数理解析研究所講究録
第 498 巻 1983 年 140-152

M系列の部分的性質を考慮した一様乱数の発生

熊本大学工学部　柏木 濶
Hiroshi Kashiwagi

M系列は一周期にわたる性質をみると，大変バランスがとれていて真に不規則な系列に似ている。しかし乱数発生などに高次のM系列（例えば100次）を用いると，周期は殆んど無限大であり，実際我々が使用するのは周期のほんの一部でしかない。従って，もし不適当な初期値を用いると当分の間，極めて不規則性の悪い系列しか得られないということが起り得る。実際 all 1 や特性M系列の初期値（C.M.と略記）を初期値として用いると不規則性が極めて悪い。そこでM系列の部分的性質を調べておき，周期のどの部分（位相）を用いるのがよいかを調べておく必要がある。筆者は，部分的性質として，(1) M系列の部分的自己相関関数，(2)連の自己相関関数（長さが3の連があれば，それを数値の3と表わし，その自己相関をとったもの），(3)連の長さの分布，(4) Tausworthe系列の分布をとり，いくつかの位相における部分的性質を調べてみた。その結果，周期をNとして，$(N+1)/2^i$ の点を円分位相点と定義すると，円分位相点における部分的性質は i の順序に類似していることが分った[1]。従って，使用すべき位相

としては，all 1 や C.M. を避けるだけでなく，その円分位相点のいくつかも避けるべきであることが分る。また部分的不規則性を調べるのに，ある位相点より m タップルを M 個とり出したとき，1タップル当りのエントロピー H_m を(1)式で，また不規則度 R を(2)式で定義する。

$$H_m = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{2^m} p_i \log_2 p_i \qquad \cdots (1)$$

ただし，p_i はある m タップルが生ずる確率であり，実際は相対度数 f_i/M（f_i はある m タップルが M 個中に生ずる回数）で近似する。

$$R = \sum_{i=1}^{r} iH_i \Big/ \sum_{i=1}^{r} i \qquad \cdots (2)$$

［ただし実際上 n 次 M 系列について
$n \geqq 16$ のとき $r=16$
$n<16$ のとき $r=n$］

特性多項式 $f(x)=x^{129}+x^5+1$ および $f(x)=x^{129}+x^{40}+x^2+x+1$ に対して，周期を512等分して各点における不規則度 R を描いたのが Fig. 1，Fig. 2 である。いずれも C.M. の円分位相点で R が小さいこと，および $f(x)$ が3項式のときは周期の全体にわたって R が小さいことが分る。サンプル個数 M は，大きくとると部分的性質が平均化されてしまう（例えば $M=2^n-1$ ととれば，一周期全体にわたる性質から常に $H_m=1$ となる）ので，部分的性質をみるには M はある程度小さくとる必要が

