数理解析研究所講究録
第497巻 1983年 190-200

可約な概均質ベクトル空間の一例

筑波大学大学院修士
笠井 伸一

Vを$\mathbb{C}$(=複素数体)上の有限次元ベクトル空間，Gを$\mathbb{C}$上の連結線型代数群，$\rho : G \to GL(V)$を有限次元複素有理表現とする．(G, ρ, V)が概均質ベクトル空間(以下P.V.と記す)であるとは，GがV上Zariski-dense orbitをもつことをいう．

この小論では次の結果を示すことを目的とする．

Gを任意の単純群，ρをGの任意の表現($\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$, $V(m) = V(m_1) \oplus \cdots \oplus V(m_k)$, $\rho_i : G \to GL(V(m_i))$ $(i = 1, \cdots, k)$ はGの$V(m_i)$上の任意の既約表現，$\rho_i \neq 1$, $k \geq 1$)とする．

定理．

☆ $(GL(1)^{1+k} \times SL(2n+1) \times G,\ \square \otimes \rho \oplus \Lambda_2 \otimes 1,$

$V(2n+1) \otimes V(m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))$, $2n+1 \geq m$

が概均質ベクトル空間であるためには，次の①，②，③のうちのどれかであることが必要十分である．

① $(GL(1)^2 \times SL(2n+1) \times SL(m),\ \square\otimes\square\oplus\boxminus\otimes 1,$

$V(2n+1)\otimes V(m)\oplus V(n(2n+1))\otimes V(1))$ $(1\leqq m\leqq 2n+1)$

② $(GL(1)^2 \times SL(2n+1) \times Sp(m),\ \square\otimes\square\oplus\boxminus\otimes 1,$

$V(2n+1)\otimes V(2m)\oplus V(n(2n+1))\otimes V(1))$ $(1\leqq 2m\leqq 2n+1)$

③ $(GL(1)^2 \times SL(2n+1) \times SO(4),\ \square\otimes\square\oplus\boxminus\otimes 1,$

$V(2n+1)\otimes V(4)\oplus V(n(2n+1))\otimes V(1))$ $(4\leqq 2n+1)$

$\square$，$\boxminus$はそのYoung図形に対応する既約表現をあらわすものとする．また$GL(1)^{1+k}$の作用を記さないが，$GL(1)^{1+k}$は各既約成分のスカラー倍として作用しているものとする．（以下でも同様．）

G_1，G_2を単純群，$G = GL(1)^{\ell}\times G_1\times G_2$，$\rho_i : G\to GL(V_i)$ $(i=1,\cdots,\ell)$をGの既約表現，$\rho=\rho_1\oplus\cdots\oplus\rho_\ell$，$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_\ell$とするとき，$(GL(1)^{\ell}\times G,\ \rho,\ V)$がP.V.ならば各$(GL(1)\times G,\ \rho_i,\ V_i)$ $(i=1,\cdots,\ell)$は既約P.V.ゆえに$(GL(1)\times G,\ \rho_i,\ V_i)$は（Sato-Kimura [1]）で得られた既約P.V.の表に表われる．しかし$(GL(1)\times G,\ \rho_i,\ V_i)$がtrivial P.V.，すなわち$(GL(1)\times G_1\times GL(n),\ \rho_i^{(1)}\otimes\square,\ V_i^{(1)}(m)\otimes V(n))$；$m\leqq n$；であれば，$G_1$として任意の単純群，$\rho_i^{(1)}$として任意の既約表現が可能である．

以下 triplet ☆ が P. V. となるような (G, ρ, V) を決定する．

triplet ☆ の P. V. 性に関して保倉理美氏が次の事を示した（くわしい事は本講究録の保倉氏のところを参照のこと）．

命題（保倉）

$$\big(SL(2m+1)\times G\times GL(1)^{1+k},\ \square\otimes\rho\oplus\text{日}\otimes 1,$$
$$V(2m+1)\otimes V(n)\oplus V(m(2m+1))\otimes V(1)\big):\ \text{P. V.}$$
$$\Leftrightarrow\ \big(SL(n-1)\times(G\times Sp(m))\times GL(1)^{1+k},\ \square\otimes(\rho^{*}\oplus\square),$$
$$V(n-1)\otimes(V(n)^{*}\oplus V(2m))\big):\ \text{P. V.}$$

