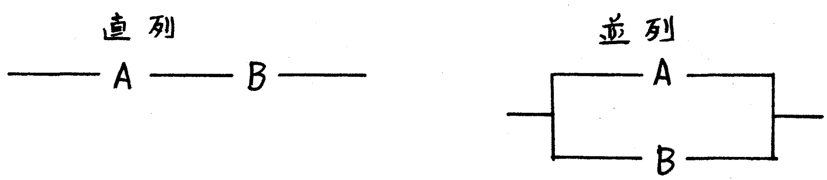
数理解析研究所講究録
第500巻 1983年 80-110

作用素平均に関連した不等式について

富山大 理 久保文夫
(Fumio Kubo)

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の非負定値(有界線型)作用素の組 A, B を考えます. A および B をそれぞれ, インピーダンスに持つような回路を直列あるいは並列に接続した回路のインピーダンスはそれぞれ, 作用素の和 $A+B$ および並列和 $A:B$ で与えられます. ここに, 非負定値



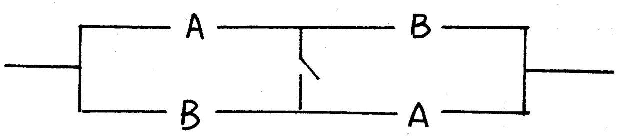
作用素の並列和は次のような極値問題(Maxwellの原理)の解として与えられます:

$$\langle (A:B)x \mid x \rangle = \inf_{y \in \mathcal{H}} \left\{ \langle A(x+y) \mid x+y \rangle + \langle By \mid y \rangle \right\}$$

このように接続された回路の消費エネルギーの間の大小関係のうち最も良く知られているのは

$$(1/2)(A+B) \geqq 2(A:B)$$

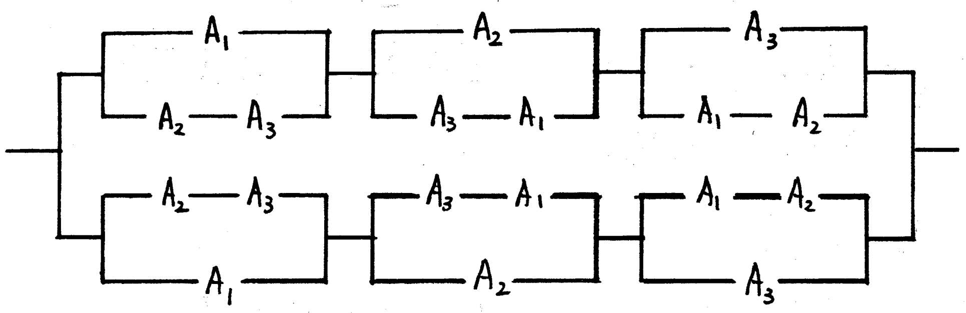
ですが，これは算術，調和の平均の間に成立つ不等式の一般化であり，回路的には次のスイッチを閉じた時（$2(A:B)$）より開いた時　（$(1/2)(A+B)$）の方が消費エネルギーが大きいことを示しています．



