊値の積として書けることを示し、

Stark の予想をより精密な形に再構成した。同時に、二重ガンマ関数の特殊値の積による表示を利用し、計算機を用いて予想を支持する実例を豊富に提供されている。さらに、新谷[3]はある特別な場合には予想が成立することの証明に成功している。

このノートでは、Stark－新谷の予想が成立することを仮定した上で、彼らの導入した合同類不変量が実2次体上のある2つの合同類体の相対類数と密接な関係のあることを示し、その合同類不変量たちが単数として、考えている合同類体の単数群の中でどういう性質をもつかを考察する。そのような議論は Stark－新谷の予想を仮定しないと進まないので、予想の解かれている場合が興味をひく。そこで、新谷[3]で与えられた、予想の成立するための条件をなるべく例が多く作れる形に書きなおし、予想が解かれている場合（新谷の定理が成りたつ場合）が（本質的に少いのだけれども）ある程度は豊富にあることを実例を作って示したいと思う。実際に、cyclotomic $\mathbb{Z}_p$－拡大 $K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ で、各 K_n に対して Stark－新谷の予想が成立するものを構成することもできる。

§1．Stark－新谷の合同類不変量とある相対類数

Fを実2次体、d_Fをその判別式、$E(F)$をFの単数群、$E^+(F)$をFの総正単数からなる$E(F)$の部分群とする。Fの整イデアル$\mathfrak{f}$に対して、$H_F(\mathfrak{f})$を$\mathfrak{f}$を法とする狭義合同類群とする。$I_F(\mathfrak{f})$を$\mathfrak{f}$と素なFの分数イデアルのなす群、$P^+(\mathfrak{f})$を、$P^+(\mathfrak{f}) = \{(\theta) \mid \theta \equiv 1 \bmod \mathfrak{f},\ \theta$は総正$,\ \theta \in F^\times\}$で定義される$I_F(\mathfrak{f})$の部分群とするとき、

$$H_F(\mathfrak{f}) = I_F(\mathfrak{f}) / P^+(\mathfrak{f})$$

である。$\alpha \in F$に対してその共役元をα'と記す。[3]に従って$\mathfrak{f}$に次の2条件を仮定する。

(1)　$\forall u \in E^+(F)$に対して　$u+1 \notin \mathfrak{f}$

(2)　$u>0,\ u'<0,\ u-1 \in \mathfrak{f}$をみたす$u \in E(F)$は存在しない。

総正なFの整数νで$\nu+1 \in \mathfrak{f}$をみたすものをとり、単項イデアル(ν)で代表される$H_F(\mathfrak{f})$の類を$\nu(\mathfrak{f})$と書く。また、$\mu<0,\ \mu'>0,\ \mu-1 \in \mathfrak{f}$なる$F$の整数$\mu$をとり、単項イデアル$(\mu)$で代表される$H_F(\mathfrak{f})$の類を$\mu(\mathfrak{f})$と記す。誤解のおそれのないときは、$\mu(\mathfrak{f}),\ \nu(\mathfrak{f})$を単に$\mu,\ \nu$と書くことにする。

各類$c \in H_F(\mathfrak{f})$に対し、$\zeta_F(s,c)$をcに属する類ゼータ関数とする。すなわち、

$$\zeta_F(s, c) = \sum_{\mathfrak{a} \in c} N(\mathfrak{a})^{-s} \qquad \left(\begin{array}{l}\mathfrak{a}\text{ は } c \text{ に属する整イデアル}\\ \text{全体をわたる。}\end{array}\right)$$

$\zeta_F(s, c)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し、$s=1$ 以外では正則な関数である。Stark-新谷の合同類不変量 $X_{\mathfrak{f}}(c)$ $(c \in H_F(\mathfrak{f}))$ は次のように定義される。

$$X_{\mathfrak{f}}(c) = \exp\left(\zeta_F'(0, c) - \zeta_F'(0, c\nu)\right).$$

ただちに示される性質として、

$$X_{\mathfrak{f}}(c\nu) = X_{\mathfrak{f}}(c)^{-1}.$$

狭義合同類群 $H_F(\mathfrak{f})$ の指標 χ に対して L-関数 $L_F(s, \chi)$ を

$$L_F(s, \chi) = \sum_{c \in H_F(\mathfrak{f})} \chi(c)\, \zeta_F(s, c)$$

とする。合同類不変量 $X_{\mathfrak{f}}(c)$ については次のことが示されている。

定理 A（新谷、[2], [3], [4]）

(i) $X_{\mathfrak{f}}(c)$ $(c \in H_F(\mathfrak{f}))$ は二重ガンマ関数のある特殊値の積としてあらわされる。付随的に $X_{\mathfrak{f}}(c) > 0$。

(ii)（Kronecker limit formula）χ を $H_F(\mathfrak{f})$ の原始指標で $\chi(\nu) = -1$ をみたすとする。このとき

$$L_F(1,\chi) = \frac{W(\chi)\cdot 2\pi}{\sqrt{d_F N(\mathfrak{f})}} \sum_{c\in H_F(\mathfrak{f})/\langle\nu\rangle} \chi^{-1}(c) \log X_{\mathfrak{f}}(c)$$

