数理解析研究所講究録
第500巻 1983年 1-10

Any Hermitian Matrix is a Linear Combination of Four Projections

北大 応電研 中村美浩 (Yoshihiro Nakamura)

可分な無限次元ヒルベルト空間上のどんな有界線形作用素も、257個の直交射影の線形一次結合で表わせる事が、Fillmore [1] によって証明された。同じく自己共役作用素は、257個の直交射影の実線形一次結合で表わせる。続いて、Pearcy - Topping [7] は、(必ずしも可分でない)無限次元ヒルベルト空間上のどんな自己共役作用素も、8個の直交射影の実線形一次結合で表わせる事を証明した。さらに Paszkiewicz [5] によって、任意次元のヒルベルト空間上のどんな自己共役作用素も、6個の直交射影の実線形一次結合で表わせる事が証明された。Matsumoto [4] は、Paszkiewicz の証明が実際には5個の直交射影で充分である事を示した。

ここでは、これらの結果を踏まえて、直交射影の最良の個数について考察した結果を述べる。

1. 自然数 n に対して、$n \times n$ 複素行列の全体を $M_n(\mathbb{C})$

で表わす。どんな $n\times n$ エルミート行列も、$M_n(\mathbb{C})$ 内の k 個の直交射影の実線形一次結合で表わせるような、最小の自然数 k を $K(n)$ で表わす。明らかに $K(n)\leq n$ であるが、上に述べた Matsumoto [4] の結果は $K(n)\leq 5$ を示している。ここでは、結論として次が得られた。

定理. $\min(3,[\log_2 n]+1)\leq K(n)\leq \min(4,[\log_2 n]+1)$

ただし、実数 t の整数部分を $[t]$ で表わした。もう少しわかりやすく書くと、次のようになる。

定理′. $K(1)=1,\quad K(2)=K(3)=2,$

$K(4)=K(5)=K(6)=K(7)=3,$

$3\leq K(n)\leq 4 \quad \text{if} \quad n\geq 8.$

定理の $K(n)$ の評価は、次の3つから成っている。

(i) $K(n)\leq [\log_2 n]+1$

(ii) $K(n)\leq 4$

(iii) $K(n)\geq 3 \quad \text{if} \quad n\geq 4.$

以下では、この(i)−(iii)を順次証明していく。

2. まず、定理の証明の鍵になる、2×2 行列に関する基本的な補題を証明する。

補題 1. 実数 $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ に対して次は同値。

(1) 階数 1 の直交射影 $P, Q \in M_2(\mathbb{C})$ が存在して、

$$\mathrm{diag}(\lambda, \mu) = \alpha P + \beta Q$$

(2) $\lambda + \mu = \alpha + \beta$ かつ $||\alpha| - |\beta|| \leq |\lambda - \mu| \leq |\alpha| + |\beta|$

証明. 一般に、$M_2(\mathbb{C})$ 内の階数 1 の直交射影は、次の形をしている:

$$\begin{bmatrix} \frac{1+s}{2} & \frac{\sqrt{1-s^2}}{2} e^{-i\theta} \\ \frac{\sqrt{1-s^2}}{2} e^{i\theta} & \frac{1-s}{2} \end{bmatrix} \qquad s \in [-1, 1],\ \theta \in \mathbb{R}.$$

従って、(1) は次と同値である:

$$\begin{array}{l} {}^{\exists} s, t \in [-1, 1] \\ {}^{\exists} \theta, \phi \in \mathbb{R} \end{array} \quad \text{s.t.} \begin{cases} \lambda = \{\alpha(1+s) + \beta(1+t)\}/2 \\ \mu = \{\alpha(1-s) + \beta(1-t)\}/2 \\ e^{i\theta}\alpha\sqrt{1-s^2} + e^{i\phi}\beta\sqrt{1-t^2} = 0 \end{cases} .$$

よって、さらに、(1) は次と同値になる:

$$\lambda + \mu = \alpha + \beta$$

$${}^{\exists} s, t \in [-1, 1] \quad \text{s.t.} \quad \lambda - \mu = \alpha s + \beta t,\ \alpha^2(1-s^2) = \beta^2(1-t^2).$$