この命題により ☆ が P. V. となるためには，$(SL(n-1)\times G\times GL(1)^{k},\ \square\otimes\rho^{*},\ V(n-1)\otimes V(n)^{*})$ が P. V. でなければならない．したがって裏返し変換により $(G\times GL(1)^{k},\ \rho,\ V(n))$ が P. V.，すなわち simple P. V. でなければならない．

Simple P. V. の表

I. Simple Irred. P. V.（スカラー倍を除いて書いてある）

（Sato-Kimura [1]）

(1) $\underset{\square}{SL(n)}$ $(n\geqq 2)$，(2) $\underset{\square\square}{SL(n)}$ $(n\geqq 2)$，(3) $\underset{\text{目}}{SL(n)}$ $(n\geqq 4)$，

(4) $\underset{\square\square\square}{SL(2)}$，(5) $\underset{\text{目}}{SL(n)}$ $(n=6,7,8)$，(6) $\underset{\square}{Sp(n)}$ $(n\geqq 2)$，

(7) $Sp(3)$ 目 , (8) $SO(n)$ $\square$ $(n \geqq 4)$, (9) $Spin(n)$ (半)スピン表現 $(n = 7, 9, 10, 11, 12, 14)$

(10) (G_2) $V(7)$, (11) E_6 $V(27)$, (12) E_7 $V(56)$.

II. Simple P. V. (既約なものを除く) (Kimura [2])

(1) $SL(n)$ $\underbrace{\square + \cdots + \square}_{k}$ $(2 \leqq k \leqq n+1)$, (2) $SL(n)$ $\underbrace{\square + \cdots + \square}_{k} + \square + \square^{*}$ $(1 \leqq k \leqq n)$,

(3) $SL(2m)$ 日 $+ \underbrace{\square^{(*)} + \cdots + \square^{(*)}}_{k}$ $(1 \leqq k \leqq 3)$ 9 通り , (4) $SL(2m+1)$ 日 $+ \square^{(*)} + \cdots + \square^{(*)}$ $(1 \leqq k \leqq 3)$ 8 通り

(日 $+ \square + \square + \square^{*}$ を除く)

(5) $SL(2m+1)$ 日 $+$ 日 $(m \geqq 2)$, (6) $SL(n)$ $\square\square + \square^{(*)}$

(7) $SL(6)$ 目 $+ \square$, 目 $+ \square + \square$, (8) $SL(7)$ 目 $+ \square^{(*)}$

(9) $Sp(n)$ $\square + \square$, $\square + \square + \square$, (10) $Sp(3)$ 目 $+ \square$

(11) $Spin(n)$ $(n = 7, 8, 10, 12)$ ベクトル表現 $\oplus$ (半)スピン表現 , (12) $Spin(10)$ 偶半スピン表現 $\oplus$ 偶半スピン表現

$(GL(1)^k \times G, \rho, V(m))$ を Simple P. V., G' をその generic isotropy subgroup とする。このとき $(SL(m-1) \times (G \times Sp(n)) \times GL(1)^{1+k}, \square \otimes (\rho^{*} \oplus \square), V(m-1) \otimes (V(m)^{*} \oplus V(2n)))$ が P.