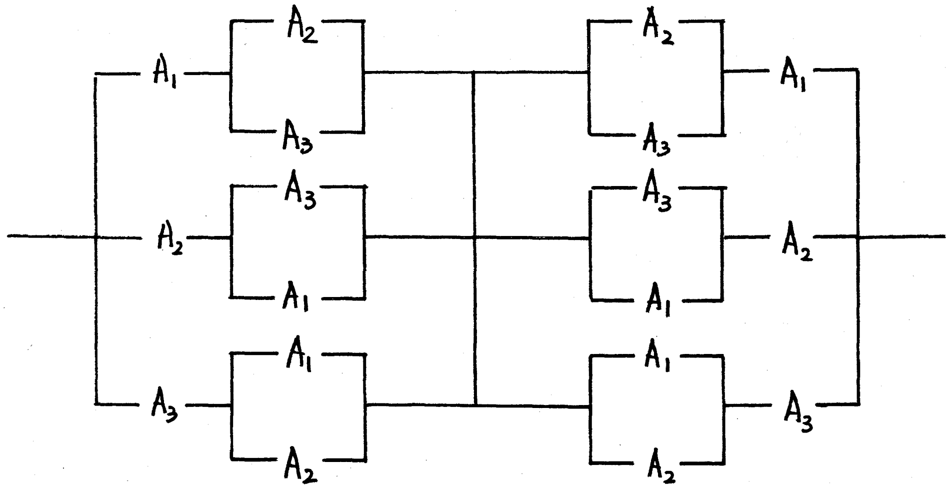
並列和も通常の和と同様に，結合律　を満すので，このn変数への拡張は自然に行われます．　また Duffin school の人達によってこうした研究は自然，その対称性に注目したものに移り，　Anderson, Morley, Trapp 達は　和と並列和即ち直列接続と並列接続とを組み合わせたいろいろな平均を帰納的に定義しました．　例えば　A_1, A_2, A_3 を3つの非負定値作用素とする時，次のように定義される作用素をインピーダンスに持つ回路を考えます．

$$T_{23} = (1/2)[\{A_1:(A_2+A_3)\}+\{A_2:(A_3+A_1)\}+\{A_3:(A_1+A_2)\}]$$

$$P_{23} = 2[\{A_1+(A_2:A_3)\}:\{A_2+(A_3:A_1)\}:\{A_3+(A_1:A_2)\}]$$



… T_{23}



..... P_{23}

この2つの接続のしかたは，単なる抵抗すなわち，A_1, A_2, A_3 が正の実数の場合には，回路のデルタ・スター変換により等価ですが，一般には，エネルギー不等式

$$\mathcal{P}_{23} \geqq P_{23}$$

が成立ちます．この不等式は安藤とAndersom, Morley, Trappにより独立に異った証明が与えられています．またその証明は不等式 $\mathcal{P}_{2m} \geqq P_{m-1\, m}$ を証明すべく拡張することができます．上の作用素は $\mathcal{P}_{13} = P_{13} = (1/3)(A_1 + A_2 + A_3)$ 及び $\mathcal{P}_{33} = P_{33} = 3(A_1 : A_2 : A_3)$ と一組になって不等式の完全系

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}_{13} & \geqq & \mathcal{P}_{23} & \geqq & \mathcal{P}_{33} \\ \parallel & & \rotatebox{-90}{$\geqq$} & & \parallel \\ P_{13} & \geqq & P_{23} & \geqq & P_{33} \end{array}$$

を満します．安藤は更に4個の非負定値作用素のつくる，こ

のような平均の間の不等式の完全系を証明しました.

本講演では，5個の非負定値作用素のつくる次のような平均の間の不等式を証明します.

