数理解析研究所講究録
第 500 巻 1983 年 36-45

C^*-algebra の state の間の transition probability

北大 応電研 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

Uhlmann [14] により導入された state の間の transition probability の性質は，Alberti [1], [2]，Alberti - Uhlmann [3] また Raggio [12]，Araki - Raggio [6] 等で解明されて来た。これ等を概観する。

1. 定義と背景. 量子力学系の純粋状態は適当に設定された Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の unit vector x で表示される。状態 x_1 から状態 x_2 への transition probability としては $|(x_1, x_2)|^2$ を採用するのが妥当である. 観測の対象となるのは適当に定められた, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の C^*-(または von Neumann) subalgebra $\mathfrak{A}$ の元と考える. この時, 各純粋状態 x は $\mathfrak{A}$ 上の positive unital な汎関数 $X \longmapsto (Xx, x)$ をひきおこす. 一般の positive unital な汎関数は上の形のものの或る重みつき平均になるので, これ等は混合状態に対応すると考え, 一般に positive unital な汎関数を state と呼ぶ.

以下 $\mathfrak{A}$ を単位元 $\mathbb{1}$ をもつ C^*-algebra とし，φ_1 と φ_2 をその上の state とする．$\mathfrak{A}$ の unital な $*$-表現 π を考えよう．即ち，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\pi$ の $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ の中への $*$-表現である．このとき $\mathcal{H}_\pi$ の unit vector x_i $(i=1,2)$ が φ_i $(i=1,2)$ に対して条件 (#) を満すとは次のこととする．

$$(\#) \qquad \varphi_i(X) = (\pi(X)x_i, x_i) \qquad \forall X \in \mathfrak{A} \quad (i=1,2).$$

歴史的には Bures [7] は φ_1, φ_2 の距離を

$$\mathrm{dist}_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) := \inf_{\pi} \inf_{\substack{x_1, x_2 \\ (\#)}} \|x_1 - x_2\|$$

で定義した．これとの関連で Uhlmann [14] は φ_1 と φ_2 の間の transition probability を

$$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{\pi} \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ (\#)}} |(x_1, x_2)|^2$$

とした．すなわち $*$-表現で φ_1, φ_2 を pure state に移し可能な限り従来の transition probability を大きくするものを採用した．定義から明かに次が成り立つ

$$\mathrm{dist}_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2)^2 = 2\{1 - P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2)^{1/2}\}.$$

2. 多変量解析からの問題． 上のように対象の間の距離や重なり具合を極値で定義するのは，いろいろな分野で起る．その一例を多変量解析に見よう．

R^n 上の 2 つの分布関数 $\Phi_1(t_1, \cdots, t_n)$, $\Phi_2(t_1, \cdots, t_n)$ に対してその距離を Fréchet [10] は次の様に定義した． X_1, X_2 をそれ

ぞれ Φ_1, Φ_2 を分布関数にもつ（同じ確率空間上）の random n-vector とする，すなわち次の条件を満すものである．

$$(\star) \quad P\{X_{i,j} \le t_j \quad j=1,\cdots,n\} = \Phi_i(t_1,\cdots,t_n) \quad {}^\forall t_j \in R \quad i=1,2$$

ここで $X_1 = (X_{1,1},\cdots,X_{1,n})^t$, $X_2 = (X_{2,1},\cdots,X_{2,n})^t$ である．

$$\mathrm{dist}(\Phi_1,\Phi_2) = \inf_{X_1,X_2\,(\star)} \{\mathbf{E}|X_1 - X_2|^2\}^{1/2}.$$

明らかに

$$\mathbf{E}|X_1 - X_2|^2 = \mathbf{E}(X_1^* X_1) + \mathbf{E}(X_2^* X_2) - 2\,\mathbf{E}(X_2^* X_1)$$

で $\mathbf{E}(X_i^* X_i)$ は分布関数 Φ_i だけで定ってしまうが $\mathbf{E}(X_2^* X_1)$ は変りうる．従って $\sup\limits_{(\star)} \mathbf{E}(X_2^* X_1)$ が問題になるのだが，一般にこれを決定するのはむずかしい．しかし，次の様な特別の場合がある．これは Gaussian な random n-vector はその平均 vector と分散行列で決まってしまう事に由来する．

（簡単のために）Φ_1, Φ_2 を平均 vector $= 0$ の Gaussian 分布とする．この時 $n\times n$ 半正定値行列 $A := \mathbf{E}(X_1 \cdot X_1^*)$, $B = \mathbf{E}(X_2 \cdot X_2^*)$ は X_i $(i=1,2)$ が $(\star)$ を満すときは Φ_i $(i=1,2)$ により確定する．$C := \mathbf{E}(X_1 X_2^*)$ とすると $2n \times 2n$ 行列 $\begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix}$ は半正定値になる．逆に $A, B \ge 0$ を与えて，C が $\begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \ge 0$ を満足すると Gaussian な random $2n$-vector Z があり $\mathbf{E}(ZZ^*) = \begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix}$ となる．Z の先頭の n-component を X_1，末尾の n-component を X_2 とするとそれ等は共に Gaussian な random n-vector で X_1 の分布関数