$W(\chi)$は絶対値1のχにのみ依存する複素数。

二重ガンマ関数および(i)の主張の詳細については[2], [4]をみて下さい。

また(ii)において原始指標χに対する条件$\chi(\nu)=-1$は$L_F(s,\chi)$の関数等式のΓ-factorが次の如く与えられるための条件である。すなわち、

$$\xi_F(s,\chi) = \left(\sqrt{d_F N(\mathfrak{f})/\pi^2}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L_F(s,\chi)$$

とおくとき

$$(3) \qquad \xi_F(s,\chi) = W(\chi)\,\xi_F(1-s,\chi^{-1}).$$

$K_F(\mathfrak{f})$を$H_F(\mathfrak{f})$に対応するF上の合同類体とし、σを$H_F(\mathfrak{f})$からGalois群$\mathrm{Gal}(K_F(\mathfrak{f})/F)$へのArtinの標準的同型写像とする。$H_F(\mathfrak{f})$の部分群$G$に対し$K_F(\mathfrak{f},G)$を$G$に対応する$K_F(\mathfrak{f})$の部分体とする。すなわち、

$$K_F(\mathfrak{f},G) = \left\{\theta\in K_F(\mathfrak{f}) \;\middle|\; \theta^{\sigma(g)} = \theta \quad \text{for } \forall g\in G\right\}.$$

$X_{\mathfrak{f}}(c)$の数論的性質に関して、次の予想が提出されている

（[5], [3], [4]）。いま，$H_F(\mathfrak{f})$ の部分群 G で，$\mu \in G$，$\nu \notin G$ なるものに対して

$$X_{\mathfrak{f}}(c,G)=\prod_{g\in G} X_{\mathfrak{f}}(cg) \qquad (c\in H_F(\mathfrak{f}))$$

とおく。$X_{\mathfrak{f}}(c,G)$ は商群 $H_F(\mathfrak{f})/G$ の不変量とみなされる。$\mathfrak{f}$ の divisor $\mathfrak{f}_0$ で条件 (1), (2) をみたすものに対して自然な写像

$$H_F(\mathfrak{f}) \longrightarrow H_F(\mathfrak{f}_0)$$

を考え，c および G の像を $\tilde{c}$, $\tilde{G}$ と記す。

Stark－新谷の予想： G を $H_F(\mathfrak{f})$ の部分群で $\mu\in G$，$\nu\notin G$ とする。次の (i)，(ii) をみたす自然数 m が存在する。

(i) 任意の $c\in H_F(\mathfrak{f})$ に対して $X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m$ は $k_F(\mathfrak{f},G)$ の単数であり Galois 群の作用に関して

$$\{X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m\}^{\sigma(c_0)} = X_{\mathfrak{f}}(cc_0,G)^m \quad (\forall c_0\in H_F(\mathfrak{f}))。$$

(ii) 不変量の系 $\displaystyle\bigcup_{\mathfrak{f}_0}\left\{X_{\mathfrak{f}_0}(c,\tilde{G})^m \,\middle|\, c\in H_F(\mathfrak{f}_0)/\tilde{G}\right\}$ は

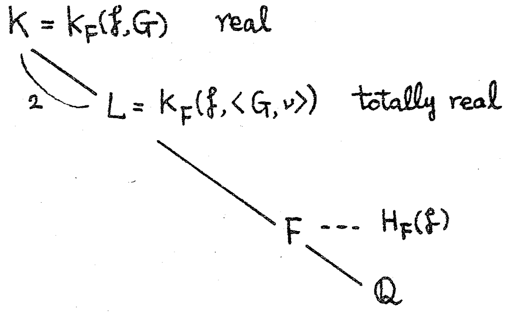
F 上 $k_F(\mathfrak{f},G)$ を生成する（union において $\mathfrak{f}_0$ は $\mathfrak{f}$ の divisor で条件 (1), (2) をみたすもの全体をわたる）。

G は上記と同じとする。$\langle G,\nu\rangle$ を G と ν で生成される

$H_F(\mathfrak{f})$ の部分群とし、L を $\langle G,\nu\rangle$ に対応する $K_F(\mathfrak{f})$ の部分体とする： $L=K_F(\mathfrak{f},\langle G,\nu\rangle)$。簡単のため、$K=K_F(\mathfrak{f},G)$ とおく。h_K, h_L を K および L の類数とする。L は総実代数体であり、K は real、K の $\mathbb{Q}$ 上の共役体は、K と K′ の2つあり、K′ は complex である。従って L の無限素点には K/L で分岐するものがある。推進定理を使う簡単な考察により、

$$h_L \mid h_K$$

が成りたつ。図を書いておくと、



F のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a}'$ を $\mathfrak{a}$ に共役なイデアルとする。

定理B（新谷［3］） $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}'$ とする。G は $H_F(\mathfrak{f})$ の部分群で $\mu\in G$, $\nu\notin G$ とする。$L=K_F(\mathfrak{f},\langle G,\nu\rangle)$ が $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大体ならば、不変量 $X_{\mathfrak{f}}(c,G)$ に関する Stark-新谷の予想は成立する。

さて、K, L は上記と同一とする。E(K), E(L) を K,

およびLの単数群とする。$X_{\mathfrak{f}}(c,G)$ に関して Stark-新谷の予想が成立すると仮定するならば、適当な自然数 m に対して $X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m$ $(c\in H_F(\mathfrak{f})/G)$ は $E(K)$ の元である。次の問題を考えることは自然であろう。