$$
\begin{aligned}
&3T_{35} \\
&= (A_1:(1/2)((A_2:(A_3+A_4+A_5))+(A_3:(A_4+A_5+A_2))+(A_4:(A_5+A_2+A_3))+(A_5:(A_2+A_3+A_4))) \\
&\quad +(A_2:(1/2)((A_3:(A_4+A_5+A_1))+(A_4:(A_5+A_1+A_3))+(A_5:(A_1+A_3+A_4))+(A_1:(A_3+A_4+A_5))) \\
&\quad +(A_3:(1/2)((A_4:(A_5+A_1+A_2))+(A_5:(A_1+A_2+A_4))+(A_1:(A_2+A_4+A_5))+(A_2:(A_4+A_5+A_1))) \\
&\quad +(A_4:(1/2)((A_5:(A_1+A_2+A_3))+(A_1:(A_2+A_3+A_5))+(A_2:(A_3+A_5+A_1))+(A_3:(A_5+A_1+A_2))) \\
&\quad +(A_5:(1/2)((A_1:(A_2+A_3+A_4))+(A_2:(A_3+A_4+A_1))+(A_3:(A_4+A_1+A_2))+(A_4:(A_1+A_2+A_3)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_{35}/3 \\
&= (A_1+2((A_2+(A_3:A_4:A_5)):(A_3+(A_4:A_5:A_2)):(A_4+(A_5:A_2:A_3)):(A_5+(A_2:A_3:A_4))) \\
&\quad :(A_2+2((A_3+(A_4:A_5:A_1)):(A_4+(A_5:A_1:A_3)):(A_5+(A_1:A_3:A_4)):(A_1+(A_3:A_4:A_5))) \\
&\quad :(A_3+2((A_4+(A_5:A_1:A_2)):(A_5+(A_1:A_2:A_4)):(A_1+(A_2:A_4:A_5)):(A_2+(A_4:A_5:A_1))) \\
&\quad :(A_4+2((A_5+(A_1:A_2:A_3)):(A_1+(A_2:A_3:A_5)):(A_2+(A_3:A_5:A_1)):(A_3+(A_5:A_1:A_2))) \\
&\quad :(A_5+2((A_1+(A_2:A_3:A_4)):(A_2+(A_3:A_4:A_1)):(A_3+(A_4:A_1:A_2)):(A_4+(A_1:A_2:A_3)))
\end{aligned}
$$

定理　$T_{35} \geqq P_{35}$

証明　和も並列和も共に上半連続性を持つので，作用素 A_i $(i=1,2,\cdots,5)$ はそれぞれ有界な逆作用素を持つと仮定して十分である.　また Anderson, Morley, Trapp により

$$T_{35}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots, A_5^{-1}) = P_{35}(A_1, A_2, \cdots, A_5)^{-1}$$

が知られているので Schwarz の不等式より

$$\langle \mathcal{P}_{35}(A_1,\cdots,A_5)x|x\rangle + \langle \mathcal{P}_{35}(A_1^{-1},\cdots,A_5^{-1})y|y\rangle \geqq 2|\langle x|y\rangle|$$

が任意のベクトル $x,\ y \in \mathcal{H}$ に対して成立つことを示せば十分である.

並列和の極値表現に従って $3\langle \mathcal{P}_{35}(A_1,\cdots,A_5)x|x\rangle$ を次の25個のベクトル $x_i,\ x_{ij}$ $(1\leqq i,j\leqq 5,\ i\neq j)$ についての次の量の infimum としてあらわす.

$$\begin{aligned}
&\langle A_1(x+x_1)|x+x_1\rangle + (1/2)[\langle A_2(x_1+x_{12})|x_1+x_{12}\rangle + \langle A_3x_{12}|x_{12}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_4x_{12}|x_{12}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_5x_{12}|x_{12}\rangle \\
&\quad + \langle A_3(x_1+x_{13})|x_1+x_{13}\rangle + \langle A_4x_{13}|x_{13}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_5x_{13}|x_{13}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_2x_{13}|x_{13}\rangle \\
&\quad + \langle A_4(x_1+x_{14})|x_1+x_{14}\rangle + \langle A_5x_{14}|x_{14}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_2x_{14}|x_{14}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_3x_{14}|x_{14}\rangle \\
&\quad + \langle A_5(x_1+x_{15})|x_1+x_{15}\rangle + \langle A_2x_{15}|x_{15}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_3x_{15}|x_{15}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_4x_{15}|x_{15}\rangle] \\
&+ \langle A_2(x+x_2)|x+x_2\rangle + (1/2)[\langle A_3(x_2+x_{23})|x_2+x_{23}\rangle + \langle A_4x_{23}|x_{23}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_5x_{23}|x_{23}\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle A_1x_{23}|x_{23}\rangle
\end{aligned}$$