$F(X)=X^{129}+X^{5}+1$ SAMPLE SIZE=256

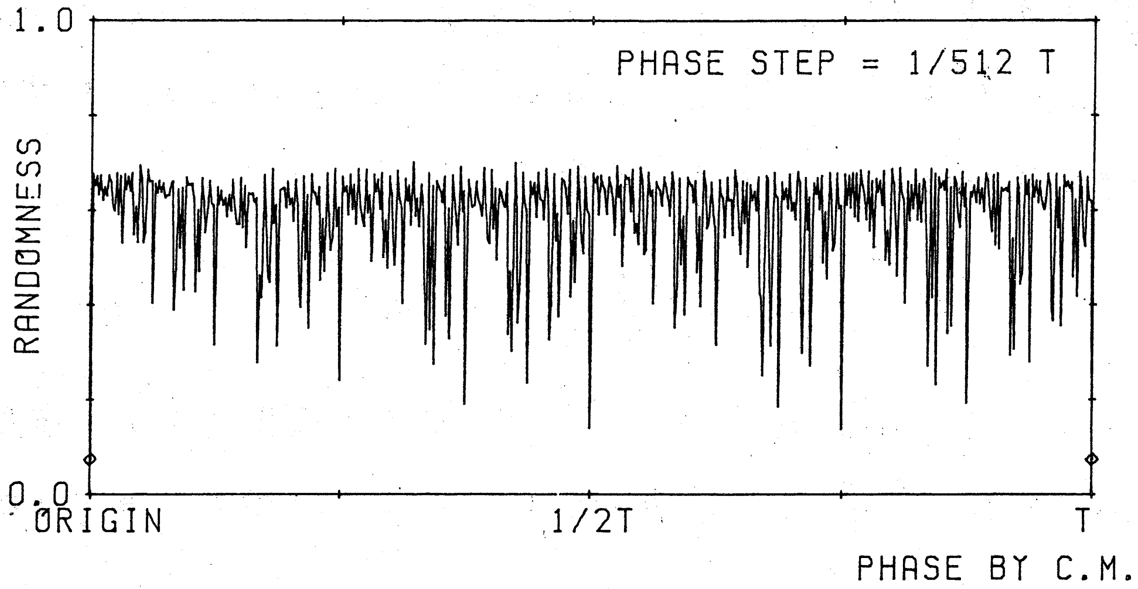


FIG. -1 RANDOMNESS OF M-SEQ.

$F(X)=X^{129}+X^{40}+X^{2}+X+1$ SAMPLE SIZE=256

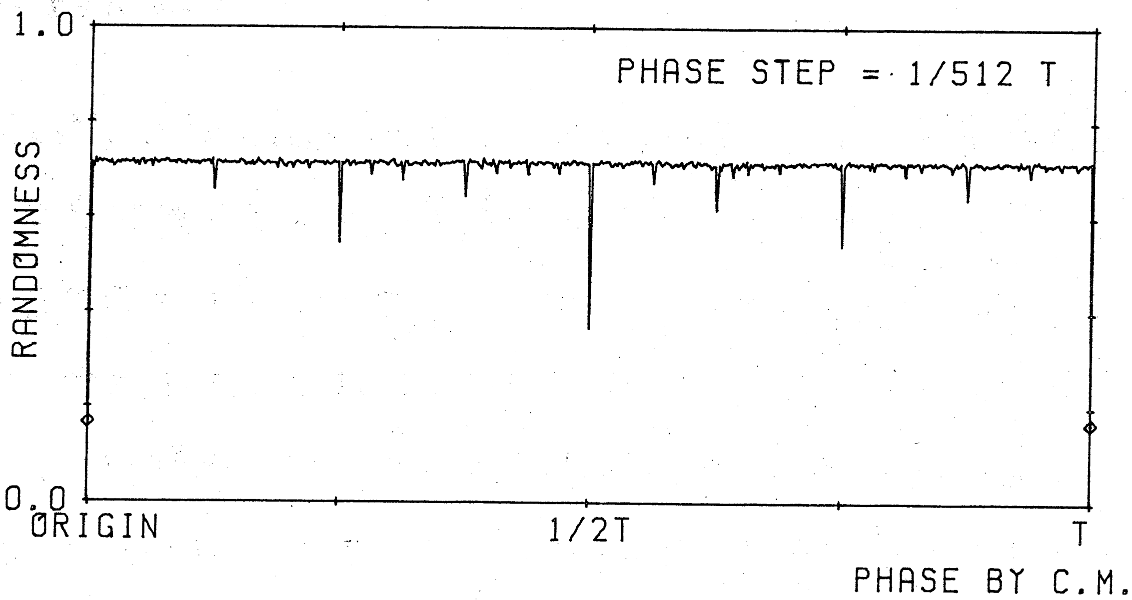


FIG. -2 RANDOMNESS OF M-SEQ.

ある。ここでは $M=256$ ととっている。Mが 2^m より小さいときは，H_mの上限は1より小さくなり，従ってRの上限も1より小さくなる。即ち，$M=2^k$ $(k<m)$ ととったとき，

$$H_m \leqq -\frac{1}{m}\cdot 2^k \times \frac{1}{2^k}\log_2\frac{1}{2^k} = \frac{k}{m} \quad \cdots (3)$$

従って

$$R \leqq \frac{1+2+\cdots+k-1+(r-k+1)k}{1+2+\cdots+r} \quad \cdots (4)$$

となる。$n \geqq 16$ のときは $r=16$ であるから

$$R \leqq \frac{1}{272}\cdot(33-k)\cdot k \quad \cdots (5)$$

となる。$M=256=2^8$ のときは，$R \leqq 0.735$ となり，Fig.1, 2 とよく一致している。

このように部分的性質を調べた結果，乱数発生という目的のためには，次のことが云える。

(1) 特性多項式は3項式を避けて5項式を用いる。例えば，89次のときに用いるべき5項式としては次のようなものがある。べキのみを示すと，

(89, 72, 55, 38, 0)，(89, 86, 41, 38, 0)，(89, 32, 12, 1, 0)
(89, 28, 8, 1, 0)

これらはいずれも筆者の研究室で見出されたものである。[4)]