問題： Stark-新谷の予想が正しいと仮定して、

$X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m$ $(c\in H_F(\mathfrak{f})/G)$ たちは K の単数群 $E(K)$ の中でどの程度の位置をしめるか。

不満足ではあるが、この問題にある程度の解答を与えることができる。

いま、$n=[L:F]$ とおく。L は総実なので $E(L)$ の rank は $2n-1$、$E(L)$ を生成する単数を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n-1}$ とおく。$E(L)=\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n-1}\rangle$ と略記する。$E(K)$ の rank は $3n-1$ で $E(K)$ と $E(L)$ は rank にして n だけ差がある。

$n=|H_F(\mathfrak{f})/\langle G,\nu\rangle|$ に注意する。$X_{\mathfrak{f}}(c\nu,G)^m=X_{\mathfrak{f}}(c,G)^{-m}$ であるので、$X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m\in E(K)$ のうちで独立な単数は

$$\{X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m \mid c\in H_F(\mathfrak{f})/\langle G,\nu\rangle\}$$

であると想像される。この個数が n で、これらの単数が $E(K)$ と $E(L)$ の差をうめるのではないかと想像される。

います，±1 および $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n-1}$, $X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m$ ($c \in H_F(\mathfrak{f})/\langle G,\nu\rangle$) の 3n-1 個の単数で生成される E(K) の部分群を $E_{X,m}(K)$ と記す：

$$E_{X,m}(K) = \left\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n-1},\ X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m\ \ (c \in H_F(\mathfrak{f})/\langle G,\nu\rangle) \right\rangle.$$

$\mathfrak{f}$ が F の素イデアルの巾のときは，次が成りたつ。

定理 1. $\mathfrak{p}$ を F の素イデアル，$\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^{\ell}$ ($\ell \geqq 1$) とし，条件(1), (2) はみたされているとする。$\mu \in G$, $\nu \notin G$ をみたす $H_F(\mathfrak{f})$ の部分群 G に関して Stark-新谷の予想は正しいと仮定する。すなわち，ある自然数 m に対して $X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m \in E(K)$, $\{X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m\}^{\sigma(c_0)} = X_{\mathfrak{f}}(cc_0,G)^m$ ($c, c_0 \in H_F(\mathfrak{f})$ とする)。このとき，単数 $X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m$ ($c \in H_F(\mathfrak{f})/\langle G,\nu\rangle$) は E(L) 上独立で，

$$\frac{h_K}{h_L} = 2^{1-2n} m^{-n} \left[E(K) : E_{X,m}(K) \right] \qquad (n = [L:F])$$

が成立する。

証明： $K = k_F(\mathfrak{f}, G)$, $L = k_F(\mathfrak{f}, \langle G,\nu\rangle)$ であった。$\zeta_K(s)$ および $\zeta_L(s)$ を K および L の Dedekind のゼータ関数とする。$H_F(\mathfrak{f})$ の指標 χ に対して $\mathfrak{f}_\chi$ をその導手，$\tilde{\chi}$ を χ に付随する $\mathfrak{f}_\chi$ を法とする原始指標とする。よく知られている考察から，

$$(4)\qquad \frac{\zeta_K(s)}{\zeta_L(s)} = \prod_{\chi}{}' L_F(s,\tilde{\chi})$$

積において，χ は $H_F(\mathfrak{f})$ の指標で $\chi|_G = 1$，$\chi(\nu) = -1$ をみたすもの全体をわたる。D_K，D_L を K および L の判別式、R_K，R_L を K および L の単数基準とする。(4) 式において $s \longrightarrow 1$ の極限をとると、

$$(5)\qquad \frac{(2\pi)^n R_K h_K}{R_L h_L}\cdot\left(\frac{D_L}{|D_K|}\right)^{1/2} = \prod_{\chi}{}' L_F(1,\tilde{\chi})\ .$$

$\tilde{\chi}(\nu) = -1$ だから $L_F(s,\tilde{\chi})$ の関数等式 (3) より、

$$(6)\qquad L_F(1,\tilde{\chi}) = \frac{2\pi W(\tilde{\chi})}{\sqrt{d_F N(\mathfrak{f}_\chi)}}\, L_F'(0,\tilde{\chi}^{-1})\ .$$

(5), (6) より．

$$\frac{h_K}{h_L} = \frac{R_L}{R_K}\times\prod_{\chi}{}' L_F'(0,\tilde{\chi}^{-1})\ .$$

いま，$\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^l$ であり，$\mathfrak{f}_\chi \neq \mathfrak{O}_F$（F の整数環）だから、$L_F(s,\tilde{\chi}^{-1}) = L_F(s,\chi^{-1})$ に注意する。新谷 [3] の Proposition 3 により、

$$L_F'(0,\chi^{-1}) = \sum_{c\in H_F(\mathfrak{f})/\langle\nu\rangle} \chi^{-1}(c)\log X_{\mathfrak{f}}(c)$$

$$= \sum_{c\in H_F(\mathfrak{f})/\langle G,\nu\rangle} \chi^{-1}(c)\log X_{\mathfrak{f}}(c,G)\ .$$

従って、

$$(7)\qquad \frac{h_K}{h_L} = \frac{R_L}{m^n R_K} \times \prod_{\chi}{}' \left\{ \sum_{c \in H_F(f)/\langle G, \nu\rangle} \chi^{-1}(c) \log X_f(c, G)^m \right\}.$$