ところが、連続関数 $(s, t) \longmapsto \alpha s + \beta t$ は $\{(s, t) : \alpha^2(1-s^2) = \beta^2(1-t^2),\ s, t \in [-1, 1]\}$ を $\{x \in \mathbb{R} : ||\alpha| - |\beta|| \leq |x| \leq |\alpha| + |\beta|\}$ に写すから、以上により (1) と (2) は同値である。

補題はあとで、次の形で使われる。

補題2. e_1, e_2 を $\mathbb{C}^n$ の単位ベクトルで、$e_1 = e_2$ または $e_1 \perp e_2$ とする。もし、

$$\alpha \geq \lambda \geq 0 \geq \mu \quad \text{または} \quad \lambda \geq \alpha \geq 0 \geq \mu$$

ならば、単位ベクトル $x, y \in \mathrm{span}(e_1, e_2)$ が存在して

$$\lambda e_1 \otimes e_1 + \mu e_2 \otimes e_2 = \alpha x \otimes x + (\lambda + \mu - \alpha) y \otimes y.$$

3. 次に (i)−(iii) の証明をする。まず (i) は、次を示せばよい。

命題. 任意のエルミート行列 $A \in M_\ell(\mathbb{C})$ は、高々 $[\log_2\{\mathrm{rank}(A)\}] + 1$ 個の $M_\ell(\mathbb{C})$ 内の直交射影の実線形一次結合でかける。

証明. 帰納法によって証明する。$\mathrm{rank}(A) = 1$ のときは明らか。階数が $n-1$ 以下のエルミート行列について、命題が正しいと仮定する。A を階数が n のエルミート行列とし

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \otimes e_j \qquad \cdots\cdots (*)$$

と表現する。固有値 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ を非増加にとっておけば、

$$1 \leq {}^\exists k \leq n \quad \text{s.t.} \quad \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1}.$$

ただし、便宜的に $\lambda_{n+1} = -\infty$ と考える。必要ならば A のかわ

りに $-A$ を考える事によって、$k \leq n-k$ としてよい。n が奇数のときは、$m=(2k-n+1)/2$ とおけば、

$$A=\sum_{i=1}^{m-1}(\lambda_{m-i}e_{m-i}\otimes e_{m-i}+\lambda_{m+i}e_{m+i}\otimes e_{m+i})+\lambda_m e_m\otimes e_m$$
$$+\sum_{j=1}^{n-k}(\lambda_{k+1-j}e_{k+1-j}\otimes e_{k+1-j}+\lambda_{k+j}e_{k+j}\otimes e_{k+j}).$$

$\alpha=\lambda_m$ とおけば、$\lambda_{m-i}\geq\alpha\geq\lambda_{m+i}\geq 0$ $(1\leq i\leq m-1)$ かつ $\alpha\geq\lambda_{k+1-j}\geq 0\geq\lambda_{k+j}$ $(1\leq j\leq n-k)$ ゆえ、補題2により、$x_i, y_i\in\mathrm{span}(e_{m-i}, e_{m+i})$, $u_j, v_j\in\mathrm{span}(e_{k+1-j}, e_{k+j})$ が存在して

$$\lambda_{m-i}e_{m-i}\otimes e_{m-i}+\lambda_{m+i}e_{m+i}\otimes e_{m+i}$$
$$=\alpha x_i\otimes x_i+(\lambda_{m-i}+\lambda_{m+i}-\alpha)y_i\otimes y_i$$

$$\lambda_{k+1-j}e_{k+1-j}\otimes e_{k+1-j}+\lambda_{k+j}e_{k+j}\otimes e_{k+j}$$
$$=\alpha u_j\otimes u_j+(\lambda_{k+1-j}+\lambda_{k+j}-\alpha)v_j\otimes v_j.$$