(2) all 1, C.M. およびその円分位相点（主に $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 点）を避けて，例えば C.M. から 1/3, 1/5, 1/7 点などを用いる。このためには，$x^{\frac{1}{3}} \bmod f(x)$ などの剰余多項式を予め求めておく必要がある。剰余多項式の求め方については文献(3)の方法を用いると便利である。

さて実際に乱数発生のプログラムを作ってみよう。特性多項式は，不規則度を調べた結果，前述の四つの中では，(89, 32, 12, 1, 0) が良かったので，これを用いることにする。C.M. より 1/3, 1/5, 1/7 点について，それぞれ 100万個のデータについて，1万個ずつ 100 組に分けて，一様性，組合せ，連（above / below），連（up/down）について検定を行った結果を Fig. 3 に示す。連の性質がやゝ悪いが，一様性と組合せについてはほゞ満足できることが分る。そこで，これに 1/11 点を加えて，C.M. より 1/3, 1/5, 1/7, 1/11 点の合計 4 点および各々の位相点から i/8 位相点（i=0, 1, …7），計 32 の位相点について，初期パラメータ IX によって選択し，更にその点より IX 回空回しをすることによって初期化を行なうことにする。即ち，IX の下位 3ビットによって i/8 点のいずれをとるかを決め，その上の 2ビットによって 1/3 ～ 1/11 点のいずれにするかを定める。実際の M 系列の発生は TLP 法を用いるのが便利である。TLP 法では，M 系列を a_i (=0 or 1) とす

	有意水準 5% 不合格	有意水準 1% 不合格
一様性	68,74,75,92	75,92
組み合わせ	13,21,22,26,27 29,42,47,55,71 76,88,99	26,27,29
連 ABOVE/BELOW	6,10,14,32,37 42,43,58,99	6,10,14,32,42 43,58,99
連 UP/DOWN	4,14,25,40,64 80,84,96	4,25,40,64,80 84,96

左表の
数字は
組の番号

Fig. 3 (a) 特性M系列の初期値からT/3位相点より100万個の検定結果

	有意水準 5% 不合格	有意水準 1% 不合格
一様性	16,17,45,60,64	60,64
組み合わせ	6,67,91	
連 ABOVE/BELOW	13,14,21,26,30 43,46,52,67,69 70,81,90,95,96	14,21,26,30,43 52,67,81,90,95 96
連 UP/DOWN	4,11,20,24,32 67,75	4,11,20,32,67 75

左表の
数字は
組の番号

Fig. 3 (b) 特性M系列の初期値からT/5位相点より100万個の検定結果

	有意水準5% 不合格	有意水準1% 不合格
一 様 性	19,22,42,59,66 93,98	59
組み合わせ	2, 3, 7,18,21 38,50,51,56,61 63,90	2, 3,61,90
連 ABOVE/BELOW	8, 9,16,25,32 62,63,76,77,91 100	8, 9,16,62,63 76,77,91
連 UP/DOWN	19,21,30,47,54 66,77,85,88	19,21,30,66,77 85,88

左表の数字は組の番号

Fig. 3 (c) 特性M系列の初期値からT/7 位相点より100 万個の検定結果

るとき,

$$\begin{array}{cccccc}
w_0 & w_1 & w_2 & & w_{n-1} & w_n \\
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n \ \cdots \\
a_r & a_{r+1} & a_{r+2} & \cdots\cdots & a_{r+n-1} & a_{r+n} \ \cdots \\
a_{2r} & a_{2r+1} & a_{2r+2} & \cdots\cdots & a_{2r+n-1} & a_{2r+n} \ \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{(L-1)r} & a_{(L-1)r+1} & a_{(L-1)r+2} & \cdots\cdots & a_{(L-1)r+n-1} & a_{(L-1)r+n} \ \cdots
\end{array}$$

と並べ,

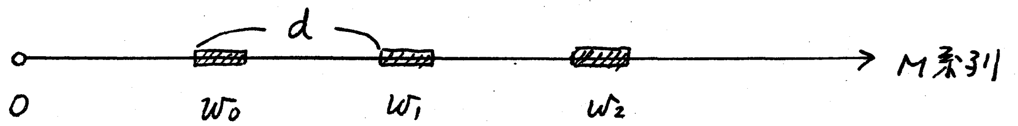
$$w_i = 0.\,a_i\, a_{i+r}\, a_{i+2r} \cdots a_{i+(L-1)r} \qquad (\text{base } 2)$$

