数理解析研究所講究録
第 499 巻 1983 年 188-205

SCHLÄFLI の函数について

京都大学数理解析研究所／一松 信
(Sin Hitotumatu)

0. 概要

Schläfli の函数とは，Coxeter の命名によるもので，L. SCHLÄFLI が 4次元の正多面体の胞数の計算のために導入した 4次元立体角を表す非初等函数（或はその変形）である。必要なのは，その特別な引数に対する理論的な値であり，函数等式を利用するという意味で，"函数方程式" の研究会で話をさせていただいた。関連話題にも言及する。また当日省略した数値計算にも言及した。

1. 導入史

3次元の正多面体 Π は，その面を正 p 角形，頂点付近が正 q 角錐とするとき，(p, q) で表現される（Schläfli の記号）。Euler の公式により，Π の頂点，辺，面の個数 V, E, F は，次の公式で表される。（必要なら $E = E(p, q)$ などと記す）

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}, \quad V = \frac{2}{q}E, \quad F = \frac{2}{p}E. \qquad (1)$$

同様に4次元の正多面体$\boxed{H}$は，表面の胞(p,q)と，各辺に会する胞の個数rにより，(p,q,r)で表される．その表面のi次元$(i=0,1,2,3)$要素の個数N_iについて，直ちに関係

$$N_3 : N_2 : N_1 : N_0 = \frac{1}{E(p,q)} : \frac{1}{p} : \frac{1}{r} : \frac{1}{E(r,q)} \qquad (2)$$

をうる．しかし4次元のEuler-Poincaréの公式は同次式であって定数項がないので，それに代入しても，自明な式が生じて，N_iの値は定まらない！

これはSchläfli（1850頃）以来4次元の正多面体の研究に手をつけた人が，誰しも最初にぶつかる壁である．この壁を突破する方法もいくつかある．現在まで知られた最も"簡単"な公式は，対称性を活用した"群論的"なCoxeterの公式であろう．それは(2)の比を$g/4$（gは裏返しも含めた自己同型変換の総数にあたる）とするとき，次の形で与えられる：

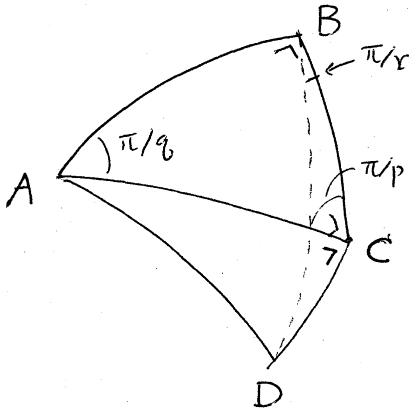
$$\frac{g}{h} = 64\Big/\left(12+\frac{4}{p}+\frac{4}{r}-p-2q-r\right). \qquad (3)$$

$t=\cos(\pi/h)$は，次の方程式の最大根として与えられる．

$$t^4-\left(\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}+\cos^2\frac{\pi}{r}\right)t^2+\cos^2\frac{\pi}{p}\cos^2\frac{\pi}{r}=0.$$

（証明は省くが，とにかくこれでN_iがp,q,rの"初等函数"で表される．）

しかしこれはかなりもって廻った式である．Schläfliは（その後の多くの人も），もっと"解析的"な方法で考えた．4



面ACD ⊥ 面ABC, 面ABD ⊥ 面BCD

∠(面ACD, BCD) = ∠ACB = π/p = α

∠(面ACD, ABD) = ∠CAB = π/q = β

∠(面ABD, ABC) = ∠DBC = π/r = γ

面ABC ⊥ 面BCD

(他の内角も p, q, r の初等函数で表される)

- - - - - - - - - - - - - - - -

次元正多面体全体の中心をO_4, 一つの胞の中心をO_3, その一つの面の中心をO_2, その一つの辺の中点をO_1, その一端をO_0とする。基本単体 $O_4O_3O_2O_1O_0$ の個数がg個である。それをO_4を中心とする単位超球面に射影してDCBAとすると、これは"三重直角球面四面体"になる。その"球面積"(体積)はα, β, γ の函数であり、これが(本質的に)Schläfliの函数である。$\alpha=\pi/p$, $\beta=\pi/q$, $\gamma=\pi/r$のとき、その値で全立体角$2\pi^2$を割ればgが求められる。なお同じ方法を3次元の場合に適用すると、$g=4E$として、(1)と同じ式をうる。