V.であることは，$\square\otimes\rho^*$における generic isotropy subgroup の作用を考えることにより，$(G'\times Sp(m)\times GL(1),\ \square\otimes\square,\ V(m-1)\otimes V(2m))$ がP.V.であることと同値であり，$m-1\leq 2m$ に注意すれば（Sato-Kimura[1]，p.40，Prop. 13 より）これは $(G'\times GL(1),\ \wedge^2\square,\ V(\frac{(m-1)(m-2)}{2}))$ がP.V.であることと同値である．これの群の次元を $\mathfrak{z}'=\dim G'+1$，表現空間の次元を $\mathfrak{v}'=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ とおくとき，$(G,\ \rho,\ V)$ がP.V.ならば $\dim G\geqslant\dim V$ が成り立つことより，$\mathfrak{z}'\geqslant\mathfrak{v}'$ となるような Simple P.V. $(GL(1)^{k}\times G,\ \rho,\ V(m))$ を求めると次の3つに限ることがわかる．

① $(GL(1)\times SL(m),\ \square,\ V(m))$ $(m\geqslant 1)$

② $(GL(1)\times Sp(m),\ \square,\ V(2m))$ $(m\geqslant 1)$

③ $(GL(1)\times SO(m),\ \square,\ V(m))$ $(m\geqslant 4)$.

結局次の3つがP.V.であるかどうかを調べればよい．

① $(SL(2n+1)\times SL(m)\times GL(1)^2,\ \square\otimes\square\oplus\boxminus\otimes 1,$
$V(2n+1)\otimes V(m)\oplus V(n(2n+1))\otimes V(1))$ $(1\leq m\leq 2n+1)$

② $(Sp(m)\times SL(2n+1)\times GL(1)^2,\ \square\otimes\square\oplus 1\otimes\boxminus,$
$V(2m)\otimes V(2n+1)\oplus V(1)\otimes V(n(2n+1)))$ $(1\leq 2m\leqslant 2n+1)$

③ $(SL(2n+1)\times SO(m)\times GL(1)^2,\ \square\otimes\square\oplus\boxminus\otimes 1,$
$V(2n+1)\otimes V(m)\oplus V(n(2n+1))\otimes V(1))$ $(4\leq m\leqslant 2n+1)$

以下では $\mathfrak{z}$ は群の次元をあらわし，$\mathfrak{v}$ は表現空間の次元をあ

らわすものとする．

① $\left(SL(2n+1) \times SL(m) \times GL(1)^2,\ \square \otimes \square \oplus \boxminus \otimes 1,\right.$

$\left. V(2n+1) \otimes V(m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1) \right) \quad (1 \leq m \leq 2n+1)$

これの P. V. 性は $\boxminus \otimes 1$ における generic isotropy subgroup を考えることにより次の P. V. 性を調べることに帰着される．

$$\left(\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} Sp(n) \\ \square \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \times GL(m),\ \square \otimes \square,\ V(2n+1) \otimes V(m) \right)$$

(i) $m = 2l$ のとき．

$$X_0 = {}^t\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\hphantom{I_lI_lI_l}}^{n} & \overbrace{\hphantom{I_lI_lI_l}}^{n} & \overbrace{\hphantom{1}}^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_l & & \\ \hline & I_l & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, l \\ \}\, l-1 \\ \}\, 1 \end{array} \in V(2n+1) \otimes V(2l) \text{ における}$$

isotropy subalgebra を計算してみると，

$$\begin{array}{ccccccc} l-1 & 1 & n-l & l-1 & 1 & n-l & 1 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_1 & & & B_1 & B_{12} & & D_1 \\ \hline A_{21} & A_2 & -{}^tD_6 & {}^tB_{12} & B_2 & -{}^tD_3 & D_2 \\ \hline & & A_3 & & -D_3 & B_3 & D_3 \\ \hline C_1 & & & -{}^tA_1 & -{}^tA_{21} & & D_4 \\ \hline & & & & -{}^tA_2 & & D_5 \\ \hline & & C_3 & & D_6 & -{}^tA_3 & D_6 \\ \hline & & & & & & D_5 - A_2 \end{array}\right] \oplus \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l-1 & 1 & l-1 & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} -{}^tA_1 & -{}^tA_{21} & -{}^tC_1 & \\ \hline & -{}^tA_2 & & \\ \hline -{}^tB_1 & -B_{12} & A_1 & \\ \hline -{}^tB_{12} - {}^tD_1 & -{}^tB_2 - {}^tD_2 & A_{21} - {}^tD_4 & A_2 - {}^tD_5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\cong \left(\mathfrak{sp}(l-1) \oplus \mathfrak{sp}(n-l) \right) \cdot \mathfrak{n}(2(n+l)).$$