によって一様乱数 w_i を発生すると, w_i は特性多項式によ

る漸化式を満足するので，Lを計算機の語長（16 or 32）にしておくと，語ごとの排他的論理和によって次々にw_iが発生されるから便利である[5)]。問題は$w_0 \sim w_{n-1}$の初期値の設定であるが，Lewis & Payneの提案によるall 1を基準とする初期化は，部分的性質が極めて悪いことは明らかである。またrの行間遅れを大きくとることも一般に容易でない（もっとも文献 による方法を用いれば計算は簡単である）。そこで，希望の位相差より出発して高速にw_iを発生するには，w_iの性質を利用して次のようにすればよい。

$f(x)$をa_iの特性多項式として，αをその原始根とすると，$a_0, a_r, a_{2r}, \cdots$の特性多項式$g(x)$は，α^rに対する最小多項式であり，$g(x)$により発生されるM系列上でw_0, w_1の位相差dは，次の式を満す。[5)]

$$r \cdot d = 1 \pmod N$$



そこで，16ビットの計算機であれば$r = 2^{n-4}$ととれば，$d = 2^4$となり，$w_0, w_1, \cdots$はw_0より出発したM系列を16ビット毎に続けて取り出したものになる。しかも，rは1を含む円分剰余類に属しているから，$g(x)$は$f(x)$と同じもの

であり，$f(x)$に5項式を用いれば$g(x)$も5項式であり，rが一般の場合のように，どのような$g(x)$になるか一抹の不安を抱く必要が全くない。

プログラムをFig.4に示す。SUBROUTINE INITP(IX)は，w_0～w_{n-1}までの初期化を行なうものである。IRP(I,J)は，$x^{(I-1)/8} \bmod f(x)$という剰余多項式をビットパターンにしたものである。IVS(I,J)は，I=1,2,3,4について1/3, 1/5, 1/7, 1/11（いずれもC.M.より）点の初期nタップルをビットパターンに直したものである。ただし計算機は16ビットマシンを想定している。SUBROUTINE UNIFP(X)は，INITP(IX)で初期化を行なった後に呼ぶことによって，一様乱数（0～1）Xが発生される。

初期パラメータIXをランダムに128通り選んで，このプログラムで発生した一様乱数について，一様性，組合せ，連の検定を行なった結果をFig.5に示す。組合せ，連の検定結果が必ずしも良くないが一様性については満足すべき結果が得られている。これら以外の検定項目（gapテストなど）についても実施したいと考えている。

なお，研究集会で3項式もすてたものではないのではないかという議論があったが，やはり3項式はあまり良くないという例を次に示したい。一様乱数は一様乱数としての性質を

```
      SUBROUTINE INITP(IX)
      COMMON /RAND/IW(89),ICNT
      DIMENSION IRP(8,6),IVS(4,6),IV(6),LPW(16),NBP(16)
      DATA IRP/256,402,477,158,258,195,381,429,
     *0,20929,-26015,-21257,1886,11950,-11830,29212,
     *0,10102,32193,-17959,16032,2453,-26394,11586,
     *0,-305,25927,22799,-24544,-26479,8815,29014,
     *0,-13912,1429,-26064,8354,12430,-25569,-29078,
     *0,24585,7190,-1536,-22006,-28296,-7279,-26625/
      DATA IVS/91,100,219,49,22396,-11311,7078,23508,
     *9731,-30556,-21074,-14154,6918,-4805,28990,-32514,
     *-2089,17461,27249,10938,-3337,20604,-14682,-13093/
      DATA LPW/-32768,16384,8192,4096,2048,1024,
     *         512,256,128,64,32,16,8,4,2,1/
      DATA NBP/0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0/
      IP=MOD(IX,8)+1
      IQ=MOD(ISL(IX,-3),4)+1
      DO 100 L=1,6
100   IV(L)=IVS(IQ,L)
      DO 110 K=1,89
      IW(K)=0
      DO 120 M=1,16
      LPR=0
      DO 130 L=1,6
130   LPR=IEOR(LPR,IAND(IV(L),IRP(IP,L)))
      LPR=IEOR(LPR,ISL(LPR,-8))
      LPR=IEOR(LPR,ISL(LPR,-4))
      IW(K)=IW(K)+NBP(IAND(LPR,15)+1)*LPW(M)
      KPR=IEOR(IAND(IV(1),384),IAND(IV(2),4096))
      KPR=IEOR(KPR,IAND(IV(3),256))
      KPR=IEOR(KPR,ISL(KPR,-8))
      KPR=IEOR(KPR,ISL(KPR,-4))
      DO 140 L=1,5
      IV(L)=ISL(IV(L),1)
      IF(IV(L+1).LT.0) IV(L)=IV(L)+1
140   CONTINUE
      IV(6)=ISL(IV(6),1)+NBP(IAND(KPR,15)+1)
120   CONTINUE
110   CONTINUE
      ICNT=0
      DO 150 I=1,IX
      ICNT=MOD(ICNT,89)+1
      K1=MOD(ICNT,89)+1
      K2=MOD(ICNT+11,89)+1
      K3=MOD(ICNT+31,89)+1
150   IW(ICNT)=IEOR(IEOR(IW(ICNT),IW(K1)),IEOR(IW(K2),IW(K3)))
      ICNT=0
      RETURN
      END
```