ところが4次元の場合、この函数は初等函数(逆三角函数を含む)の不定積分であるが、初等函数にはならない! 個々の値は数値積分で近似的に求められるが、それでは一般公式とはいい難い。

Schläfliは、後になって、当面正多面体として必要な有限

個の場合には、定積分の値を個々に工夫して求めることに成功した。しかしこれに対する統一的な計算法は、Coxeter による以下の Fourier 級数によるものである。これは Coxeter が若い頃、論文中に未解決の課題と書いたところ、G.H.Hardy から丁寧な手紙をもらったとのことである。

今日ではむしろ Coxeter がその後整理したように、級数で直接に Schläfli の函数 $S(x, y, z)$ を定義してその性質を調べ、後に応用として正多面体と結びつけるほうが本道になっている。この函数は4次元の超球充填の評価などにも応用がある（5節）。また後に似た形の級数の数値計算が統計学での実用上必要とされているという御注意をいただいた。

2. 定義と基本性質

ここでは天下りに次のように定義する。ただし x, z は上述の α, γ の余角に相当する（そのほうが計算に便利である。）

$$S(x, y, z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n^2}(\cos 2nx - \cos 2ny + \cos 2nz - 1) - x^2 + y^2 - z^2 \qquad (1)$$

ここで $$X = \frac{D - \sin x \cdot \sin z}{D + \sin x \cdot \sin z}, \quad D = \sqrt{\cos^2 x \cos^2 z - \cos^2 y} \qquad (2)$$

$|X| \leqq 1$ で (1) は収束する。D の平方根号内が負の場合も

複素函数として意味があるが、ここでは

$$|\cos x \cdot \cos z| \geqq |\cos y| \qquad (3)$$

の範囲で考える。$x=\pi/2-\pi/p$, $y=\pi/q$, $z=\pi/2-\pi/r$ とするとき、(3) は正多面体 (p, q, r) が可能なための条件である（等号は3次元の充填形のとき）。

定義から、(1) は x, z について対称である。これは正多面体について、p, r を交換した双対同志で g が等しいことを示す。次に

$$\sin^2 x + \sin^2 z = \sin^2 y \qquad (4)$$

のときには $X=0$ となって、$S=-x^2+y^2-z^2$ である。また

$$\cos x \cdot \cos z = \pm \cos y \qquad (5)$$

のときには、$D=0$, $X=-1$ となり、Fourier 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\xi}{n^2} = \frac{1}{4}\left((\pi-\xi)^2-\frac{\pi^2}{3}\right), \quad 0 \leqq \xi \leqq 2\pi \qquad (6)$$

を利用すれば、$S=0$ となる。当面必要な値は、星形正多面体も含めて、p, q, r, が 3, 4, 5, 5/2 のいずれかであって、末尾の表に与えられる組（及び p, r を交換したもの）に限る。このうち分類欄に0と記した場合は、上述の (4) または (5) をみたすので、直接に計算できる場合である。

他は S の函数等式による。そのうち y を補角にした公式

$$S(x, \pi - y, z) - S(x, y, z) = \pi(\pi - 2y) \quad (7)$$

は，$\cos^2 y$，$\cos 2ny$ が不変なので，直接に定義からでる。他は S の微分によって計算する．それを次節に述べる．

3. S の微分関係

dS を形式的に計算して，$d\log X$ の項の係数を，Fourier 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \cos 2n\xi = -\frac{1}{2}\log(1 - 2t\cos\xi + t^2), \quad |t| \leqq 1$$

を利用すると，その項は 0 になる．したがって最終的に

$$-\frac{1}{2} dS(x,y,z) = \arccos \frac{\cos x \sin z}{\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 y}}\, dx + \arccos \frac{\sin x \cos z}{\sqrt{\cos^2 z - \cos^2 y}}\, dz$$

$$- \arccos \frac{\sin x \cos y \sin z}{\sqrt{(\cos^2 x - \cos^2 y)(\cos^2 z - \cos^2 y)}}\, dy \quad (1)$$