がΦ_1，X_2の分布関数がΦ_2となる．従って，次が成り立つ．

$$\mathrm{dist}(\Phi_1,\Phi_2)^2 = tr(A) + tr(B) - 2 \sup_{\text{実}C,\ \begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \geq 0,} tr(C)$$

このことの関連で次の事が知られている．

定理 1.　A, B を半正定値（複素）$n\times n$ 行列とする．

(1)（Olkin - Pukelsheim [11], Dowson - Landau [8]）

$$\max_{\begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \geq 0} |tr(C)|^2 = tr((B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^2.$$

(2)（Flanders [9], Anderson - Olkin [4], Olkin - Pukelsheim [11]）

$$\inf_{S>0} tr(AS)\cdot tr(BS^{-1}) = \inf_{S>0} \left\{ \frac{tr(AS)+tr(BS^{-1})}{2} \right\}^2$$

$$= tr((B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^2.$$

3　transition probability の表示．定理1と関連して，C^*- algebra $\mathfrak{A}$ の２つの state φ_1, φ_2 の transition probability の *-表現をおもてに出さない intrinsic な表示を考えよう．

定理 2.（Alberti [1], [2]）

(1)

$$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1,\varphi_2) = \sup\left\{ |\psi(\mathbb{1})|^2 : \psi\in\mathfrak{A}^* \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \varphi_1(A^*A) & \psi(A^*B) \\ \psi(B^*A) & \varphi_2(B^*B) \end{bmatrix} \geq 0 \ \ {}^\forall A,B\in\mathfrak{A} \right\}$$

(2)

$$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1,\varphi_2) = \inf\{\varphi_1(S)\varphi_2(S^{-1}) : 0 < S\in\mathfrak{A}.\}$$

証明の概略を示す前に，この定理から導かれる幾つかの結果について述べよう．まず(1)より

系 1. 写像 $\{\varphi_1, \varphi_2\} \longmapsto P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2)^{1/2}$ は state の集合の直積の上で jointly concave，すなわち $0 \leq \lambda \leq 1$ のとき

$$P_{\mathfrak{A}}(\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_1', \lambda\varphi_2 + (1-\lambda)\varphi_2')^{1/2} \geq \lambda P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2)^{1/2} + (1-\lambda) P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1', \varphi_2')^{1/2}.$$

C^*-algebra の second dual $\mathfrak{A}^{**}$ は von Neumann algebra であり φ_1, φ_2 は $\mathfrak{A}^{**}$ 上の normal な state に拡大出来るが，

系 2. $P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = P_{\mathfrak{A}^{**}}(\varphi_1, \varphi_2)$.

次に，もう1つの C^*-algebra $\mathfrak{B}$ から $\mathfrak{A}$ への unital な positive linear map Φ が与えられた場合を考える．$\varphi_i \circ \Phi$ $(i=1,2)$ は $\mathfrak{B}$ の state になる．Φ に対する Kadison 型不等式の1つ $\Phi(S^{-1}) \geq \Phi(S)^{-1}$ を使うと，定理2の(2)より次が出る．

系 3. $\mathfrak{B} \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{A}$ が unital positive のとき

$$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) \leq P_{\mathfrak{B}}(\varphi_1\circ\Phi, \varphi_2\circ\Phi).$$

4. 定理2の(1)の証明の概略． 不等式 $\leq$ は容易である．すなわち，(#) を満す π, x_1, x_2 を考え $\psi(X) := (\pi(X)x_1, x_2)$ とすると，$(x_1, x_2) = \psi(\mathbb{1})$ で，また Schwartz の不等式から

$$|\psi(B^*A)|^2 \leq \|\pi(A)x_1\|^2 \|\pi(B)x_2\|^2 = \varphi_1(A^*A)\cdot\varphi_2(B^*B).$$

不等式 $\geq$ を見るため，(#)を満す π, x_1, x_2 を固定する．φ_1, φ_2 に対し問題の条件を満足する $\psi \in \mathfrak{A}^*$ は必ず $^\exists K$ s.t.

