数理解析研究所講究録
第 499 巻 1983 年 6-17

解析的差分方程式について

富山大理　田中専一郎 (Sen-ichiro Tanaka)

§1. 序論　差分方程式

$$(1,1)\qquad \Delta y(x) = f(x,\ y(x)) \qquad (\Delta y(x) \equiv y(x+1) - y(x))$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad f(x,\ y(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x,\ y_1(x), \cdots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x,\ y_1(x), \cdots, y_n(x)) \end{pmatrix}$$

において　$f(x,\ y)$ は　$X_0 \times Y_0$

$$X_0:\ |x| > R_0, \quad Y_0:\ \|y\| < r_0 \qquad (\|y\| = \max_i |y_i|)$$

で正則で

$$(1,2)\qquad f_i(x,\ y) = \sum_{|k| \geqq 1} a^{(i)}_{k_0 k_1 \cdots k_n} x^{-k_0} y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

のように展開されるものとする。こゝに $|k|$ は

$$|k| = k_0 + k_1 + \cdots + k_n$$

を表す。m は $m \geqq 2$ の整数とする。さらに

(1.3) $|k| < m$ のとき $a^{(i)}_{0k_1\cdots k_n} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$,

$|k| = m$ のとき

(1.4) $$a^{(i)}_{0k_1\cdots k_n} \begin{cases} \neq 0 & (k_i = m) \\ = 0 & (k_i < m) \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

(1.5) $$a^{(i)}_{10\cdots 0} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

を仮定する。このとき (1.1) は

(1.6) $$y \approx g_1 x^{-\frac{1}{m}} + g_2 x^{-\frac{2}{m}} + \cdots + g_N x^{-\frac{N}{m}} + \cdots$$

の形の形式解をもつ。

$x^{\frac{1}{m}}$ のリーマン面の第 p 枚目を

$$\Delta_p \;:\; (2p-1)\pi < \arg x < (2p+1)\pi$$

とする。このとき正の実軸を含む Δ_p の部分領域

$$\Gamma_p \;:\; |x| > R,\ \gamma_{1p} < \arg x < \gamma_{2p}$$

において (1.1) は正則な漸近解

(1.7) $$y \simeq g_1 x^{-\frac{1}{m}} + g_2 x^{-\frac{2}{m}} + \cdots + g_N x^{-\frac{N}{m}} + \cdots$$

をもつことを証明する。こゝに，R，γ_{1p} および γ_{2p} は証明の中で決定される。

§2. 剰余項に関する差分方程式　差分方程式 (1.1) の中に

$$y_i \sim g_1^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_2^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \cdots + g_N^{(i)} x^{-\frac{N}{m}} + \cdots$$

$(i=1,2,\dots,n)$

を形式的に代入すれば

(2.1) $$a^{(i)}_{00\cdots m0\cdots 0}\,(g_1^{(i)})^m + a^{(i)}_{10\cdots 0} = 0 \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

(2.2) $$m\,a^{(i)}_{00\cdots 0m0\cdots 0}\,(g_1^{(i)})^{m-1} g_N^{(i)} + P_N^{(i)}(a_k, g_1,\dots, g_{N-1}) = 0$$

$(i=1,2,\dots,n,\ N=2,3,\dots)$

が成立つ。ここに $P_N^{(i)}$ は $a^{(i)}_{k_0k_1\dots k_n}$, $g_l^{(i)}$ $(i=1,2\dots n;\ l=1,2,\dots,N-1)$ の多項式である。

(2.3) $$c_{i1}\, e^{i\alpha_{i1}} = a^{(i)}_{10\cdots 0} \qquad (c_{i1}>0),$$

(2.4) $$c_{i2}\, e^{i\alpha_{i2}} = a^{(i)}_{00\cdots m\cdots 0} \qquad (c_{i2}>0),$$