をうる。これによって函数等式を次のように証明する．

$$S(x, \pi/2, z) = 2(\pi/2 - x)(\pi/2 - z) \quad (2)$$

の証明： $z + x = \pi/2$ のときには，$X = 0$ となり，(2) は両辺とも $x(\pi - 2x)$ になる．そして (1) に $y = \pi/2$ を代入すると

$$-\frac{1}{2} dS(x, \pi/2, z) = (\pi/2 - z)dx + (\pi/2 - x)dz$$

となり，(2) の両辺の微分が一致する．ゆえに積分して (9) をうる ■

同様に次の函数等式を証明する．

$$S(2x - \pi/2, \pi/2 - x, \pi/6) = 4S(x, \pi/3, \pi/6) \quad (3)$$

$$S(x, \pi - 2x, x) = 6S(x, \pi/3, \pi/6) \quad (4)$$

実数として成立する範囲は，それぞれ

(3) では $\pi/4 \leqq x \leqq \arccos\sqrt{1/3}$，(4) では $0 \leqq x \leqq \arccos\sqrt{1/3}$

であるが，複素変数まで拡張すれば，$x \leqq \pi/3$ で正しいことが確かめられる。

証明：$x=\pi/4$ のときには，(3) の左辺は

$$S(0,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nz-\cos 2ny}{n^2}+y^2-z^2 \qquad (X=1)$$

$$=(\pi/2-z)^2-(\pi/2-y)^2+y^2-z^2=\pi(y-z) \quad (5)$$

により $\pi^2/12$，右辺は前節 (4) により $4\pi^2/48$；また (4) の左辺は (2) により $\pi^2/8$，右辺は前節 (4) により $6\pi^2/48$ となって成立する。そこで両辺の微分を比較すると，便宜上

$$\eta=\arccos\left(\cos x/\sqrt{4\cos^2 x-1}\right)$$

とおいて

$$-\tfrac{1}{2}\,dS(2x-\pi/2,\ \pi/2-x,\ \pi/6)=\eta\, d(2x-\pi/2)-2\eta\, d(\pi/2-x)$$

$$=4\eta\, dx,$$

$$-\tfrac{1}{2}\,dS(x,\pi/3,\pi/6)=\eta\, dx$$

$$-\tfrac{1}{2}\,dS(x,\pi-2x,x)=\eta\, dx-2\eta\, d(\pi-2x)+\eta\, dx=6\eta\, dx$$

となり，両辺が等しい。■

ところで当初の三重直角四面体の体積を $(\pi^2/8)f(\alpha,\beta,\gamma)$ とおくと，角 α,β,γ を僅かに変化させたときの変化は，それぞれの面（球面三角形）の面積に比例し，次のようになる。

$$(\pi^2/4)\, df(\alpha,\beta,\gamma) = \arccos\frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}}\,d\alpha + \arccos\frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\gamma-\cos^2\beta}}$$

$$\times d\gamma + \arccos\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sqrt{(\sin^2\alpha-\cos^2\beta)(\sin^2\gamma-\cos^2\beta)}}\,d\beta \qquad (6)$$

そして $\sin\alpha\sin\gamma=\cos\beta$ のとき，3次元充填形となり，球面四面体としては無限小，すなわち $f=0$ となる．これをdSの式(1)と比較し，前節(5)のとき$S=0$の関係式に注意して，

$$S(x,y,z) = (\pi^2/2)\, f(\pi/2-x,\ y,\ \pi/2-z) \qquad (7)$$

をうる．これがSによる超球表面積の表現である．

4. 必要な特殊値の計算

末尾の表で分類1とした値を計算しよう．

$(p,q,r)=(3,3,3)$ に相当する $x=\pi/6$, $y=\pi/3$, $z=\pi/6$ の値は，次のようにして求められる．まず前節(4)に $x=\pi/6$ を代入すると

$$S(\pi/6,\ 2\pi/3,\ \pi/6) = 6\,S(\pi/6,\ \pi/3,\ \pi/6)$$

ところが2節の式(7)から，$x=z=\pi/6$, $y=\pi/3$ として

$$S(\pi/6,\ 2\pi/3,\ \pi/6) = S(\pi/6,\ \pi/3,\ \pi/6) + \pi^2/3$$

この両者から，ただちに次の答をうる．

$$S(\pi/6,\ \pi/3,\ \pi/6) = \pi^2/15 \qquad (1)$$

$(p,q,r)=(5,3,3)$ に相当する $x=3\pi/10$, $y=\pi/3$, $z=\pi/6$ の値は，まず前節(3)に $x=3\pi/10$ とおくと

$$S(\pi/10,\ \pi/5,\ \pi/6) = 4S(3\pi/10,\ \pi/3,\ \pi/6)$$

をうるが，この左辺は $p=5/2,\ q=5,\ r=3$ のときで2節の条件(4)をみたし，ただちに $\pi^2/450$ と計算できる。ゆえに

$$S(3\pi/10,\ \pi/3,\ \pi/6) = \pi^2/1800 \qquad (2)$$

をうる。さらに前節(4)に $x = 3\pi/10$ とおくと

$$S(3\pi/10,\ 2\pi/5,\ 3\pi/10) = 6S(3\pi/10,\ \pi/3,\ \pi/6) = \pi^2/300, \qquad (3)$$