$H_F(f)/\langle G, \nu\rangle$ の一つの完全代表系を $c_1, c_2, \cdots, c_n$ とする。$X_f(c_j, G)^m \in E(K)$ $(1 \leqq j \leqq n)$，かつ $\{X_f(c_j, G)^m\}^{\sigma(c_i)} = X_f(c_i c_j, G)^m$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$。記述を簡単にするため、$X(c) = X_f(c, G)$ $(c \in H_F(f))$ とおく。K の単数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n-1}, X(c_1)^m, \cdots, X(c_n)^m$ の単数基準 $R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n-1}, X(c_1)^m, \cdots, X(c_n)^m)$ を計算する。定義および簡単な考察により、

$$R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n-1}, X(c_1)^m, \cdots, X(c_n)^m)$$

$$= \pm 2^{2n-1} R_L \times \begin{vmatrix} \log X(c_1^2)^m & \log X(c_2 c_1)^m & \cdots & \log X(c_n c_1)^m \\ \log X(c_1 c_2)^m & \log X(c_2^2)^m & \cdots & \log X(c_n c_2)^m \\ & \cdots & & \\ \log X(c_1 c_n)^m & \log X(c_2 c_n)^m & \cdots & \log X(c_n^2)^m \end{vmatrix}$$

右辺の行列式は、Dedekind の group determinant の定理を多少、modify して用いると、変形され、結局次の結果を得る。

$$R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n-1}, X(c_1)^m, \cdots, X(c_n)^m)$$
$$= \pm 2^{2n-1} R_L \times \prod_{\chi}{}' \left\{ \sum_{c \in H_F(f)/\langle G, \nu\rangle} \chi^{-1}(c) \log X_f(c, G)^m \right\}.$$

故に(7)より．$R(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2n-1}, X(c_1)^m, \cdots, X(c_n)^m) \neq 0$。すなわち、$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{2n-1}$, $X_{\mathfrak{f}}(c, G)^m$ ($c \in H_F(\mathfrak{f})/\langle G, \nu \rangle$) はKの独立な単数である。再び(7)より．

$$\frac{h_K}{h_L} = \pm 2^{1-2n} m^{-n} \frac{R(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{2n-1}, X(c_1)^m, \cdots, X(c_n)^m)}{R_K} 。$$

故に，

$$\frac{h_K}{h_L} = 2^{1-2n} m^{-n} [E(K) : E_{X,m}(K)] \qquad \text{Q.E.D.}$$

次に$\mathfrak{f}$が素イデアルの巾であるという条件をはずすことを考える。以下，Stark-新谷の予想が解かれている場合が興味をひくので，定理Bの条件，$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}'$ および $L=K_F(\mathfrak{f}, \langle G, \nu \rangle)$ がQ上のアーベル拡大であることを仮定する。この条件については§2で論ずる。

$\mathfrak{P}(\mathfrak{f})$を$\mathfrak{f}$を割るFの素イデアルのなす集合とする。$\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\nu(\mathfrak{p})}$ とかき，$\mathfrak{P}(\mathfrak{f})$ の各部分集合Sに対し，

$$\mathfrak{f}(S) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{\nu(\mathfrak{p})}$$

とおく。更に，$n(S) = |H_F(\mathfrak{f})| / |H_F(\mathfrak{f}(S))|$ とする。新谷[3]は新しい不変量 $Y_{\mathfrak{f}}(c)$ を導入した。すなわち，$c \in H_F(\mathfrak{f})$ に対して，

$$Y_{\mathfrak{f}}(c) = \prod_{S} X_{\mathfrak{f}(S)}\Big(\tilde{c} \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{f}) - S} (\mathfrak{p})^{-1}\Big)^{1/n(S)}$$

ここで S は $\mathfrak{f}(S)$ が条件(1)（$^{\forall}u \in E^{+}(F)$ に対して $u+1 \notin \mathfrak{f}(S)$）をみたす $\mathfrak{P}(\mathfrak{f})$ の部分集合をわたる。$\tilde{c}$ は自然な全射 $H_F(\mathfrak{f}) \longrightarrow H_F(\mathfrak{f}(S))$ による c の像。次の定理が得られている。

定理 C （新谷［3］） $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}'$ とし、$L = k_F(\mathfrak{f}, \langle G, \nu \rangle)$ は $\mathbb{Q}$ 上アーベルとする。適当な自然数 m に対して、次の (i)、(ii) が成立する。

(i) $Y_{\mathfrak{f}}(c, G)^m$ （$c \in H_F(\mathfrak{f})/G$）は $K = k_F(\mathfrak{f}, G)$ の単数であり、F 上 K を生成する。

(ii) $\{Y_{\mathfrak{f}}(c, G)^m\}^{\sigma(c_0)} = Y_{\mathfrak{f}}(cc_0, G)^m$ （$c, c_0 \in H_F(\mathfrak{f})$）。

