数理解析研究所講究録
第500巻 1983年 70-79

Majorization と doubly stochastic map について

大阪府立桃谷高等学校 亀井栄三郎

I. 実ベクトル $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ に対し submajorization $a \gg b$ とは $\sum_{i=1}^{k} a_i^* \geq \sum_{i=1}^{k} b_i^*$, $1 \leqq \forall k \leqq n$. によって定められる。但し、$a_i^*$, b_i^* は a_i, b_i をそれぞれ大きいものから順次並べ変えたものとする。又、majorization $a \succ b$ とは、$a \gg b$ かつ $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$ となることである。[1] において、これらの概念はエルミット行列 A, B にまで拡張され、次のように定義されている。即ち submajorization $A \gg B$ とは、$\sigma(A) \gg \sigma(B)$ であり、majorization $A \succ B$ とは $\sigma(A) \succ \sigma(B)$ ということである。但し、$\sigma(A)$, $\sigma(B)$ はそれぞれ A, B の spectrum とする。

そこでこれらのことを更に Hilbert space 上の operator にまで拡張できないか、ということを考える。まず行列環 M_n の自然な拡張として、finite factor M 上で考える。M 上のエルミット元全体を M^h で表わし、τ を M 上の trace とする。

このとき Murray and von Neumann [9] は $A \in M^h$ に対して次のような関数を定義し、No. t の固有値と呼んでいる。

$$e_A(t) = \inf\{r ; \tau(E(r)) \geq t\}, \quad t \in [0,1]$$

但し、$A = \int r\, dE(r)$ とする。

これは、$[0,1]$ 上の単調増加、左連続関数で、丁度ベクトルの場合の並べ変えに相当している。更に $\tau(A) = \int_0^1 e_A(t)\,dt$ ということも知られている。

ところで、[5] において Chong は、probability space (X, μ) 上の measurable function f に対し、$d_f(s) = \mu\{x ; f(x) > s\}$, $f^*(t) = \inf\{s ; d_f(s) \leq t\}$ for $t \in [0,1]$ とし、(X, μ) 上の measurable functions f, g に対し、submajorization $f \gg g$ 及び majorization $f \succ g$ を次のように与えている。

$f \gg g$ であるとは $\int_0^s f^*(t)\,dt \geq \int_0^s g^*(t)\,dt$ for every s,

$f \succ g$ であるとは $f \gg g$ かつ $\int_0^1 f^*(t)\,dt = \int_0^1 g^*(t)\,dt$.

そこでこれを使って M^h の元 A, B に submajorization $A \gg B$ 及び majorization $A \succ B$ を次のように定義する。

定義 1. $A, B \in M^h$ に対し

$A \gg B$ であるとは $e_A(t) \gg e_B(t)$,

$A \succ B$ であるとは $e_A(t) \succ e_B(t)$ とする。

すぐにわかることであるが $A \gg B$ であることと $\int_s^1 e_A(t)\,dt \geq \int_s^1 e_B(t)\,dt$, $s \in [0,1]$, とは同値であり、又、$A \succ B$ であるこ

ことと $A \gg B$ かつ $\tau(A)=\tau(B)$ であることとは同値である。

このとき [1] において行列の場合に示されているのと同様の次の結果を得る [7]。

定理 1. 以下は同値

(1) $A \gg B$

(2) $\tau((A-r)^+) \geqq \tau((B-r)^+)$ for all $r \in \mathbb{R}$

(3) $\tau(f(A)) \geqq \tau(f(B))$ for any increasing convex function f on $[a,b]$, 但し $[a,b] \supset \sigma(A), \sigma(B)$, $f(\frac{1}{2}(A+B)) \leq \frac{1}{2}(f(A)+f(B))$.

定理 2. 以下は同値

(1) $A \succ B$

(2) $\tau(A)=\tau(B)$ かつ $\tau((A-r)^+) \geqq \tau((B-r)^+)$ for all $r \in \mathbb{R}$

(3) $\tau(|A-r|) \geqq \tau(|B-r|)$ for all $r \in \mathbb{R}$

(4) $\tau(f(A)) \geqq \tau(f(B))$ for any convex function f on $[a,b]$.

更に、$A \succ B$ の特徴づけとして次も得られる。但し $\|A\|_1=\tau(|A|)$, $U(A)=\{U^*AU ; U$ は M の unitary$\}$, co $U(A)$ は $U(A)$ の convex hull.

定理 3. 以下は同値

(1) $A \succ B$

(2) B は $\|\cdot\|_1$-closure of co $U(A)$ に属する.

(3) $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\|B-\sum C_i^*AC_i\|_1 < \varepsilon$ かつ $\sum C_i^*C_i = \sum C_iC_i^* = 1$ となる $\{C_i\}$ が存在する.