$\|K\| \leq 1$, $K \in \pi(\mathfrak{A})'$ commutant in $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_\pi)$ を使って

$$\psi(X) = (K\pi(X)x_1, x_2) \quad \forall X \in \mathfrak{A}$$

とかける。逆も真である。$\pi(\mathfrak{A})'$ で $\|K\| \leq 1$ のものは unitary の加重平均とかけるから，結局次がわかる

$$\sup\{|(Ux_1, x_2)|^2 : \underset{\text{unitary}}{U \in \pi(\mathfrak{A})'}\} = (1)\text{の右辺}.$$

明かに π, Ux_1, x_2 も (#) を満すから，$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) \geq (1)$の右辺 となる。∎

この証明から明かなように，

系4. (#) を満す π, x_1, x_2 をどの様にえらんでも

$$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \max\{|(Ux_1, x_2)|^2 : U \in \pi(\mathfrak{A})', \text{unitary}\}.$$

5. transition probability の具体的な計算。定理1に対応して次の様なことがわかる。

(a) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ のとき。φ_i は trace class operator $0 \leq A_i$ を使って $\varphi_i(X) = \mathrm{tr}(A_i X)$ $(i=1,2)$ とかける。$\mathcal{H}_\pi$ を Hilbert-Schmit class π を左からの multiplication x_i として $A_i^{1/2}$ をとると (#) がみたされる。この時 $\pi(\mathfrak{A})'$ は右からの multiplication の全体となり，系4より

$$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{U:\text{unitary}} |\mathrm{tr}(A_2^{1/2} A_1^{1/2} U)|^2 = \mathrm{tr}((A_2^{1/2} A_1 A_2^{1/2})^{1/2})^2.$$

(b) $^\exists$state φ $^\exists A_i \in \mathfrak{A}$ で $\varphi_i(X) = \varphi(A_i^* X A_i)$ $(i=1,2)$

と書け，更に $A_2^*A_1 \geq 0$ ならば，φ に関して GNS－表現 π を作り，$\varphi(X) = (\pi(X)x, x)$ $\forall X \in \mathfrak{A}$ とすると，$x_i = \pi(A_i)x$ として π, x_1, x_2 は $(\#)$ を満す．以下系4を使って

$$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi(A_2^* A_1)^2$$

がでる．　この特別な場合として

(c)　$0 \overset{\exists}{\leq} T \in \mathfrak{A}$ s.t. $\varphi_2(X) = \varphi_1(TXT)$ $\forall X \in \mathfrak{A}$ なら

$$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1(T)^2.$$

(d)　$\mathfrak{A}$ が可換な von Neumann algebra で $L^\infty(\Omega, \mu)$ $\mu(\Omega)=1$ と同一視されるとき，φ_1, φ_2 が $\mathfrak{A}$ の normal な state なら $L^\infty(\Omega, \mu)$ の上では $0 \leq f_i \in L^1(\Omega, \mu)$ で表現される，i.e. $\varphi_i(g) = \int g f_i \, d\mu$ $\forall g \in L^\infty(\Omega, \mu)$．この時 $\mathfrak{A} = L^\infty(\Omega, \mu)$ の $L^2(\Omega, \mu)$ の上の multiplication での表現 π を考えると x_i として $f_i^{1/2}$ をとると π, x_1, x_2 は $(\#)$ を満す．L^∞ が maximal Abelian より $\pi(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A})'$ となり，系4より

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2) &= \sup\left\{ \left| \int g f_1^{1/2} f_2^{1/2} d\mu \right|^2 : g \in L^\infty(\Omega, \mu) \text{ unimodular} \right\} \\ &= \left\{ \int f_1^{1/2} f_2^{1/2} d\mu \right\}^2. \end{aligned}$$

6.　<u>定理2の(2)の証明の概略．</u>　不等式 $\leq$ は(1)で $A = S^{1/2}$，$B = S^{-1/2}$ ととって $|\psi(\mathbb{1})|^2 = |\psi(S^{1/2}S^{-1/2})|^2 \leq \varphi_1(S)\varphi_2(S^{-1})$．逆の不等式を出すには系2を使って，density theorem を考

慮すると，$\mathfrak{A}$ は von Neumann algebra，φ_1, φ_2 は normal な state としてよい．また必要なら $0<\varepsilon<1$ を parameter として $\frac{\varphi_1+\varepsilon\varphi_2}{1+\varepsilon}$ を φ_1 の代りに考えることにより，φ_1 は最初から，$^{\exists}\alpha>0 \quad \alpha\varphi_1(X) \geq \varphi_2(X) \quad ^{\forall}0\leq X\in\mathfrak{A}$ と仮定してよい．

Sakai [13] の non-linear Radon-Nikodym theorem によれば $^{\exists}0\leq T\in\mathfrak{A}$ s.t. $\varphi_2(X)=\varphi_1(TXT) \quad ^{\forall}X\in\mathfrak{A}$.