新谷［3］は定理 C から定理 B を導いた。

定理 1 と同様にして次を得る。

定理 2. $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}'$ とする。$\mu \in G$, $\nu \notin G$ をみたす $H_F(\mathfrak{f})$ の部分群 G に関して、$L = k_F(\mathfrak{f}, \langle G, \nu \rangle)$ は $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大とする。自然数 m は定理 C におけると同一とする。このとき、$Y_{\mathfrak{f}}(c, G)^m$ （$c \in H_F(\mathfrak{f})/\langle G, \nu \rangle$）は $E(L)$ 上独立で、

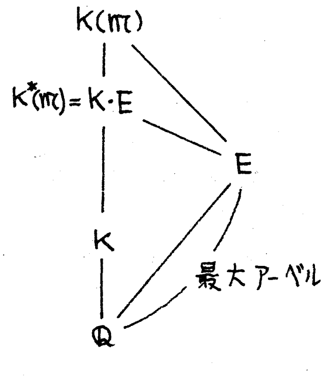
$$\frac{h_K}{h_L} = 2^{1-2n} m^{-n} \left[E(K) : E_{Y,m}(K) \right] \qquad (n = [L:F])$$

が成立する。ここで、$E_{Y,m}(K)$ は $E(L)$ と $Y_f(c,G)^m$ ($c \in H_F(f)/\langle G,\nu\rangle$)、および ± 1 で生成される $E(K)$ の部分群である。

§2 Stark-新谷の予想が解かれている場合

最近、分岐を許す一般の genus field の理論が濱村[1]によって発展され genus 数などが計算されている。ここでは、定理Bによって Stark-新谷の予想が解かれている場合を、実2次体の分岐を許す genus field の立場からみなおして、予想の成立する例の範囲を広げる努力をする。

まず、簡単に genus field の定義をする。Kを有限次代数体、$\mathfrak{m}$ をその整因子(無限素点を含めることもある)として、$K(\mathfrak{m})$ をK上の mod $\mathfrak{m}$ の ray class field とする。



定義　Eを $K(\mathfrak{m})$ に含まれる $\mathbb{Q}$ 上の最大アーベル拡大とする。KとEの合成体 $K \cdot E$ を $K/\mathbb{Q}$ の mod $\mathfrak{m}$ の genus field といい、$K^*(\mathfrak{m})$ と記す。拡大次

数 $[K^*(\mathfrak{m}):K]$ を $K/\mathbb{Q}$ 、mod $\mathfrak{m}$ での genus 数とよび、$g_K(\mathfrak{m})$ と書く。

筆者は、K が 2 次体の場合に genus field $K^*(\mathfrak{m})$ および genus 数 $g_K(\mathfrak{m})$ が何になるかを具体的に、濱村氏に教えていただいた。以下ではその結果を使います。

実 2 次体 F、$\mathfrak{f}$、$H_F(\mathfrak{f})$ 等、§1 におけると同一とする。さらに、$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}'$ とする。$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}'$ であることより、$c\in H_F(\mathfrak{f})$ に対して $c'\in H_F(\mathfrak{f})$ が自然に定まる。μ, ν を §1 と同一とすると、μ は位数 2 であり、

$$\nu = \mu\mu'$$

の関係が成立する。写像 $c \longrightarrow c'$ は $H_F(\mathfrak{f})$ の automorphism で

$$H_F(\mathfrak{f})_0 = \{ c\in H_F(\mathfrak{f}) \mid c=c' \}$$

とおく。§1 における $H_F(\mathfrak{f})$ の部分群 G として $G=\langle\mu\rangle$（$\langle\mu\rangle$ は μ で生成される $H_F(\mathfrak{f})$ の部分群）をとり、

$$K = K_F(\mathfrak{f},\langle\mu\rangle),\quad L = K_F(\mathfrak{f},\langle\mu,\nu\rangle)$$

とする。いま、L^* を L に含まれる $\mathbb{Q}$ 上の最大アーベル拡大とすると、$L^*\supset F$ であり、genus field の言葉でいえば、L^* は $F/\mathbb{Q}$ の mod $\mathfrak{f}$ の genus field である。すなわち、

$$L^* = F^*(\mathfrak{f}).$$

genus 数については，　　　$g_F(\mathfrak{f}) = [L^* : F]$ 。

また，簡単な考察により

(8)　　　$$[L^* : F] = \frac{1}{2}\#(H_F(\mathfrak{f})_0) .$$

以下，簡単のため，F の判別式 d_F に対して

$$d_F \equiv 1 \mod 4$$

を仮定する。f をイデアル $\mathfrak{f}$ に含まれる最小の正整数とし，t を $F/\mathbb{Q}$ で分岐する素数 p で $(p, f) = 1$ なるものの個数とする。このとき，

(9)
$$g_F(\mathfrak{f}) = 2^{t-2}\varphi(f) \qquad (\varphi(f) \text{ は Euler の関数})$$
$$L^* = \mathbb{Q}(\zeta_f)\cdot\mathbb{Q}(\sqrt{p_1^*}, \sqrt{p_2^*}, \cdots, \sqrt{p_g^*}) \cap \mathbb{R} ,$$

ここで，p_i^* $(i=1,\cdots,g)$ は F の全ての prime discriminant $p_i^* = (-1)^{(p_i-1)/2}p_i$，$p_i$ は d_F を割る素数たち，また ζ_f は 1 の原始 f 乗根。(9) 式は濱村氏に教えていただいたことの一部である。h_F を F の類数，$E^+(\mathfrak{f})$ を $E(F)$ の部分群で

$$E^+(\mathfrak{f}) = \{ u \in E^+(F) \mid u-1 \in \mathfrak{f} \}$$

とおく。よく知られているように，

(10)　　　$$\#(H_F(\mathfrak{f})) = \frac{4\varphi_F(\mathfrak{f})h_F}{[E(F):E^+(\mathfrak{f})]} .$$