(2.5) $$c_{i3} = \sqrt{c_{i1}/c_{i2}},$$

(2.6) $$\varphi_i = \alpha_{i1} - \alpha_{i2} + \pi$$

$(i=1,2\dots n)$

とおけば (2.1) から

(2.7) $$g_{1\nu}^{(i)} = c_{i3}\, e^{i\frac{2\nu\pi+\varphi_i}{m}} \qquad (\nu=0,1,2,\dots,m-1)$$

をうる。これと (2.2) から (1.1) は

(2.8) $$y_i \approx g_{1\nu}^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_2^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \cdots + g_N^{(i)} x^{-\frac{N}{m}} + \cdots$$

の形の形式解をもつ。

$$(2,9)\qquad \begin{cases} p_N^{(i)} = g_{1i}^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_2^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \cdots + g_{N-1}^{(i)} x^{-\frac{N-1}{m}}, \\ y = z + p_N \end{cases}$$

とおく。そのとき、zに関する差分方程式は

$$(2,10)\qquad \Delta z = f(x, z+p_N) - \Delta p_N$$

となる。ここに

$$(2,11)\qquad f_i(x, z+p_N) = f_i(x, p_N) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, p_N)}{\partial y_s} z_s + \psi_{iN}(x^{\frac{1}{m}}, z)$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

である。また

$$(2,12)\qquad c_{iN}(x^{\frac{1}{m}}) = f_i(x, p_N) - \Delta p_N^{(i)} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

とおけば(2,10)は

$$(2,13)\qquad \Delta z_i = c_{iN}(x^{\frac{1}{m}}) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, p_N)}{\partial y_s} z_s + \psi_{iN}(x^{\frac{1}{m}}, z)$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

$x = re^{i\Theta}$ とおく。したがって $x^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\Theta}{m}}$. $x^{\frac{1}{m}}$ のリーマン面の第p枚目を

$$\Delta_p : \quad (2p-1)\pi < \Theta < (2p+1)\pi \qquad (p=0,1,2,\ldots,m-1)$$

とおく。いま十分大きいR_1, 十分小さいr_1を選び

$$D_p \quad : \quad |x| > R_1, \quad x \in \Delta_p ,$$

$$E_p \quad : \quad |x| > R_1, \quad x \in \Delta_p , \quad \|z\| < r_1$$

とおけば，$x^{1+\frac{N-1}{m}} c_{iN}(x^{\frac{1}{m}})$ および $\dfrac{\partial f_i(x, P_N)}{\partial y_s}$ は D_p で正則で

$$(2.14) \qquad \frac{\partial f_i(x, P_N)}{\partial y_s} = \sum k_s a^{(i)}_{k_0 k_1 \cdots k_n} (P_N^{(1)})^{k_1} \cdots (P_N^{(s)})^{k_s - 1} \cdots (P_N^{(n)})^{k_n},$$

$$(2.15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_i(x, P_N)}{\partial y_i} = m\, a^{(i)}_{00 \cdots m \cdots 0} (g_{i0})^{m-1} x^{-\frac{m-1}{m}} + O(x^{-1}), \\[2ex] \dfrac{\partial f_i(x, P_N)}{\partial y_s} = O(x^{-1}) \qquad (s \neq i) \end{cases}$$

が成立つ。また $\psi_{iN}(x^{\frac{1}{m}}, z)$ は E_p で正則で

$$(2.16) \qquad \psi_{iN}(x^{\frac{1}{m}}, z) = O(\|z\|^2).$$

§3. 漸近解の存在．この節では，(2.13) が D_p に含まれるある領域 T_{pN} において

$$(3.1) \qquad \|z\| \leqq \frac{M_N}{|x|^{\frac{N}{m}}}$$

をみたす正則な解をもつことの証明を中心にのべる。ここに M_N は適当に選んだ正数とする。いま簡単のため，(2.13) で N を省略して

$$(3.2)\qquad \Delta z_i = c_i(x^{\frac{1}{m}}) + \sum_{s} \frac{\partial f_i(x,p)}{\partial y_s} z_s + \psi_i(x^{\frac{1}{m}}, z)$$