定理3の証明について, (2) ⇒ (3) ⇒ (1) は簡単な計算によっ

て得られる。(1)⇒(2)について証明の概略をのべる。その準備として、まず doubly stochastic matrix についてであるが、$n\times n$ 行列 $D=(x_{ij})$ が doubly stochastic matrix であるとは、

$$x_{ij}\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1$$ なるもののことである。

ベクトルが $a\succ b$ なる関係にあるとき doubly stochastic matrix D が存在して $b=Da$ となることは知られている。更に、doubly stochastic matrix について次の事も知られている。

Birkhoff の定理 ([8])

D を doubly stochastic matrix とする。このとき $D=\sum\lambda_i\rho_i$ となる。但し ρ_i は permutation matrix, $\lambda_i\geq 0$, $\sum\lambda_i=1$.

以上の準備のもとに証明に入いる。まず A, B に対し、それぞれ関数 $e_A(t)$, $e_B(t)$ を与える。次に区間 $[0,1]$ を n 等分分割し、$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$, $t_i-t_{i-1}=\frac{1}{n}$, $i=1,\cdots,n$ とする。次に $a_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}e_A(t)\,dt$, $b_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}e_B(t)\,dt$ とすれば、$a=(a_n,a_{n-1},\cdots,a_1)$, $b=(b_n,b_{n-1},\cdots,b_1)$ はベクトルとして $a\succ b$ となる。そこで、$b=Da$ なる doubly stochastic matrix D が存在する。Birkhoff の定理により、permutation matrices ρ_j が存在し、$b=\sum\lambda_j\rho_j a$, $\lambda_j\geq 0$, $\sum\lambda_j=1$, となることがわかる。次に M より projections $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ で $P_i\perp P_j$ $i\neq j$, $\sum P_i=1$, $\tau(P_i)=\frac{1}{n}$ をとり、$A_n=n\cdot\sum_{i=1}^{n}a_iP_i$, $B_n=n\cdot\sum_{i=1}^{n}b_iP_i$ とすると $P_i\sim P_j$, $i,j=1,\cdots,n$, であることより各 permutation matrix ρ に対し、$V_{i,\rho}^{*}\cdot V_{i,\rho}=P_i$ かつ $V_{i,\rho}\cdot V_{i,\rho}^{*}=P_{\rho(i)}$

for $\forall i$, を満たす partial isometry $V_{i,\rho}$ が存在する。よって各 ρ に対し $U_\rho = \sum_i V_{i,\rho}$ とすると U_ρ は unitary となる。そこで、上の各 permutation ρ_j に対し unitary U_j を対応させることで、$B_n = \sum_j \lambda_j U_j^* A U_j$ を得る。次に unitaries U, V をとり、$A_n' = UA_nU^*$ $B_n' = VB_nV^*$ で $\|A - A_n'\|_1 < \varepsilon$, $\|B - B_n'\|_1 < \varepsilon$ となるようにでき、$\|B - V(\sum \lambda_j U_j^* U^* A U U_j)V^*\|_1 < 2\varepsilon$ を得る。よって(1)⇒(2) の証明が得られるのであるが このU, Vのとり方については更に微細な議論を要する。

更に $A, B \in M^h$ に対し、同値関係 $A \approx B$ を $A \succ B$ かつ $B \succ A$ によって定義すると、次の関係が得られる。

定理 4. 以下は同値

(1) $A \approx B$

(2) $e_A(t) = e_B(t)$ for all $t \in \mathbb{R}$

(3) $E(r) \sim F(r)$ for all $r \in \mathbb{R}$, 但し $A = \int r\,dE(r)$, $B = \int r\,dF(r)$.

(4) $A \underset{a}{\simeq} B$.

ここで approximate equivalent $A \underset{a}{\simeq} B$ とは M の unitaries の列 $\{U_n\}$ が存在し、$\|U_n A U_n^* - B\| \to 0$ as $n \to \infty$ ということである。これは Voiculescu [10] が表現に対して与えた定義であるが Hadowin [6] は operator についても定義を与えている。

2. 次に doubly stochastic map について考える。[1] において M_n 上の linear map Φ が doubly stochastic であると

は、positive, unital, かつ trace-preserving なもの として定義されている。ここでは M 上の doubly stochastic map を次のように定義してやる。

定義 2. M 上の linear map Φ で $\Phi(1)=1$ なるものが、doubly stochastic であるとは、任意の $A\in M^h$ に対し、$A \succ \Phi(A)$ なるものを言う。

このとき 定理3 を用いることで、次を得る。

定理 5.

M 上の linear map Φ が doubly stochastic map であることと trace preserving, i.e. $\tau(\Phi(x))=\tau(x)$ for $\forall x\in M$, であることとは同値である。

更に、[1] と同様に 次も得ることができる。

定理 6.