$\mathfrak{g} - \mathfrak{v} = \dim((\mathfrak{sp}(l-1) \oplus \mathfrak{sp}(n-l)) \cdot \mathfrak{n}(2(n+l)))$ が成り立つから，(i) の場合上の triplet は P. V. である．

(ii) $m = 2l+1$ のとき．

$$X_0 = {}^t\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad}^{n} & \overbrace{\ }^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_l & & \\ \hline & I_{l+1} & \\ & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, l \\ \}\, l \\ \}\, 1 \end{array} \end{array} \in V(2n+1) \otimes V(2l+1) \text{ におけ}$$

る isotropy subalgebra を計算してみると,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \overbrace{}^{l} & \overbrace{}^{1} & \overbrace{}^{n-l-1} & \overbrace{}^{l} & \overbrace{}^{1} & \overbrace{}^{n-l-1} & \overbrace{}^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_1 & & & B_1 & & & D_1 \\ \hline & A_2 & A_{23} & & B_2 & B_{12} & -B_2 \\ \hline & A_{32} & A_3 & & {}^tB_{12} & B_3 & -{}^tB_{12} \\ \hline C_1 & & & -{}^tA_1 & & & D_4 \\ \hline & C_2 & C_{23} & & -{}^tA_2 & -{}^tA_{32} & D_5 \\ \hline & {}^tC_{23} & C_3 & & -{}^tA_{23} & -{}^tA_3 & {}^tA_{23} \\ \hline & & & & & & D_5 - A_2 \end{array}\right] \end{array} \oplus \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{}^{l} & \overbrace{}^{l} & \overbrace{}^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} -{}^tA_1 & -{}^tC_1 & \\ \hline -{}^tB_1 & A_1 & \\ \hline -{}^tD_1 & -{}^tD_4 & {}^tA_2 - {}^tD_5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\cong \ (\, sp(l) \oplus sp(n-l)\,) \cdot \mathfrak{u}(2l+1).$$

$f - v = \dim(\,(sp(l) \oplus sp(n-l)) \cdot \mathfrak{u}(2l+1))$ が成り立つから,

この場合も P. V. である.

② $(\ Sp(m) \times SL(2n+1) \times GL(1)^2,\ \square \otimes \square \oplus 1 \otimes$ 日,

$V(2m) \otimes V(2n+1) \oplus V(1) \otimes V(n(2n+1))\ )\quad (\,1 \leq 2m \leq 2n+1)$