ここで $\varphi_F(\mathfrak{f})$ は F の Euler 関数。(8), (9), (10) 式より，

$$(11) \qquad [H_F(\mathfrak{f}) : H_F(\mathfrak{f})_0] = \frac{2^{3-t}\varphi_F(\mathfrak{f})\,h_F}{[E(F) : E^+(\mathfrak{f})]\,\varphi(f)}$$

一方，新谷［3］の p. 141 により次のことが知られている。

$$L \text{ が } \mathbb{Q} \text{ 上のアーベル拡大} \iff L = L^* \iff [H_F(\mathfrak{f}) : H_F(\mathfrak{f})_0] = 2$$

このことと（11）式により、与えられた $K = k_F(\mathfrak{f}, \langle\mu\rangle)$ に対して Stark－新谷の予想が成立するかどうかを比較的容易に検証できる。以下，二，三の実例を与える。

例 1． $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$， $\mathfrak{f} = (4)$ とする。$\mathfrak{f}$ は (1), (2) の条件をみたす。 $\varepsilon_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$， $\varepsilon = \varepsilon_0^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ とおく。

$$E(F) = \langle \pm\varepsilon_0 \rangle \qquad (E(F) \text{ は } \pm\varepsilon_0 \text{ で生成される。})$$

$$E^+(F) = \langle \varepsilon \rangle$$

$$E^+(\mathfrak{f}) = \langle \varepsilon^3 \rangle$$

となる。 p を素数で，$(p, 10) = 1$ とする。

$$\mathfrak{f}_n = \mathfrak{f}p^n = (4p^n) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおき、狭義合同類群 $H_F(\mathfrak{f}_n)$ 等を考える。もちろん，$\mathfrak{f}_n = \mathfrak{f}_n'$。

$$\mu_n = \mu(\mathfrak{f}_n), \qquad \nu_n = \nu(\mathfrak{f}_n)$$

とおく。 $\mu_n, \nu_n \in H_F(\mathfrak{f}_n)$。さらに，

$$K_n = k_F(\mathfrak{f}_n, \langle\mu_n\rangle) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする。自然な surjection $H_F(\mathfrak{f}_n) \longrightarrow H_F(\mathfrak{f}_{n-1})$ を通して K_{n-1} は K_n の部分体となる。L_n^* を K_n に含まれる $\mathbb{Q}$ 上の最大アーベル拡大とする。L_n^* は $F/\mathbb{Q}$ の mod $\mathfrak{f}_n$ の genus field である。(9) 式から、

$$L_n^* = \mathbb{Q}(\zeta_{4p^n})\cdot\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \cap \mathbb{R}$$

$$= \mathbb{Q}(\sqrt{5})\cdot\mathbb{Q}(\zeta_{4p^n})^+$$

($\mathbb{Q}(\zeta_m)^+$ は $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ の最大実部分体とする)。

$S_n = [H_F(\mathfrak{f}_n) : H_F(\mathfrak{f}_n)_0]$ とおく。まず $S_0 = 2$ ([3] の §3 の例1参照)。簡単な計算により、$n \geqq 1$ に対して、

$$S_n = \frac{2}{[E^+(\mathfrak{f}) : E^+(\mathfrak{f}_n)]} \times \begin{cases} p^{n-1}(p-1) & \cdots\ p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}' \ (\text{splits in } F/\mathbb{Q}) \\ p^{n-1}(p+1) & \cdots\ p = \mathfrak{p} \ (\text{remains prime in } F/\mathbb{Q}) \end{cases}$$

$\varepsilon^3 \in E^+(\mathfrak{f})$ の mod $\mathfrak{f}p$ での位数を a とする($\varepsilon^{3a} \equiv 1 \mod \mathfrak{f}p$ となる最小の正整数)。$2 \mid S_n$ であるから、

$$a \mid p-1 \quad \cdots\cdots \quad p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}' \text{ in } F/\mathbb{Q}$$

$$a \mid p+1 \quad \cdots \quad p = \mathfrak{p} \text{ in } F/\mathbb{Q}\ 。$$

さらに

$$\varepsilon^{3a} = 1 + 4p^{\ell}\theta \qquad (\ell \geqq 1,\ \theta \text{ は } F \text{ の整数で } (\theta, p) = 1)$$

とおくことができる($p^{\ell} \parallel \varepsilon^{3a} - 1$)。このとき容易に、

$$[E^+(\mathfrak{f}) : E^+(\mathfrak{f}_n)] = a \quad \cdots \quad 1 \leqq n \leqq l,$$

$$[E^+(\mathfrak{f}_n) : E^+(\mathfrak{f}_{n+1})] = p \quad \cdots \quad n \geqq l$$

故に、 $1 \leqq n \leqq l$ のとき

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{2p^{n-1}(p-1)}{a} & --- \quad p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}' \quad \text{in } F/\mathbb{Q} \\[2ex] \dfrac{2p^{n-1}(p+1)}{a} & --- \quad p = \mathfrak{p} \quad \text{in } F/\mathbb{Q} \end{cases}$$