$$(i=1,2,\dots,n)$$

とかく。 $\Delta z_i = z_i(x+1) - z_i(x)$ であるから (3.2) は

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} z_i(x+1) &= \left(1 + \frac{\partial f_i(x,p)}{\partial y_i}\right) z_i \\ &\quad + c_i(x^{\frac{1}{m}}) + \sum_{s\neq i} \frac{\partial f_i(x,p)}{\partial y_s} z_s + \psi_i(x^{\frac{1}{m}}, z) \end{aligned}$$

$$(i=1,2,\dots,n)$$

となる。さらに

$$(3.4)\qquad z_i = u_i x^{-\frac{N}{m}} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

とおき，(3.3) に代入すれば u に関する差分方程式

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} (1+x^{-1})^{-\frac{N}{m}} u_i(x+1) &= \left(1 + \frac{\partial f_i(x,p)}{\partial y_i}\right) u_i(x) \\ &\quad + x^{\frac{N}{m}} c_i(x^{\frac{1}{m}}) + \sum_{s\neq i} \frac{\partial f_i(x,p)}{\partial y_s} u_s(x) + x^{\frac{N}{m}} \psi_i(x^{\frac{1}{m}}, u(x) x^{-\frac{N}{m}}) \end{aligned}$$

(3.5) が D_p のある領域 Γ_{pN} で $\|u\| \leqq M_N$ をみたす正則な解をもつことを示すため関数空間における不動点定理を用いる。そのため (3.5) を書き直し次の写像

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} \overline{u_i}(x) &= T_i(u(x)) \\ &= \Big\{ (1+x^{-1})^{-\frac{N}{m}} u_i(x+1) - \sum_{s\neq i} \frac{\partial f_i(x,p)}{\partial y_s} u_s - x^{\frac{N}{m}} c_i(x^{\frac{1}{m}}) \end{aligned}$$

$$- x^{\frac{N}{m}} \varphi_i(x^{\frac{1}{m}}, u x^{-\frac{N}{m}})\Big\}\left(1+\frac{\partial f_i(x,p)}{\partial y_i}\right)^{-1}$$

$$(i=1,2,\dots,n)$$

を考える。ここで M_N を適当に大きくとったとき，

$$x\in\Gamma_{pN} \text{ で } \|u(x)\|\leqq M_N \text{ のとき } \|\bar{u}(x)\|\leqq M_N$$

を示すことが本質的である。

ここでいくらかの準備をする。(2,15)より

$$(3.7)\quad (1+x^{-1})^{-\frac{N}{m}}\left(1+\frac{\partial f_i(x,p)}{\partial y_i}\right)^{-1} = 1 - m a^{(i)}_{00\cdots m\cdots 0}(y_{iv})^{m-1} x^{-\frac{m-1}{m}} + \cdots$$

また，(2,4)，(2,7)から

$$m a^{(i)}_{00\cdots m\cdots 0}(y^{(i)}_{iv})^{m-1} = m c_{i2} c_{i3}^{m-1} e^{i(\frac{m-1}{m})(2v\pi+\varphi_i+\frac{m}{m-1}\alpha_{i2})}$$

であるから

$$c_i = m c_{i2} c_{i3}^{m-1}, \quad \lambda_i = \varphi_i + \frac{m}{m-1}\alpha_{i2}$$

とおけば，$x^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\Theta}{m}}$ から (3.7)の右辺は

$$1 - c_i r^{-\frac{m-1}{m}} e^{-i(\frac{m-1}{m})(\Theta-(2v\pi+\lambda_i))} + \cdots$$

となる。この絶対値をとれば

$$(3.8)\quad \left|(1+x^{-1})^{\frac{N}{m}}\left(1+\frac{\partial f_i(x,p)}{\partial y_i}\right)\right|^{-1}$$

$$= 1 - \left[c_i \cos\left\{\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\Theta - (2\nu\pi + \lambda_i)\right)\right\} - F_i(r^{-\frac{1}{m}})\right] r^{-\frac{m-1}{m}}$$

となる。こゝに $F_i(r^{-\frac{1}{m}}) = O(r^{-\frac{1}{m}})$.