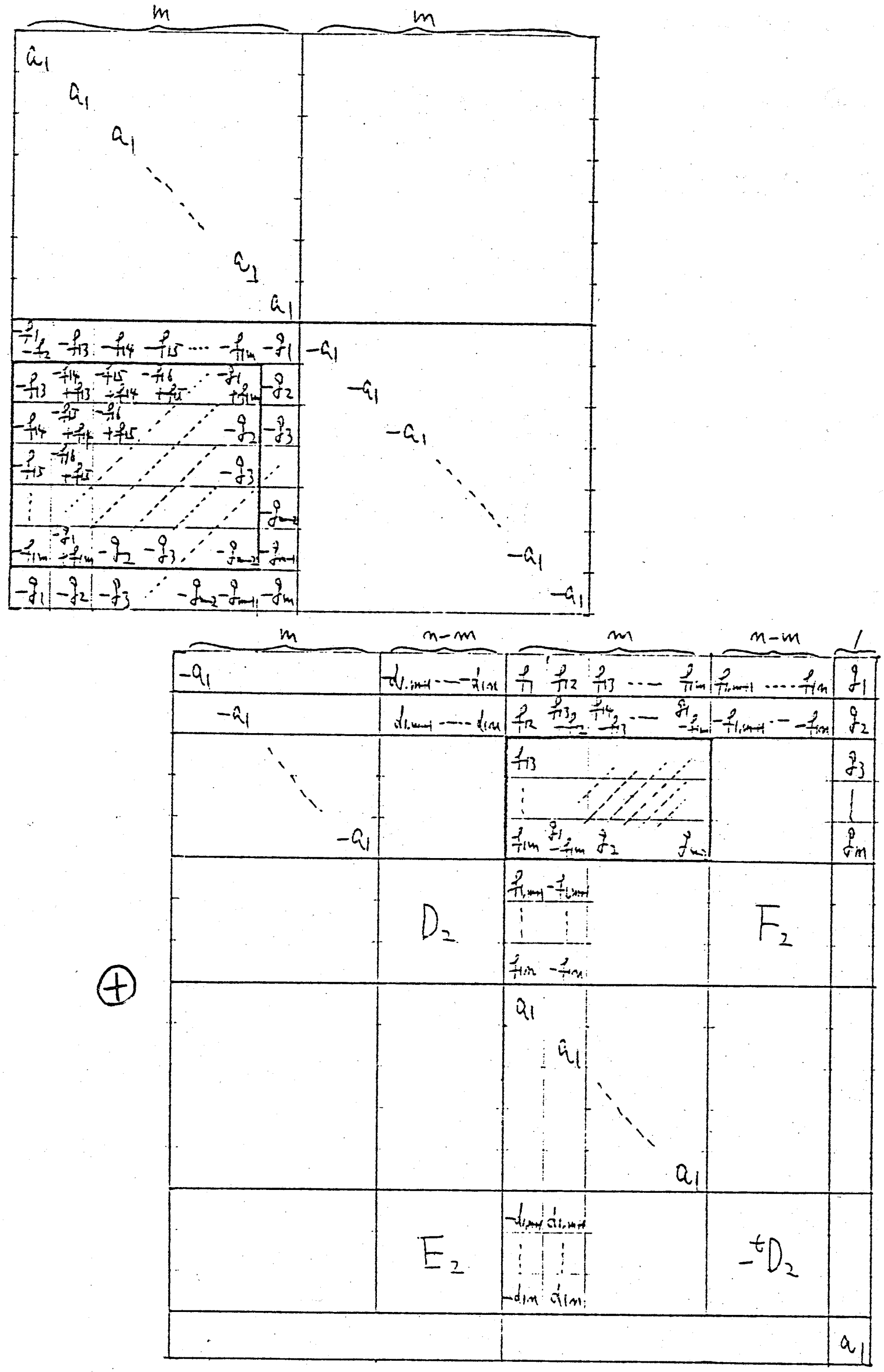
これの P. V. 性は $1 \otimes$ 日 における generic isotropy subgroup を考えることにより次の P. V. 性を調べることになる.

$$\left(\ Sp(m) \times \left[\begin{array}{c|c} Sp(n) & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \times GL(1),\ \square \otimes \square,\ V(2m) \otimes V(2n+1)\ \right)$$

まずスカラー倍 GL(1) を除いて考える.

$$X_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad}^{n} & \overbrace{\ }^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_m & & \\ \hline & I_{m-1} & \\ & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, m-1 \\ \}\, 1 \end{array} \end{array} \in V(2m) \otimes V(2n+1) \text{ における}$$

isotropy subalgebra を求めてみると，



$\cong \ (\mathfrak{gl}(1)\oplus \mathfrak{sp}(n-m))\cdot \mathfrak{u}(2m).$

$g - v = \dim((\mathfrak{gl}(1)\oplus \mathfrak{sp}(n-m))\cdot \mathfrak{u}(2m))$ が成り立つからこれはスカラー倍の作用がなくてもP.V.である．したがって②も

P. V. である.

③ ($SL(2m+1) \times SO(m) \times GL(1)^2$, $\square \otimes \square \oplus \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes 1$,

$V(2m+1) \otimes V(m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1)$) ($4 \leq m \leq 2m+1$)

これは命題より次の P. V. 性を調べればよい.

