数理解析研究所講究録
第497巻 1983年 184-189

裏返し変換の一般化について

名大 理学部 寺西 鎮男

記号

$$n,\ m,\ d_i \in \mathbb{N}. \qquad m > d_1,$$

$$\underline{\underline{d}} = (d_1, \cdots\ d_r) \qquad \sum_{i=1}^{r} d_i = n.$$

$$\underline{\underline{d}}^* = (m-n,\ d_r,\ d_{r-1},\ \cdots,\ d_2)$$

$$GL(\underline{\underline{d}},\ n) = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{d_1} & & * \\ & \boxed{d_2} & \\ 0 & & \ddots \quad \boxed{d_r} \end{pmatrix} \right\} \cap GL(n, \mathbb{C})$$

群 G の m-次元ベクトル空間への表現を $(G,\ \rho,\ V(m))$ とする。

Lemma

$(G \times GL(\underline{\underline{d}}, n),\ \rho \otimes \square^*,\ V(m) \otimes V^*(n))$ が概均質ベクトル空間 $\Longleftrightarrow$

$(G \times GL(\underline{\underline{d}}^*, m-d_1),\ \rho^* \otimes \square^*,\ V^*(m) \otimes V(m-d_1)^*)$ が概均質ベクトル空間.

証明．　$V(n)^*$ の base を 1つ fix して．$u_1, \cdots u_n$ とする．

$V(m) \otimes V(n)^* \ni x$ について　$x = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i$ と表わす．他の表わし方：　$x = \sum v_i' \otimes u_i'$

但し．$GL(\underline{d}, n) \ni A = (a_{ij})$ により．

$$u_i = \sum a_{ji} u_j'$$

$$x = \sum_i v_i \otimes u_i$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} v_j \right) \otimes u_i'$$

$$\therefore \quad v_i' = \sum_j a_{ij} v_j$$

Def．　$\left(\overset{d_1}{\underset{i=1}{\mathbb{C}}} v_i, \overset{d_1+d_2}{\mathbb{C}} v_i, \cdots \overset{d_1+\cdots+d_r}{\mathbb{C}} v_i \right)$ を $M(x)$ で表わす．

Def．　Vector space の組のなす 旗多様体 $F(d_1, \cdots d_r)$ を

$$F(d_1 \cdots d_r) = \{ V_1 \subset \cdots \subset V_r \subset V(m) \mid \dim V_i = d_1 + \cdots + d_i \}$$

として定める．　上の写像 $M(x)$ により．

$$M : V(m) \otimes V(n)^* \longrightarrow F(\underline{d})$$
$$x \longmapsto M(x)$$

は．Zariski open なxに対して．well-defined で．$M(V(m) \otimes V(n)^*)$ の Zariski closure は $F(\underline{d})$ に一致する．

しかも．$M(x)$ の作り方から．$M^{-1} M(x)$ の上に．$GL(\underline{d}, n)$ は．transitive に作用する．従って．

$V(m) \otimes V^*(n)$ が．P.V

$\Longleftrightarrow$ （G．$F(\underline{d})$）が open orbit を持つ．

$W_i \underset{\mathrm{def}}{=} \{ v^* \in V^*(m) \mid v^*(V_{r-i+1}) = 0 \}$ と定義すると.

$\{ W_1 \subset \cdots \subset W_r \} \in F(\underline{d}^*)$

明らかに.

$(G,\ F(\underline{d}))$ が open orbit を持つ.

$\Longleftrightarrow$ $(G,\ F^*(\underline{d}^*))$ が open orbit を持つ

$\Longleftrightarrow$ $(G \times GL(\underline{d}^*),\ \rho^* \otimes \square^*,\ V^*(m) \otimes V(m-d_1)^*)$ が P.V.

q.e.d//

※ 上の lemma で $r=1$ の時が 裏返し変換に外ならない.

H. Weyl の Classical groups によれば,

$$S(V(m) \otimes V^*(n))^{G \times SL(\underline{d},n)} \simeq S(x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1},\ x^1 \wedge \cdots x^{d_1+d_2}, \cdots, x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1+\cdots+d_r})^G$$

$x^i = (x^i_1 \cdots x^i_m)$ $(1 \leq i \leq n)$
変数.

(Weyl. classical groups. P. 47)

ここで, $S(x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1},\ x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1+d_2}, \cdots,\ x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1+\cdots+d_r})$ は.