従って (c) より $P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1,\varphi_2)=\varphi_1(T)^2$. T の spectral projection E_t は全て $\mathfrak{A}$ に属するので $\mathfrak{B}=$ v. Neumann alge spanned $\{E_t : t\in R\}$ とし，$\mu(t)=\varphi_1(E_t)$ として $\mathfrak{B}$ は $L^\infty(R_+,\mu)$ と考えられ．

φ_1 は $1\in L^1(R_+,\mu)$ でまた φ_2 は $t^2\in L^1(R_+,\mu)$ で表現されるので (d) より

$$P_{\mathfrak{B}}(\varphi_1,\varphi_2)=\left\{\int_{R^+} t\,d\mu(t)\right\}^2=\inf_{0<f\in L^\infty}\left\{\int t^2 f(t)^{-1}d\mu\right\}\left\{\int f(t)\,d\mu\right\}$$

従って

$$P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1,\varphi_2)=P_{\mathfrak{B}}(\varphi_1,\varphi_2)\geq\inf_{0<S\in\mathfrak{A}}\varphi_1(S)\varphi_2(S^{-1})$$

がでる．∎

7. transition probability と Radon-Nikodym 型定理

上では Sakai の Radon-Nikodym 型定理を利用して，transition probability の表示 (2) を求めたが，Araki [5] は逆に極値を与える π, x_1, x_2 に着目し，これから一般の Radon Nikodym 型定理を導出し，それに基いて Arak- Raggio [6]

は，$\mathfrak{A}$ が von Neumann algebra，φ_1, φ_2 が normal state のとき，可換な von Neumann subalgebra $\mathfrak{B}$ があり $P_{\mathfrak{B}}(\varphi_1, \varphi_2) = P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2)$ となることを示した．その基本的な考えは次のような所にある．π, x_1, x_2 で (#) を満し実際に $P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2)$ を attain するものとする，すなわち $P_{\mathfrak{A}}(\varphi_1, \varphi_2)^{1/2} = (x_1, x_2)$．この極値性から容易に，$(Sx_1, x_2) \geq 0 \quad \forall\, 0 \leq S \in \pi(\mathfrak{A})'$ が導かれる．（簡単のため x_1, x_2 を $\pi(\mathfrak{A})$ に関し cyclic，separating とすると）$Sx_1 \longmapsto Sx_2 \quad (\forall S \in \pi(\mathfrak{A})')$ は $\mathcal{H}_\pi$ で densely defined な symmetric positive な作用素となる．また $\pi(\mathfrak{A})'$ と可換である．この作用素の Friedrichs 拡大 T は（一般に unbounded）な positive selfadjoint 作用素でその spectral projection E_t は $\pi(\mathfrak{A})$ に入る．この時作り方から $\varphi_2(X) = \varphi_1(TXT) \quad \forall X \in \mathfrak{A}$ となる．以下，technical には少し複雑であるが，前と同様に議論できる．

8. 文献

[1] Alberti,P.M., Wachsende Ubergangswahrscheinlichkeiten und vollstandi positive stochastische Transformationen, Wiss. Zeit. Karl Marx Univ. 31(1982), Heft 1,3-10.

[2] Alberti,P.M., A note on the transition probability over C*-algebras, Lett. in Math. Phys. 7(1983), 25-33.

[3] Alberti,P.M. and A. Uhlmann, Stochastic linear maps and transition probability, Lett. in Math. Phys., 7(1983), 107-112.

[4] Anderson,T.W. and I. Olkin, An extremal problem for positive definite matrices, Linear and Multilinear Alg., 6(1978), 257-262.

[5] Araki,H., Bures distance furnction and a generalization of Sakai's non-commutative Radon-Nikodym theorem, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 8(1972/73), 335-362.

[6] Araki,H. and G.A. Raggio, A remark on transition probability, Lett. Math. Phys., 6(1982), 237-240.

[7] Bures,D., An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite W*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 135(1969), 119-212.

[8] Dowson,D.C. and B.V. Landau, The Frechet distance between multivariate normal distributions, J. Multivariate Anal., 12(1982), 450-455.

[9] Flanders,H., An extremal problem on the space of positive definite matrices, Linear and Multilinear Alg., 3(1975), 33-39.

[10] Fréchet,M., Sur la distance de deux lois de probabilite, C.R. Acad. Sci. Paris, 244(1957), 689-692.

[11] Olkin,I. and H. Pukelsheim, The distance between two random vectors with given dispersion matrices, Linear Alg. Appl., 48(1982), 257-263.

[12] Raggio,G.A., Comparison of Uhlmann's transition probability with the one induced by the natural psotive cone of von Neumann algebras in standard form, Lett. Math. Phys., 6(1982), 233-236.

[13] Sakai,S., A Radon-Nikodym theorem in W*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 71(1965), 149-151.

[14] Uhlmann,A., The 'transition probability' in the state space of a *-algebra, Rep. Math. Phys., 9(1976), 273-279.