$n > l$ のとき

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{2p^{l-1}(p-1)}{a} & --- \quad p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}' \quad \text{in } F/\mathbb{Q} \\[2ex] \dfrac{2p^{l-1}(p+1)}{a} & --- \quad p = \mathfrak{p} \quad \text{in } F/\mathbb{Q} \end{cases}。$$

これより、S_n の値は n が十分大きいところでは n によらず一定であることがわかる。ここで関係

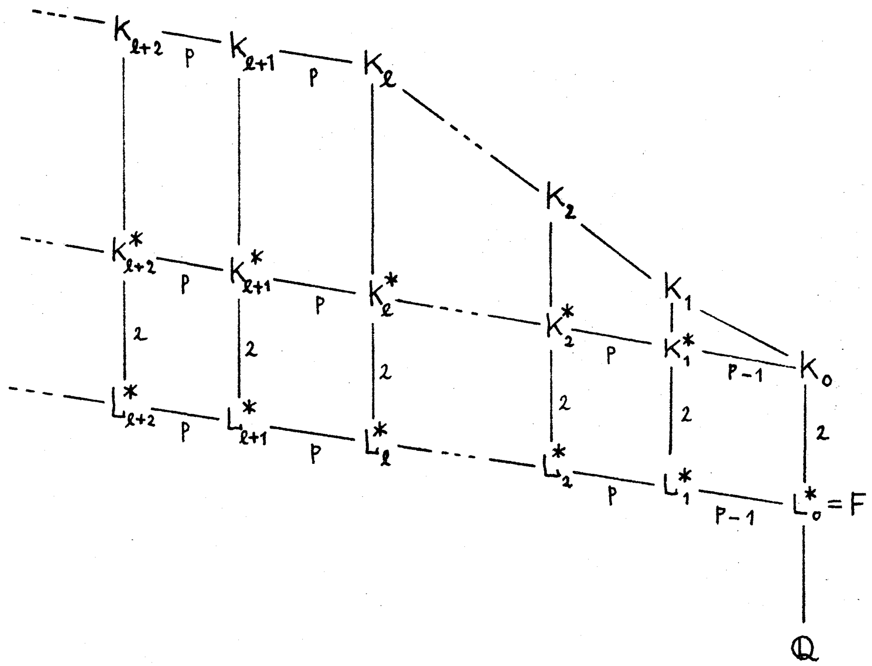
$$K_1^* = K_0 \cdot L_1^*, \quad K_2^* = K_1^* \cdot L_2^*, \quad ---, \quad K_n^* = K_{n-1}^* \cdot L_n^*, \quad \cdots$$

で帰納的に体 K_n^* を定義する。K_n^* は $K_n = k_F(\mathfrak{f}_n, \langle \mu_n \rangle)$ の部分体である。K_n^* に対応する $H_F(\mathfrak{f}_n)$ の部分群を G_n とすると、あきらかに $\mu_n \in G_n$, $\nu_n \notin G_n$ である。L_n^* は K_n^* に含まれる $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大である。$L_0^* = F$ および $[K_0 : F] = 2$ に注意する。また $[K_n^* : L_n^*] = 2$ であることも

容易に従う。故に、K_n^* $(n=0,1,2,\cdots)$ に対しては新谷の定理（定理B）が成立する。

$$K_\infty^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^*$$

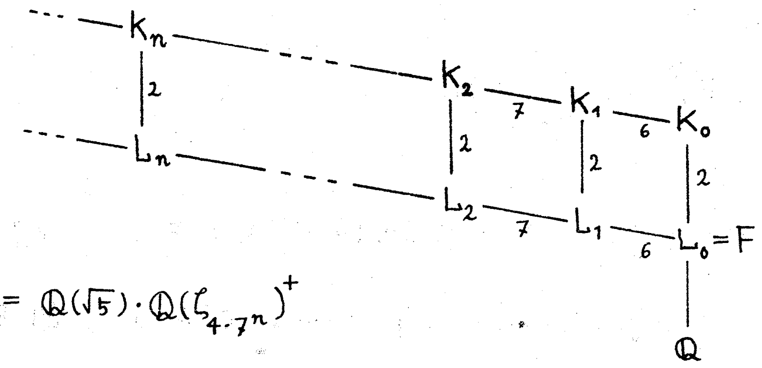
とおくと、K_n^*/K_{n-1}^* は p 次巡回拡大であり、$K_n^* = K_0 \cdot L_n^*$ だから K_∞^* は cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-拡大である。図をかくと次のようになる。



$$h_n^- = \frac{h_{K_n^*}}{h_{L_n^*}}$$ とおくとき相対類数 h_n^- の p-part を調べることは興味のある問題のように思われる。

$p=7$ のときは $a=8$, $\ell=1$ である。従って $s_n=2$ $(n=0,1,2,\cdots)$。この場合は K_n について定理Bが成立する。