小行列式達の

$$\begin{vmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^{d_1}_{i_1} \\ x^1_{i_2} & \cdots & x^{d_1}_{i_2} \\ \vdots & & \\ x^1_{i_{d_1}} & \cdots & x^{d_1}_{i_{d_1}} \end{vmatrix}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{d_1} \leq m}, \quad \begin{vmatrix} x^1_{j_1} & \cdots & x^{d_1+d_2}_{j_1} \\ \vdots & & \\ x^1_{j_{d_1+d_2}} & \cdots & x^{d_1+d_2}_{j_{d_1+d_2}} \end{vmatrix}_{j_1 < j_2 < \cdots}$$

$\cdots\cdots$

の多項式全体を表わす事にする。

裏返し変換による相対不変式の対応

旗多様体 $F(\underline{d})$ の coordinate に dual coordinate を対応させる写像を $*$ であらわすと 写像

$$* \quad \mathbb{C}[F(\underline{d})] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[F^*(\underline{d}^*)]$$

が定義されるが $(G \times GL(d^*, m-d_1),\ \rho^* \otimes \square^*,\ V^*(m) \otimes V^*(m-d_1))$ の相対不変式は $(G \times GL(\underline{d}, n)\ \rho \otimes \square^*,\ V(m) \otimes V(n)^*)$ の相対不変式を $*$ でひきもどしたものである。

$i_{\underline{d}} = (i_1, \cdots i_d)$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq m)$ に対し

$$x_{i_{\underline{d}}} = \begin{vmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^d_{i_1} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ x^1_{i_d} & \cdots & x^d_{i_d} \end{vmatrix}$$

$S^{l_1 \cdots l_m} = \{$ $x_{i_{\underline{d}}}$ 達の多項式で各 d について斉 l_d 次全体 $\}$

とすれば $S^{l_1 \cdots l_m}$ は $GL(m)$-module で heighest weight $\sum_{i=1}^{m} l_i \Lambda_i$ に対応する既約な $GL(m)$-modul である。

$$\mathbb{C}[x^1 \cdots x^n] = \bigoplus_{\underline{l}} S^{\underline{l}} \qquad l = (l_1, \cdots l_m)$$

で $\mathbb{C}[x^1 \cdots x^n]$ の $S^{\underline{l}}$ への projection を $\pi_{\underline{l}}$ とすれば

f が $(G \times GL(\underline{d}\ n),\ \rho \otimes \square^*,\ V(m) \otimes V(n)^*)$ の相対不変式の時 $\pi_{\underline{l}}(f)$ も相対不変式である。

例. $M(n, m; \mathbb{C})$ $n\times m$ 行列全体 特に $M(n, n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$ とおく.
$Tri_{下}(n, \mathbb{C}) = \{ n\times n$ 下三角行列全体 $\}$
$Tri_{上}(n, \mathbb{C}) = \{ n\times n$ 上三角行列全体 $\}$

$Tri_{下}(n, \mathbb{C}) \times Tri_{上}(n, \mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ へ次の如く作用させる. $g = (a, b)$ $(a \in Tri_{下}(n, \mathbb{C}),\ b \in Tri_{上}(n, \mathbb{C}))$ $x \in M(n, \mathbb{C})$ とする時 $g\cdot x = a x b^{-1}$. 良く知られているように これは 概均質ベクトル空間 ([ ]) である.

Lemma によれば

($Tri_{上}(n, \mathbb{C}) \times Tri_{上}(n-1, \mathbb{C})$, $M(n, n-1)$) は 概均質ベクトル空間. (但し, 作用は, $a \in Tri_{上}(n, \mathbb{C})$, $b \in Tri_{上}(n-1, \mathbb{C})$ $x \in M(n, n-1)$ の時 $(a, b)\circ x = a x b^{-1}$)

(($Tri_{下}(n, \mathbb{C}) \times Tri_{上}(n, \mathbb{C})$), $M_n(\mathbb{C})$) の相対不変式は

$$P_1(x) = x_1^1 \qquad P_2(x) = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad P_n = \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

だから, 対応する ($Tri_{上}(n, \mathbb{C}) \times Tri_{上}(n-1, \mathbb{C})$, $M(n, n-1, \mathbb{C})$) の相対不変式は.

$$Q_1(y) = \begin{vmatrix} y_2^1 & \cdots & y_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad Q_2(y) = \begin{vmatrix} y_3^1 & \cdots & y_3^{n-2} \\ \vdots & & \\ y_n^1 & \cdots & y_n^{n-2} \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad Q_{n-1}(y) = y_n^1,$$

となる.

例. $V = M(n, m, \mathbb{C})$, $(n>m)$. $G = O(n, \mathbb{C}) \times Tri_{上}(m, \mathbb{C})$.

G の V への作用を. $G \ni (a, b)$ $(a, b) \cdot x = a x b^{-1}$ $x \in M(n, m, \mathbb{C})$

により定義すれば. これは概均質ベクトル空間. 従って

Lemma により $\tilde{V} = M(n, n-1)$, $\tilde{G} = O(n, \mathbb{C}) \times GL(n-m, \underbrace{1, 1 \cdots 1}_{m-1})$

(但し,

$$GL(n-m, \underbrace{1 \cdots 1}_{m-1}) = \begin{array}{c} n-m\{ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} * & * \\ O & \ddots \end{pmatrix}$$

$\cap$ $GL(n-1)$ で 群の作用

を $(a, b) \in O(n, \mathbb{C}) \times GL(n-m, \underbrace{1 \cdots 1}_{m-1})$, $x \in M(n, n-1)$ の時.

$(a, b) x = a x b^{-1}$ により定義する.)

は概均質ベクトル空間である.

(V, G) の相対不変式も対応する.