$A, B\in M^h$ に対し、$A\succ B$ であることと M 上の completely positive な doubly stochastic map が存在して、$B=\Phi(A)$ となることとは同値である。

この証明についての概略について説明する。まず $CP(M,M)$ を M 上の unital completely positive map の全体とする。このとき Arveson [3] の定義した BW-topology に関して $CP(M,M)$ は compact となる。次に $W^*(B)$ を B で生成された von Neumann 環とし、Ψ を M から $W^*(B)$ への conditional expectation とする。

更に $S = co\{\Phi(U^{*}\cdot U) : U$ unitaries in $M\}$ の BW-closure とすれば S は $CP(M, M)$ の compact subset となる。次に定理3より $\|B - \sum \lambda_i U_i^{*} A U_i\|_1 < \frac{1}{n}$ となるように $\{U_i\}$ を選び $\Phi_n(\cdot) = \sum \lambda_i \Phi(U_i^{*} \cdot U_i)$ とすれば、$\{\Phi_n\}$ は集積点 Φ_0 を持ち、$\Phi_0(A) = B$ を満たすことがわかる。

次に Alberti and Uhlmann は、C^{*}-algebra $\mathfrak{A}$ の state space 上に次のような順序を導入している[2]。

$f, g \in S(\mathfrak{A})$ に対し、g が more mixed than f であるとは、g が weak-closure $co\{u^{*}fu : u$ は unitary in $\mathfrak{A}\}$, $u^{*}fu(x) = f(u^{*}xu)$.
そして $S(\mathfrak{A})$ 上の mapping Φ で、任意の $f \in S(\mathfrak{A})$ に対し、$f \succ \Phi f$ なるものを mixing enhancing と呼んでいる。

このとき doubly stochastic map と mixing enhancing map との関係は次のようになる。

定理 7.

Φ が M 上の doubly stochastic map であることと Φ^{*} が M の normal state space 上の mixing enhancing map であることとは同値である。

3. さて、M_n 上の majorization, doubly stochastic map を finite factor M にまで拡張した場合について見て来たのであるが、更にこれをエルミットという条件をはずし、Hilbert 空間 H 上の一般の operator にまで拡張できないか、という事につい

て考える。$A, B \in M_n^h$の場合 [1]において，$A \succ B$であることと $B = \sum \lambda_i U_i^* A U_i$，$\lambda_i \geq 0$，$\sum \lambda_i = 1$，$U_i$; unitary となることが同値であることが示されている。そこでこれをBが matricial range の convex hull に含まれている，と解釈する。matricial range は Parrot により the n-th spatial matricial range $V_n(T)$ が次のように与えられた[4]，

$$V_n(T) = \{V^* T V \,;\, V : \mathbb{C}^n \to H \text{ : isometries}\}$$

又，Arveson はこれに対して algebraic matricial range $W_n(T)$ を次の様に与えている[3]．

$$W_n(T) = \{\phi(T) \,;\, \phi \in CP(C^*(T), M_n)\}$$．ここで $C^*(T)$とは Tと1で生成された C^*-algebra とする。

これらを用いることで一般の operator に対し，次の様な順序を入れることができる。

$T \succ_n S$であるとは $co\,V_n(T) \supset co\,V_n(S)$ であるとし，

$T \gg_n S$であるとは $W_n(T) \supset W_n(S)$ とする。このとき

$T \succ_n S$ ならば $T \gg_n S$ となる，という関係が得られる。

又，M上の unital linear map Φで $co\,V_n(T) \supset co\,V_n(\Phi(T))$を満たすとき the n-th spatial d.s. map と呼び $W_n(T) \supset W_n(\Phi(T))$ を満たすとき the n-th algebraic d.s. map と呼ぶことにすると，

Φが the n-th spatial d.s. map ならば the n-th algebraic d.s. map ということが得られる。更に，ΦがM上の n-positive mapであることと the n-th algbraic d.s. map であることが同値であることもわかる。

今後の課題として，n を動かすことで completely d.s. map なるものなどを考え completely positive map との関連を見ること，更には operator valued range との関連をしらべることなどが考えられる。　以上。

参考文献

[1]. T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues, Lecture Note, Hokkaido Univ., 1982.

[2]. P. M. Alberti and A. Uhlmann, The order structure of states in C*- and W*-algebras. Proc. Int. Conf. on Operator Algebras, Ideals, and their Application in Theoretical Physics. Teubner Texte zur Mathematik, Leipzig 1978, p. 126.

[3] W. B. Arveson, Subalgebras of C*-algebras I-II, Acta Math. 123 (1969), 141-224., 128 (1972), 271-308.

[4] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges of Operators on Normed Space and of Elements of Normed Algebras, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 2. Cambridge Univ. Press London, (1971).

[5] . K. M. Chong, Some extensions of a theorem of Hardy, Littlewood

and Polya and their applications, Canad. J. Math., 26(1974) 1321–1340.

[6] D. W. Hadwin, An operator-valued spectrum, Indiana Univ. Math. J., 26(1977), 329–340.

[7] E. Kamei, Majorization in finite factors, Math. Japon., 28(1983).

[8] D. E. Knuth. A permanent inequality, Amer. Math. Soc. Monthly, 88(1981), 731–740.

[9] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, Ann. Math., 37(1936), 116–229.

[10] D. Voiculescu, A noncommutative Weyl-von Neumann theorem, Rev. Roum. Pure Appl., 21(1976), 97–113.