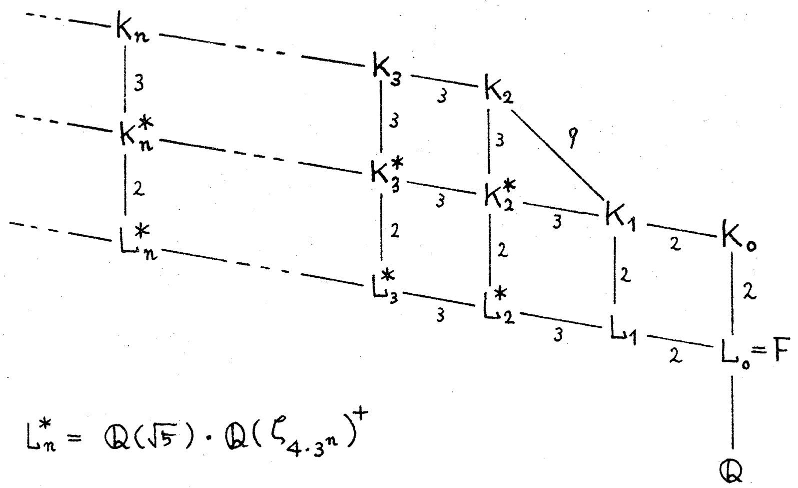
$p=7$



$L_n = \mathbb{Q}(\sqrt{5})\cdot\mathbb{Q}(\zeta_{4\cdot 7^n})^+$

（$L_n = L_n^*$ に注意）

$p=3$ のとき　$a=4$, $\ell=2$ 。 $s_0=s_1=2$, $s_n=4$ $(n\geqq 2)$。



$L_n^* = \mathbb{Q}(\sqrt{5})\cdot\mathbb{Q}(\zeta_{4\cdot 3^n})^+$

例 2　　$F=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathfrak{f}=(4)$, $p=5$, $\mathfrak{p}=(\sqrt{5})$, $\mathfrak{f}_n=\mathfrak{f}\mathfrak{p}^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とする。$\mathfrak{f}_n=\mathfrak{f}_n'$ である。容易に

$$s_n=[H_F(\mathfrak{f}_n):H_F(\mathfrak{f}_n)_0]=2 \qquad (n=0,1,2,\cdots)。$$

$K_n = k_F(\mathfrak{f}_n, \langle\mu_n\rangle)$, $L_n = k_F(\mathfrak{f}_n, \langle\mu_n, \nu_n\rangle)$ とおくと L_n は $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大になる。(9) より、

$$L_n = \begin{cases} \mathbb{Q}(\zeta_{4\cdot 5^{n/2}})^+ & \text{--- } n \text{；偶数} \geqq 2 \\ \mathbb{Q}(\zeta_{4\cdot 5^{(n+1)/2}})^+ & \text{--- } n \text{；奇数。} \end{cases}$$

$L_0 = F$ である。また、$K_n = K_0 \cdot L_n$ に注意する。ただちに、$L_1 = L_2$, $L_3 = L_4$, $\cdots$, $K_1 = K_2$, $K_3 = K_4$, $\cdots$, である。$K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{2n-1}$ は cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-拡大で各 K_{2n-1} について定理Bが成立する。

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dash] & K_{2n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "2"] & \cdots \arrow[r, dash] & K_3 \arrow[r, dash, "5"] \arrow[d, dash, "2"] & K_1 \arrow[r, dash, "2"] \arrow[d, dash, "2"] & K_0 \arrow[d, dash, "2"] \\
\cdots \arrow[r, dash] & L_{2n-1} \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & L_3 \arrow[r, dash, "5"] & L_1 \arrow[r, dash, "2"] & L_0 = F \arrow[d, dash] \\
 & & & & & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

$$L_{2n-1} = \mathbb{Q}(\zeta_{4\cdot 5^n})^+$$

例 3　　$F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathfrak{f} = (4)$　$\mathfrak{f}_n = (2^{n+2})$　$(n = 0, 1, 2, \cdots)$

のときも同様で、

$$S_n = [H_F(\mathfrak{f}_n) : H_F(\mathfrak{f}_n)_0] = 2 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)。$$

従って　$L_n = k_F(\mathfrak{f}_n, \langle\mu_n, \nu_n\rangle)$ は $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大。故に $K_n = k_F(\mathfrak{f}_n, \langle\mu_n\rangle)$ については定理Bが成立する。

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dash] & K_n \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash, "2"] & K_2 \arrow[r, dash, "2"] \arrow[d, dash, "2"] & K_1 \arrow[r, dash, "2"] \arrow[d, dash, "2"] & K_0 \arrow[d, dash, "2"] \\
\cdots \arrow[r, dash] & L_n \arrow[r, dash, dashed] & L_2 \arrow[r, dash, "2"] & L_1 \arrow[r, dash, "2"] & L_0 = F \arrow[d, dash] \\
 & & & & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
L_n &= \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \cdot \mathbb{Q}(\zeta_{2^{n+2}})^{+} \\
&= \mathbb{Q}\left(\sqrt{5},\ \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

References

[1] M. Hamamura, *On the genus field in Algebraic number fields*, preprint

[2] T. Shintani, *On a Kronecker limit formula for real quadratic fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 24 (1977), 167-199

[3] T. Shintani, *On certain ray class invariants of real quadratic fields*, J. Math. Soc. Japan Vol 30, (1978), 139-167

[4] 新谷卓郎, 代数体のL-函数の特殊値について, 数学 29-3, 204-216 (1977).

[5] H.M. Stark, *L-Functions at s=1. III. Totally real fields and Hilbert's Twelfth Problem*, Advances in Math., 22 (1976) 64-84