をうる。以上を表1で分類1とした。

分類2とした値もこれらから導くことができる。まず(2),(3)の級数を書き下すと，($-x^2+y^2-z^2$ の項が $-\pi^2/150$ などで)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sigma)^n}{n^2}\left(\cos\frac{2}{5}n\pi - \cos\frac{2}{3}n\pi + \cos\frac{1}{3}n\pi - 1\right) = \frac{13}{1800}\pi^2 \qquad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sigma)^n}{n^2}\left(2\cos\frac{2}{5}n\pi - \cos\frac{1}{5}n\pi - 1\right) = \frac{7}{300}\pi^2 \qquad (5)$$

ここに $\sigma = (\sqrt{5}-1)/2 = 0.618\cdots = \tau^{-1}$, $\tau = (\sqrt{5}+1)/2$

をうる。これらは $(-1)^n = \cos(n\pi)$ として変形すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n^2}\left(\cos\frac{2}{5}n\pi - \cos\frac{1}{3}n\pi + \cos\frac{2}{3}n\pi - \cos n\pi\right) = \frac{13}{1800}\pi^2 \qquad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n^2}\left(2\cos\frac{2}{5}n\pi - \cos\frac{1}{5}n\pi - \cos n\pi\right) = \frac{7}{300}\pi^2 \qquad (7)$$

となる。一方前節(2)において，左辺の定義式を書き下すと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(x+z)}{\cos(x-z)}\right]^n \frac{1}{n^2}\left(\cos 2nx + \cos 2nz - 1 - \cos n\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} - x - z\right)^2 \qquad (8)$$

（ただし　$0 \leqq x \leqq \pi/2$，　$0 \leqq z \leqq \pi/2$）

をうる．これは $x+z$, $x-z$ を独立変数にとれば，もっと簡単になるが，(8) で $x=\pi/5$，$z=\pi/10$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n^2}\left(\cos\frac{2}{5}n\pi+\cos\frac{1}{5}n\pi-1-\cos n\pi\right)=\frac{\pi^2}{25} \qquad (9)$$

をうる．ところで表1の末尾の2行の組では，いずれも $X=\sigma$ であり，級数はそれぞれ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n^2}\left(\cos\frac{1}{5}n\pi-\cos\frac{2}{3}n\pi+\cos\frac{1}{3}n\pi-1\right) \qquad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{n^2}\left(2\cos\frac{1}{5}n\pi-\cos\frac{2}{5}n\pi-1\right) \qquad (11)$$

である．(10) は (9)−(6)，(11) は (9)−(7) として，それぞれ $59\pi^2/1800$，$\pi^2/60$ をうる．これと $-x^2+y^2-z^2$ の項を合せて，最終的に次の答をうる．これを分類2として表1に示す．

$$\left.\begin{aligned} S(\pi/10, \pi/3, \pi/6) &= 191\pi^2/1800 \\ S(\pi/10, \pi/5, \pi/10) &= 11\pi^2/300 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

なお (6), (7) などから副産物として，Abelの函数

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=-\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}dt$$

について，次のような函数等式をうる．

$$\psi(\sigma^3)-\psi(-\sigma^3)=\psi(\sigma)-\psi(-\sigma)-\pi^2/12$$

$$-\psi(\sigma^6)+2\psi(-\sigma^6)-6\psi(-\sigma^2)=3\psi(\sigma^2)+\pi^2/15$$

これらにより，　$\Sigma(\sigma^n/n^2)\cos\alpha n\pi$ ；$\alpha=1/3, 2/3, 1/5, 2/5$

などの値をψで表すことができる．なお

$$\psi(\sigma)=\pi^2/10-(\log\sigma)^2,\quad \psi(\sigma^2)=\pi^2/15-(\log\sigma)^2$$

$$\psi(-\sigma)=-\pi^2/15+(\log\sigma)^2/2$$

などは，19世紀から知られている．これらを使うと最終的に

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^n}{n^2}\cos\frac{1}{5}n\pi=\frac{19}{300}\pi^2-\frac{1}{2}(\log\sigma)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^n}{n^2}\cos\frac{2}{5}n\pi=\frac{\pi^2}{100}$$