次の Lemma を準備する。

Lemma　任意の整数 A と $m\ (\geqq 2)$ および任意の実数 λ（ただし，$m=2$ のときは $\frac{\lambda}{2\pi}+\frac{1}{2}$ が整数である場合を除く）に對して不等式

$$(3,9)\qquad -A-\frac{1}{4} < \frac{m-1}{m}\left\{\nu - \left(p-\frac{\lambda}{2\pi}\right)\right\} < -A+\frac{1}{4}$$

を満たす整数 $\nu\ (0 \leqq \nu \leqq m-1)$ と A が存在する。

証明

$$I_1 = \left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(p-\frac{\lambda}{2\pi}\right)\right\} m,$$

$$I_2 = -\left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(p-\frac{\lambda}{2\pi}\right)\right\} m$$

とおけば

$$I_1 - I_2 = \frac{m}{2}$$

が成立つ。したがって

$$(3,10)\quad -\left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(p-\frac{\lambda}{2\pi}\right)\right\} m < k < \left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(p-\frac{\lambda}{2\pi}\right)\right\} m$$

を満たす整数 k に對し

$$(3,11)\qquad k = Bm + \nu$$

を満たす整数 B および $\nu\ (0 \leqq \nu \leqq m-1)$ を選ぶ。(3,11) を

(3,10) に代入すれば

$$-\frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{m}\right)\left\{\nu - \left(p-\frac{\lambda}{2\pi}\right)\right\} < B+\nu$$

$$< \frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{m}\right)\left\{\nu-\left(p-\frac{\lambda}{2\pi}\right)\right\}$$

が成立つ。こゝで $A=B+\nu$ とおけば (3.9) が成立つことがわかる。■

Δ_p ($p=0,1,\dots,m-1$) に含まれる領域 Γ_{pN} で (3.5) の有界な正則解の存在をしめすには形式解

$$y_i \approx g_1^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_2^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \cdots + g_N^{(i)} x^{-\frac{N}{m}}+\cdots$$

の中の $g_\nu^{(i)}$ の ν は p に関係して選ばなければならないことに注意する。また $\lambda=\lambda_i$ は i に関係するので ν (A も同様) は i に関係する。したがって

$$-A_i - \frac{1}{4} < \frac{m-1}{m}\left(\nu_i - \left(p-\frac{\lambda_i}{2\pi}\right)\right) < -A_i+\frac{1}{4}$$

とおく。十分小さい ε をとれば

(3.12) $$2A_i\pi - \frac{\pi}{2}+\varepsilon < \frac{m-1}{m}\left(2p\pi - (2\nu_i\pi+\lambda_i)\right) < 2A_i\pi+\frac{\pi}{2}-\varepsilon$$

が成立つ。このとき

$$\left(\frac{m}{m-1}\right)\left(2A_i\pi - \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)+2\nu_i\pi+\lambda_i$$

$$< 2p\pi < \left(\frac{m}{m-1}\right)\left(2A_i\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + 2\nu_i\pi + \lambda_i$$

$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

であるから

$$\gamma_{1p} = \max_i \left[\left(\frac{m}{m-1}\right)\left(2A_i\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) + 2\nu_i\pi + \lambda_i \right],$$

$$\gamma_{2p} = \min_i \left[\left(\frac{m}{m-1}\right)\left(2A_i\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + 2\nu_i\pi + \lambda_i \right]$$