($SL(m-1) \times (SO(m) \times Sp(m)) \times GL(1)^2$, $\square \otimes (\square + \square)$

$V(m-1) \otimes (V(m) \oplus V(2m))$) .

これの P. V. 性は ($SL(m-1) \times SO(m) \times GL(1)$, $\square \otimes \square$, $V(m-1) \otimes V(m)$) における generic isotropy subgroup を考えることにより次と同値である.

($SO(m-1) \times Sp(m) \times GL(1)$, $\square \otimes \square$, $V(m-1) \otimes V(2m)$) .

これは既約 P. V. の分類 (Sato-Kimura [1]) より, $m = 4$ のとき P. V. で, $m \geq 5$ のときは P. V. ではない.

$m = 4$ のときに実際に generic isotropy subalgebra を求めてみる. ($SL(2m+1) \times SO(4) \times GL(1)^2$, $\square \otimes \square \oplus \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes 1$, $V(2m+1) \otimes V(4) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1)$) の $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix} \otimes 1$ における generic isotropy subgroup を考えることにより, 次の P. V. の generic isotropy subalgebra を求めればよい.

$$\left(\begin{bmatrix} Sp(m) & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ 0 & * \end{bmatrix} \times SO(4) \times GL(1) , \square \otimes \square , V(2m+1) \otimes V(4) \right)$$

$$X_0 = {}^t \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad\qquad}^{m} & \overbrace{\qquad\qquad}^{m} & \overbrace{\ }^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} 1 \qquad\quad & & \\ & 1 \qquad\quad & 1 \\ \qquad\quad 1 & & \\ & \qquad\quad 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \Big\} 4 \in V(2m+1) \otimes V(4) \text{ における}$$

isotropy subalgebraを求めてみると,

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & n-2 & 1 & 1 & n-2 & 1 & 1 \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & {}^tD_5 & & \begin{matrix}-d_1\\-z\end{matrix} & -{}^tD_2 & \begin{matrix}-d_1\\-z\end{matrix} & d_1 \\ \hline
 & A_2 & & -D_2 & B_2 & -D_2 & D_2 \\ \hline
 & {}^tD_5 & & \begin{matrix}-d_1\\-z\end{matrix} & -{}^tD_2 & \begin{matrix}-d_1\\-z\end{matrix} & d_1 \\ \hline
z & & -z & & & & \\ \hline
 & C_2 & & -D_5 & -{}^tA_2 & -D_5 & D_5 \\ \hline
-z & & z & & & & \\ \hline
 & & & & & &
\end{array}\right)
\oplus
\left(\begin{array}{c|c|c|c}
 & -z & & z \\ \hline
z & & z & \\ \hline
 & z & & -z \\ \hline
z & & z &
\end{array}\right)
\oplus (\quad) .
$$

$\cong \ sp(n-2) \cdot u(2(n-1))$.

$g - v = \dim(sp(n-2) \cdot u(2(n-1)))$が成り立つから X_0 はgenericな点となっている. したがって $sp(n-2) \cdot u(2(n-1))$ が求めるgeneric isotropy subalgebraである.

以上の結果から☆がP. V.であるためには, (G, ρ, V) が次の①, ②, ③のうちのどれかであることが必要十分である.

① ($SL(n)$, □ , $V(n)$)

② ($Sp(n)$, □ , $V(2n)$)

③ ($SO(4)$, □ , $V(4)$) .

最後に, 木村達雄先生には大変多くの事を教えていただきました. ここに心から感謝の意を表します.

参考文献

[1] M. Sato and T. Kimura, A Classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants, Nagoya Math. J. Vol. 65 (1977), 1–155.

[2] T. Kimura, A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups with Scalor Multiples.