そこで、$P=\sum_{i=1}^{m-1}x_i\otimes x_i+\sum_{j=1}^{n-k}u_j\otimes u_j+e_m\otimes e_m$

$$B=\sum_{i=1}^{m-1}(\lambda_{m-i}+\lambda_{m+i}-\alpha)y_i\otimes y_i+\sum_{j=1}^{n-k}(\lambda_{k+1-j}+\lambda_{k+j}-\alpha)v_j\otimes v_j$$

とおくと、$A=\alpha P+B$。P は直交射影であり、B はエルミート行列でかつ $\mathrm{rank}(B)\leq[\frac{n}{2}]$。帰納法の仮定と、不等式 $[\log_2([\frac{n}{2}])]+1\leq[\log_2 n]$ により、A は高々 $[\log_2 n]+1$ 個の直交射影の実線形一次結合でかける。

n が偶数のときも、上と同様にして証明する事ができる。

命題の証明は、正定値行列 A が高々 $[\log_2\{\mathrm{rank}(A)\}]+1$ 個の直交射影の正数係数の線形一次結合でかける事も、実際に

は示している。

(ii) の証明．　A を $n\times n$ エルミート行列とし，(*) の形に表現しておく。必要ならば A のかわりに $-A$ を考える事によって，$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \geq 0$ としてよい。$\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ を非増加にとっておき，$\gamma_k = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \ (1\leq k\leq n)$，$\varepsilon = \gamma_n/n$，$\alpha = \max_{1\leq k\leq n}\{\gamma_k-(k-1)\varepsilon\}$ とおけば，$\gamma_k-(k-1)\varepsilon \geq 0 \geq -(\gamma_k-k\varepsilon) \ \ (1\leq k\leq n)$。よって補題2により，$x_k, y_k \in \mathrm{span}(e_k, e_{k+1})$ が存在して

$$(\gamma_k-(k-1)\varepsilon)e_k\otimes e_k - (\gamma_k-k\varepsilon)e_{k+1}\otimes e_{k+1}$$
$$= \alpha x_k\otimes x_k - (\alpha-\varepsilon)y_k\otimes y_k \qquad (1\leq k\leq n).$$

ただし，$e_{n+1}=e_n$。ここで，

$$P_1 = \sum_{k:\mathrm{odd}} x_k\otimes x_k, \quad P_2 = \sum_{k:\mathrm{even}} x_k\otimes x_k,$$
$$Q_1 = \sum_{k:\mathrm{odd}} y_k\otimes y_k, \quad Q_2 = \sum_{k:\mathrm{even}} y_k\otimes y_k$$

とおくと，これらはそれぞれ直交射影となり，γ_k, ε の定義のしかたから，$A = \alpha P_1 + \alpha P_2 - (\alpha-\varepsilon)Q_1 - (\alpha-\varepsilon)Q_2$ となる。A は任意だから，$K(n)\leq 4$。

上の証明で，奇数または偶数番目の単位ベクトルを集めて直交射影を作るやり方は，Paszkiewicz [5] にある。彼の証明からほとんど直に，無限次元ヒルベルト空間上のコンパクト自己共役作用素が4個の直交射影の実線形一次結合でかける

事がわかるが、それは $K(n) \leq 4$ を意味しない。

(iii) の証明. $n \geq 4$ のとき、実際次のように作られたエルミート行列は、$M_n(\mathbb{C})$ 内の2個の直交射影では表わせない:

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0, \quad 2\lambda_1 > \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \quad (**).$$

もし、2個の直交射影 $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ で表わせたとする:

$$A = \alpha P + \beta Q \qquad (\alpha \geq \beta).$$

まず、$\beta > 0$ でなければならない。なぜなら、$\beta \leq 0$ ならば $\alpha P = A + (-\beta) Q$ より $P = I$ となって λ_j のとり方に矛盾する。次にトレースを考えると、$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \alpha\, \mathrm{rank}(P) + \beta\, \mathrm{rank}(Q)$。一方、$\alpha \geq \beta > 0$ より $\lambda_1 \leq \alpha + \beta$。従って、$(**)$ と合わせて

$$\alpha\, \mathrm{rank}(P) + \beta\, \mathrm{rank}(Q) < 2(\alpha + \beta).$$

よって $\mathrm{rank}(P) = 1$, $\mathrm{rank}(Q) = n-1$. そこで

$$A - \beta I = \alpha P - \beta(I - Q)$$

の両辺の階数を比較すると、$\mathrm{rank}(\alpha P - \beta(I-Q)) \leq 2$, $\mathrm{rank}(A - \beta I) \geq n-1 \geq 3$ となり矛盾. 従って、A は2個の直交射影では表わせない。よって、$K(n) \geq 3$.