とおけば

$$\gamma_{1p} < 2p\pi < \gamma_{2p}$$

が成立つ。したがって

$$\Delta_p' = \{x \,;\, \gamma_{1p} < \Theta < \gamma_{2p}\} \qquad (\Theta = \arg x)$$

の Θ をとれば

$$2A_i\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon < \frac{m-1}{m}\left(\Theta - (2\nu_i\pi + \lambda_i)\right) < 2A_i\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

$x \in \Delta_p'$ のとき

$$(3,13) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \leqq \cos\left[\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\Theta - (2\nu_i\pi + \lambda_i)\right)\right].$$

十分大きい正数 R_N をとり

$$\Gamma_{pN} : \quad |x| > R_N, \quad x \in \Delta_p'$$

とおけば　$x \in \Gamma_{pN}$ のとき

$$\left| (1+x^{-1})^{\frac{N}{m}} \left(1+\frac{\partial f_i(x,P)}{\partial y_i}\right) \right|^{-1}$$
$$\leqq 1 - \left(c_i \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) - F_i(x^{-\frac{1}{m}}) \right) r^{-\frac{m-1}{m}}$$
$$\leqq 1 - \frac{c_i}{2} r^{-\frac{m-1}{m}} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$$
$$\leqq 1 - c r^{-\frac{m-1}{m}} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$$

が成立つ。 ここに $c = \frac{1}{2}\max c_i$ である。 一方

$$x^{\frac{N}{m}} c_i(x) \left(1+\frac{\partial f(x,P)}{\partial y_i}\right)^{-1} = O(r^{-\frac{m-1}{m}}),$$

$$x^{\frac{N}{m}} \psi_i(x^{\frac{1}{m}}, ux^{-\frac{N}{m}}) \left(1+\frac{\partial f_i(x,P)}{\partial y_i}\right)^{-1} = O(r^{-1}) \quad (N>m),$$

$$\sum_{s \neq i} \frac{\partial f_i(x,P)}{\partial y_s} \left(1+\frac{\partial f_i(x,P)}{\partial y_i}\right)^{-1} = O(r^{-1})$$

であるので十分大きい M_N をとり

$$\|u(x)\| \leqq M_N \quad (x \in \Gamma_{pN})$$

のとき (3.6) から

$$\|\bar{u}(x)\| \leqq M_N \quad (x \in \Gamma_{pN})$$

さきにのべたように，Γ_{pN} における R_N は十分大きくとっておくものとする。

従って (3.4) は Γ_{pN} で

$$\|u(x)\| \leqq M_N$$

を満たす正則な解をもつことが示されたので，Γ_{pN} で

$$\|z_N\| \leq M_N |x|^{-\frac{N}{m}}$$

をみたす (3.3) の正則解の存在がいえる。またこのような解はただ一つであることが証明されるので

$$\Gamma_p = \bigcup_{N=m+1}^{\infty} \Gamma_{pN}$$

とおくことにより，Γ_p $(p=0,1,2,\dots,m-1)$ において (1.1) の解析的漸近解

(3.14) $$y_i \approx g_{1\nu_i}^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_{2\nu}^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \cdots + g_{N\nu}^{(i)} x^{-\frac{N}{m}} + \cdots$$

$(i=1,2,\dots,n)$

の存在が示された。こゝで $\nu=(\nu_i)$ である。ν_i は p に関係して選ばれているので (3.14) は

(3.15) $$y_i \approx g_{1p}^{(i)} x^{-\frac{1}{m}} + g_{2p}^{(i)} x^{-\frac{2}{m}} + \cdots + g_{Np}^{(i)} x^{-\frac{N}{m}} + \cdots$$

$(i=1,2,\dots,n)$

と書く方がよいであろう。また上の Γ_p は

$$\Gamma_p = \{x;\ |x|>R \quad (R=\inf_{N\geq m+1} R_N),\ \arg x \in \Delta_p'\}$$

である。