などを求めることができる．（文献[3]参照）

このほかいくつかの興味ある等式が出るが，詳細は文献[1]にゆずる．

5. Schläfli の函数の応用

他の応用として，n次元空間で，合同な球が同一球に最大何個まで接しうるか，を評価する問題がある．$n=2$のとき6は容易にわかる．$n=3$のとき12個十分は容易だが，13個か可能か否か，永らく論争があった．いまでは不可能なことが証明されている（文献[2]；不可能性の比較的初等的な証明は[4]が入手しやすい）．

4次元の場合24個十分は容易にわかる．正二十四胞体の中心と各頂点におけばよい．或は同じことだが，"Hurwitzの整数"とよばれる四元整数環の単数全体合計24個

$$\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k,\quad (\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2 \tag{1}$$

（±はあらゆる組合せをとる）

が，0から等距離にあり，互いの距離が最短1であることに注意するとよい。(1)は正二十四胞体の頂点をなす．

一方上限の評価では（文献[2]），

$$\leq \frac{2F_3(\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}4)}{F_4(\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}4)} = 26.44009910\cdots \tag{2}$$

が示されている．ここに F_n は　$F_0(x) = F_1(x) = 1$，

$$F_{n+1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_{(\operatorname{arcsec} n)/2}^{x} F_{n-1}(\beta)\,d\theta, \quad \sec 2\beta = \sec 2\theta - 2$$

として帰納的に定義される函数であって，初めのほう

$$F_2(x) = 2x/\pi, \quad F_3(x) = (2x/\pi) - (1/3)$$

は初等函数だが，$n \geq 4$ は初等函数にならない．特に

$$F_4(x) = \frac{2}{\pi^2} S\left(\frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) \tag{3}$$

であり，Schläfli の函数を使って $F_4(x)$ の特殊値が計算できる．なお $F_4(x)$ は $\pi/4 \leq x \leq 3\pi/4$ の範囲では，図に書くとほぼ直線のように見える．――本当は $x = \pi/2$ で値 $1/3$ をとり，ここで変曲点をもつS字状曲線なのだが――．

$n = 4$ ではたぶん24が必要十分と予想されているが，25個（あるいは26個）の不可能性は（できたと称する論文はあるらしいが），完全に証明されていないようである．

6. Schläfli の函数の数値計算

念のために，表1の充填形(4, 3, 4)以外の場合について，数値計算を試みた．他の場合には X は 0，σ^2，$\pm\sigma$ のいずれかなので，定義の式そのままを使った．

級数の和 Σ を，$|\text{項}| \leqq 10^{-5}$ になるまで加えて求めた値を表2に示す。じつは最初は Σ の初期値を $-x^2+y^2-z^2$ として，これに加えこむ形で計算した．

結果は大体もっともらしいが，満足すべきものではなかった。$X=0$ になるべき場合が小さい誤差で残るのは差し支えないが，特に(5, 3, 3)の答がよくない（これを1800と思え!というのは少々ひどすぎる!）この場合 $-x^2+y^2-z^2$ が $-\pi^2/150=-12\pi^2/1800$，$\Sigma=13\pi^2/1800$（4節(6)）であって，かなりの桁落ちを生ずる．

そこで次の改良を行った：

1° 全体を π^2 で割り，$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)^2+\left(\frac{1}{q}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)^2$ を有理数で計算する．（実際には，$X=0$ になる場合を除き，共通分母 1800 を乗じて，整数の計算にした）

2° 級数の項 Σ を，初期値 0 から始める。実際には $1800/\pi^2$ 倍して計算した。そしてその整数部を 1° と加えることにした．

3° 誤差を避けるため $\cos(l\pi/5)$，$\cos(l\pi/3)$（l：整）の値を（理論的に求めて）表にし，$\cos 2nx$ などは表をひいて求めるようにした．

これらによってかなり改良されたが，依然として(5,3,3)の最終結果は 1793.3 位にしか改良されなかった。

その原因がとんだ陥し穴にあることは，中間結果を印刷してみて初めてわかった。級数Σの項（例えば4節(6)）のcosの和の項は，途中で0になることがある！したがって|項|≦εの判定では，収束しないうちに，たまたま非常に小さい項があるとそこで止ってしまっていた。—もっともこのおかげで最初プログラムに誤りがあったときも，暴走（無限ループ）が未然に防がれていた。

