数理解析研究所講究録
第 499 巻 1983 年 1-5

函数方程式の適切性について

京都府立医大　桑垣　煥（Akira Kuwagaki）

1 研究分野

この研究集会の「函数方程式」の範囲は，一応微分方程式・積分方程式等を除いた，日本数学会函数方程式分科会のすべての分野を意味し，前に福原先生のおすすめで書かせていただいた本[1]の内容および J. Aczél 氏の本[2]の内容を含みます。これらを大きく分けるとつぎのようになるかと思います。

A. Cauchy型函数方程式

　　加法定理型，d'Alembert 型　等

B. 平均型函数方程式

C. 差分方程式

D. Iteration 型。合成型函数方程式

　　函数論関係を含む

E. 函数微分・積分方程式

　　delay 型，確率統計，情報論等

F. Fractional integration (differentiation)

一般の階数の微分・積分

G. その他

2 適切性

適当な語がないので仮りにこのようによぶ．一言でいうと函数方程式が定数でない解をもつとき「適切」とを提案しようと考えましたが，この研究集会の諸講演を参考にして考え直すと，より適当な用語がありそうです．

つぎに適切性の意味を例を用いて述べますが，適切でない函数方程式を不適切とよぶのは不適当のようなのでやめます。

例 A. Cauchy型の場合

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y) \qquad (\text{例えば } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

$\circ$ と $*$ は binary operation であるから 2 変数函数と同じでつぎのように書いてもよい．

$$f\{\varphi(x,y)\} = \psi\{f(x), f(y)\} \qquad (\varphi, \psi: \text{既知函数})$$

f は $\circ$ と $*$ について同型写像であるから，$\circ$ と $*$ についての演算法則（公式）がもしあれば一致することが必要である．

例えば，a) 対称性　　a′) 加法の 0，乗法の 1 の存在

b) 交代性　　b′) 逆の存在（上の意味で）

c) 結合性　　c′) べき等元・べき零元の存在

d) べき等性・べき零性　　d′) ....

.....

これらのいくつかを同時にみたすものの例としは，種々の代数系がある．すなわち

半群，群，アーベル群，環，束，････

上の $\circ$ と $*$ について a)，b)，････の 1 つでも一致しないと函数解がなくなる（適切でなくなる）場合が多い．

例えば，Cauchyの函数方程式でどこかを一寸変えると適切でなくなる．

$f(x+y) = 2f(x)+f(y)$，　$f(2x+y) = f(x)+f(y)$

$f(x+y) = f(x)^2+f(y)$，　$f(x-y) = f(x)+f(y)$ (以上適切でない)

$f(x+y) = f(x)+f(y)+1$，　$f(x+y) = f(x)\,f(y)$

※$f(2x+y) = 2f(x)+f(y)$，$f(2x+y) = f(x)^2f(y)$　（以上適切）

※についてはつぎのように適切であることが示される．

$f(2x) = 2f(x)+f(0) = 2f(x)$ （$x=y=0$ とおくと $f(0)=0$）によって

$f(2x+y) = f(2x)+f(y)$　ここで $x' = 2x$ とおくと Cauchyの方程式．

実は連続な binary operation が上の a) と c) をみたすと，変数変換で $x+y$ になることが証明されているから，函数方程式は Cauchy型に帰着する．

例 B．平均型の場合

例として重心型の方程式を考える．

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) = k\,f(\bar{x},\bar{y})\ ,\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

これは $x_1 = \cdots\cdot = x_n = \bar{x},\ y_1 = \cdots\cdot = y_n = \bar{y}$ とおくと「$k = n$ のとき適切で，$k \neq n$ のとき適切でない」ことがわかる。

例 D. Iteration 型の場合

$$f\{\varphi(x)\} = \psi\{f(x)\} \qquad (\varphi,\ \psi：既知函数)$$

については，この方程式をくり返し用いると

$$f[\varphi\{\varphi(x)\}] = \psi[f\{\varphi(x)\}] = \psi[\psi\{f(x)\}],\ \cdots\cdot$$

例えば，函数方程式：

$$f(-x) = k\,f(x) \qquad (k：定数)$$

は直ちに，$f(x) = f\{-(-x)\} = k\,f(-x) = k^2 f(x)$

適切なら $k^2 = 1$ したがって $k = \pm 1$ (これらが固有値のようなもの) となり，f は偶函数か奇函数となる。

3 発展の方向

α 自然現象・社会現象等を表わす函数方程式および数学の他の分野で現われる函数方程式

1)射影幾何学の最初の部分　　2)誤差論

3)情報理論　　4)相対論の速度合成

etc.

β 基本的なものから順に進む

曲線を例にとると

直線 ― 2次曲線 ― 3次曲線 ― 代数曲線 ― ‥

|

平面 ― 2次曲面 ― 3次曲面 ― ‥

|

超平面 ― 2次超曲面 ― ‥

‥‥

このように考えると，三重大学の学会で述べたように

1）変数と函数

数（スカラー）— vector — matrix —・・・

2）演算

＋，×，整函数，有理函数，代数函数，・・・；

－，÷，交代積，・・・・

3）未知函数の個数（Pexider 型）

$f(x+y) = g(x) + h(y)$ （f,g,h ：未知函数） 等

4）変数の個数 （解き易くなる）

$f(x+y+z) = f(x) + f(y) + f(z)$ 等

γ 未知函数の正則性を弱くする

$C^n \subset C \subset$ 連続 $\subset$ 可測 $\subset$ ・・・・

δ 階数を高くする

d'Alembert の函数方程式等

文　献

[1] 桑垣　煥：函数方程式概論，朝倉書店，東京，昭和42年

[2] J. Aczél : Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1961.

[3] A. Kuwagaki : Sur l'équation fonctionnelle pour des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: $f([x,y]) = [f(x),f(y)]$, Studia Humana et Naturalia No.16,1982, pp.1-6.