Fig. 4 (a)

```
SUBROUTINE UNIFP(X)
COMMON /RAND/IW(89),ICNT
ICNT=MOD(ICNT,89)+1
K1=MOD(ICNT,89)+1
K2=MOD(ICNT+11,89)+1
K3=MOD(ICNT+31,89)+1
IW(ICNT)=IEOR(IEOR(IW(ICNT),IW(K1)),IEOR(IW(K2),IW(K3)))
X=FLOAT(IW(ICNT))/65536.0+0.5
RETURN
END
```

Fig. 4 (b)

	有意水準5%不合格	有意水準1%不合格
一様性	5/128	
組み合わせ	15/128	5/128
連 above/below	22/128	16/128
連 up/down	11/128	10/128

Fig. 5. 検定結果.（5/128は128例中5例が不合格であることを示す）.

持たなければならないのは云うまでもないが，何個か加算したときに正規乱数にならなければならず，実際にそういう期待をもって一様乱数発生のサブルーチンを使うユーザが多いことに注意しなければならない。この観点からすると，3項式を用いるのは都合が悪い。なぜなら，文献(2)にあるように，加算する範囲内にある3項の線形従属のペアが多いほど，

skewness が悪くなり，特性多項式として3項式を用いるとまさに3項の線形従属のペアの連続によってM系列が発生されるから skewness が極めて悪くなるからである。例として，伏見ら)の提案による $f(x)=x^{521}+x^{32}+1$ を TLP 法で発生した一様乱数を加算した乱数の正規性について検定した結果のうち，skewness についての結果を Fig.6 に示す。加算個数が大きくなると不合格になる例が多いことが分る。ちなみに同じ検定を $f(x)=x^{521}+x^{358}+x^{195}+x^{32}+1$ について行なった結果を Fig.7 に示す。Fig.6 に比べて不合格になる例が少ないことが分る。

［参考文献］

(1) 柏木，原田：M系列の円分位相，計測自動制御学会論文集，(SICE) 才18巻，才10号，pp. 1004－1009，1982.

(2) 柏木，坂田：M系列を用いる擬似正規信号の発生，SICE 論文集，才12巻，才3号，pp. 293－299，1976.

(3) 柏木，森内：GF(2)上の多項式を法とする演算の高速化，SICE 論文集，才18巻，才3号，pp. 300－303，1982.

(4) 柏木，内村：GF(2)上の原始五項式を求める簡単な方法，SICE 論文集，才18巻，才7号，pp. 747－750，1982.

(5) 柏木：M系列による TLP 乱数の二，三の性質，SICE 論文集，才18巻，8号，pp. 828－832，1982.

(6) 泉, 柏木 : 2値乱数源用高次M系列の初期値, SICE論文集, 第18巻, 第9号, pp. 929−935, 1982.

(7) 伏見, 手塚 : 多次元分布が一様な擬似乱数列の生成法, 応用統計学, Vol. 10, NO. 3, pp. 151−163, 1982.

加算個数	有意水準5%不合格	有意水準1%不合格
64		
128	1/5	
256		
384	3/5	1/5
512	1/5	
768		
1024	2/5	
1536	2/5	1/5
2048	2/5	1/5
3072	1/5	
4096	3/5	3/5

Fig. 6 $f(x) = x^{521} + x^{32} + 1$ のときのひずみ検定.

加算個数	有意水準5%不合格	有意水準1%不合格
64		
128		
256		
384		
512	1/5	1/5
768	2/5	
1024	2/5	
1536		
2048		
3072		
4096		

Fig. 7 $f(x) = x^{521} + x^{358} + x^{195} + x^{32} + 1$ のときのひずみ検定

ただし 3/5 などは 5例中 3例が不合格であることを示す。