そこで反復回数を予測して，一定回数の反復にしたところ，$X=0$となるデータで，"underflow"の警告続出となった（答は正しかったが）。最終的には，cosの項の絶対値は最大4なので，これを外し，$|X^n/n^2|$の項のみの評価で止めるようにして，ようやく表2の下の注に記した満足すべき答をえた。

この計算は，失敗の告白であり，しかも予め答の予測できる場合のいわばだめ押し計算である。$|X|$が1に近く，もとのままの級数の収束が極めて遅い場合の数値計算は，今後の研究課題かもしれない。5節の場合（式(2)）などは，級数でなく，数値積分の形で，よい数値が求められているようである。

— 付 表 —

表1　4次元正多面体に必要なSの特殊値

p	q	r	x/π	y/π	z/π	π²/S	d	分類	N_3
3	3	3	1/6	1/3	1/6	15	1	1	5
4	3	3	1/4	1/3	1/6	48	1	0	8 , 16
3	4	3	1/6	1/4	1/6	144	1	0	24
4	3	4	1/4	1/3	1/4	∞ (S=0)	(1)	0	∞
5	3	5/2	3/10	1/3	1/10	90	20	0	120
5/2	5	3	1/10	1/5	1/6	450	4	0	120
5	5/2	3	3/10	2/5	1/6	450/19	76	0	120
5	3	3	3/10	1/3	1/6	1800	1	1	120 , 600
5	5/2	5	3/10	2/5	3/10	300	6	1	120
5/2	3	3	1/10	1/3	1/6	1800/191	191	2	120, 600
5/2	5	5/2	1/10	1/5	1/10	300/11	66	2	120

dは密度（本文参照）．N_3は自己双対のものや双対同志等しいものはまとめ，そうでないものは，左側が左端の(p,q,r)，右側がその共役の(r,q,p)に対する値を示す．d=1のものは

$$N_3 = 2(\pi^2/S)/E(p,q)$$

で表される．Eは1節の式(1)で与えられる．

表2. 数値計算値(最初の計算結果)

p	q	r	Σ	Σ/π^2	理論値	π^2/S 計算値	注
3	3	3	0.1096702	0.0111119	1/90	15.0000	
4	3	3	2.1×10^{-19}	2.1×10^{-20}	0	48.0000	
3	4	3	4.8×10^{-19}	4.9×10^{-20}	0	144.000	
5	3	3	0.0713097	0.0072252	13/1800	1790.2	1)
5/2	3	5	3.2×10^{-19}	3.2×10^{-20}	0	90.0000	
5	5/2	3	9.9×10^{-20}	1.0×10^{-20}	0	23.6842	2)
5/2	5	3	3.9×10^{-19}	3.9×10^{-20}	0	450.000	
5	5/2	5	0.2303091	0.0233352	7/300	299.833	3)
5/2	5	5/2	0.1645170	0.1666906	1/60	27.2709	4)
5/2	3	3	0.3235164	0.0327791	59/1800	9.42397	5)

注 1) 最終的の改良値は1800.000. (本文参照)

2) 19倍は450.000.

3) 最終的の改良値は 300.0002

4) この11倍は 299.980; 最終的の改良値 27.27273

5) この 191倍 は 1799.98; 最終的の改良値 9.42408

参考文献

[1] H.S.M.Coxeter, The functions of Schläfli and Lobatschef-sky, (originally) Quarterly J. of Math.,Oxford Series, vol. 6 (1935),—reprented in his book"Twelve geometric essays, Southern Illinois Univ. Press,1968, Chap. 1

[2] H.S.M.Coxeter, An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another of the same size,(originally) Proc. Symp. in Pure Math.,7, pp.53-72 (1963),— reprinted in the above book(in [1]) Chap. 9.

[3] L.Lewin, Polylogarithms and associated functions, (rev. edition), North-Holland, 1981

[4] K.Schütte & B.L.van der Waerden, Das Problem der dreizehn Kugeln, Math. Annalen,125,pp.325-334 (1952).

[5] 一松信，正多面体物語り，東海大学出版会，近刊予定．

On the function of Schläfli

(by Sin Hitotumatu)

Abstract

This is an expository note on the Schläfli function intorduced by Coxeter [1] and its applications to 4-dimensional regular polytopes. It includes also some troubles in the numerical computation of this function.