4. $n \geq 8$ のとき $K(n)$ が 3 であるか 4 であるかはまだわかっていない。また、無限次元のヒルベルト空間における

場合にも、5個が直交射影の最小の個数であるかどうかもわかっていない。著者は $n \geq 8$ のとき $K(n)=4$ であろうと予想しているが、実際に3個の直交射影の実線形一次結合で表わせないエルミート行列を作る事は難しい。これは無限次元の場合でも同様である。しかし、その手掛りとして、たとえば Horn-Lidskii の定理（Lidskii [3]）などは非常に有効であろうと考える。また、2個の直交射影の実線形一次結合に関する次の事実も、手掛りの一つになると思われる。

命題.　$n \times n$ エルミート行列 A が $M_n(\mathbb{C})$ 内の2個の直交射影の実線形一次結合で表わせるための必要かつ十分条件は、A が B と C の直和になっていて、B は $\alpha I - B$ とユニタリ同値かつ $\sigma(C) \subseteq \{0, \alpha, \beta\}$ である事である。ただし、α, β はある実数。

この結果は、無限次元の場合にも同じように成り立ち、それは Fillmore [2] が無限次元ヒルベルト空間上の自己共役作用素が2個の直交射影の和で表わせるための必要かつ十分条件を求めているのと同様に証明できる。有限次元の場合の証明も難しくはない。定理の (iii) の部分の証明は、この事実から導くこともできる。

Paszkiewicz [5] は、ヒルベルト空間上の自己共役作用素Aが6個の直交射影 P_j $(1 \le j \le 6)$ の実線形一次結合で表わせる事 $A = \sum_{j=1}^{6} \alpha_j P_j$ を証明し、その際係数が一様におさえられる事 $|\alpha_j| \le 5\|A\|$ $(1 \le j \le 6)$ も示している。(実際には、Matsumoto [4] が指摘しているように、直交射影は5個でよく、係数も $2\|A\|$ でおさえられる。) それを用いて、Paszkiewicz [5, 6] は、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の線形汎関数 φ の有界性は直交射影についてだけ調べれば十分である：$\|\varphi\| \le 4 \sup\{|\varphi(P)| : P^* = P^2 = P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$ などの事を証明している。自己共役作用素が有限個の直交射影で表わせる事の有用性は、事実その辺にあると考えられるが、その他にこれから導き出せる事柄があるのかどうかは知らない。

参考文献

[1] P. A. Fillmore, Sums of operators with square zero, Acta Sci. Math. (Szeged) 28 (1967), 285-288.

[2] P. A. Fillmore, On sums of projections, J. Funct. Anal. 4 (1969), 146-152.

[3] B. V. Lidskii, Spectral polyhedron of a sum of two Hermitian matrices, Funct. Anal. Appl. 16 (1982), 139-140.

[4] K. Matsumoto, Self-adjoint operators as a real span of 5 projections, to appear in Math. Japon..

[5] A. Paszkiewicz, Any self-adjoin operator is a finite linear combination of projectors, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 28 (1980), 337-345.

[6] A. Paszkiewicz, Representation of a bounded operator as a finite linear combination of projectors and some inequalities for a functional on B(H), Probability theory on vector spaces, II(Proc. Second Internat. Conf. Blazejewko, 1979), pp.223-233, Lecture Notes in Math. 828, Springer, 1980.

[7] C. Pearcy and D. Topping, Sums of small numbers of idempotents, Mich. Math. J. 14 (1967), 453-465.

[8] Y. Nakamura, Any Hermitian matrix is a linear combination of four projections, to appear in Linear Algebra Appl..