$$+\langle A_4(x_2+x_{24})\,|\,x_2+x_{24}\rangle + \langle A_5 x_{24}\,|\,x_{24}\rangle$$
$$+\langle A_1 x_{24}\,|\,x_{24}\rangle$$
$$+\langle A_3 x_{24}\,|\,x_{24}\rangle$$
$$+\langle A_5(x_2+x_{25})\,|\,x_2+x_{25}\rangle + \langle A_1 x_{25}\,|\,x_{25}\rangle$$
$$+\langle A_3 x_{25}\,|\,x_{25}\rangle$$
$$+\langle A_4 x_{25}\,|\,x_{25}\rangle$$
$$+\langle A_1(x_2+x_{21})\,|\,x_2+x_{21}\rangle + \langle A_3 x_{21}\,|\,x_{21}\rangle$$
$$+\langle A_4 x_{21}\,|\,x_{21}\rangle$$
$$+\langle A_5 x_{21}\,|\,x_{21}\rangle\Big]$$

$$+ -$$

$$+\langle A_5(x+x_5)\,|\,x+x_5\rangle + (1/2)\Big[\langle A_1(x_5+x_{51})\,|\,x_5+x_{51}\rangle + \langle A_2 x_{51}\,|\,x_{51}\rangle$$
$$+\langle A_3 x_{51}\,|\,x_{51}\rangle$$
$$+\langle A_4 x_{51}\,|\,x_{51}\rangle$$
$$+\langle A_2(x_5+x_{52})\,|\,x_5+x_{52}\rangle + \langle A_3 x_{52}\,|\,x_{52}\rangle$$
$$+\langle A_4 x_{52}\,|\,x_{52}\rangle$$
$$+\langle A_1 x_{52}\,|\,x_{52}\rangle$$
$$+\langle A_3(x_5+x_{53})\,|\,x_5+x_{53}\rangle + \langle A_4 x_{53}\,|\,x_{53}\rangle$$
$$+\langle A_1 x_{53}\,|\,x_{53}\rangle$$
$$+\langle A_2 x_{53}\,|\,x_{53}\rangle$$
$$+\langle A_4(x_5+x_{54})\,|\,x_5+x_{54}\rangle + \langle A_1 x_{54}\,|\,x_{54}\rangle$$
$$+\langle A_2 x_{54}\,|\,x_{54}\rangle$$

$+ \langle A_3 x_{54} | x_{54} \rangle]$.

同様に $3\langle \mathbb{P}_{35}(A_1^{-1}, \cdots, A_5^{-1}) y | y \rangle$ を 25個のベクトル y_i, y_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq 5, i \neq j)$ についての同様の量（A_i を A_i^{-1} に x_i を y_i に x_{ij} を y_{ij} におきかえたもの）の infimum としてあらわす. 従ってこの2つの量の和の2倍が

$$\geqq 2 \cdot 3 \cdot 2 |\langle x | y \rangle|$$

なることを示せば十分である. このベクトル（50個の）についての極値問題は視点を変えると「上の2つの量の和（の2倍）の正定値作用素 A_i $(1 \leqq i \leqq 5)$ についての infimum が $\geqq 12 \times |\langle x | y \rangle|$ である」という作用素についての極値問題に変換できる. これは次に示すような5個の Gram 行列 M_i $(1 \leqq i \leqq 5)$ の trace norm

$$\| M_i \| = \mathrm{tr}[(M_i^* M_i)^{1/2}]$$

の和について

$$2 \sum_1^5 \| M_i \| \geqq 12 |\langle x | y \rangle|$$

を主張することに他ならないことが Flanders の定理によりわかる. ここで Gram 行列 $\begin{bmatrix} \langle x_1 | y_1 \rangle & \langle x_1 | y_2 \rangle \\ \langle x_2 | y_1 \rangle & \langle x_2 | y_2 \rangle \end{bmatrix}$ を

$G\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ のようにあらわすと決めておくと, 行列 M_i は表1のように与えられる 17×17 行列である.

$$M_1 = G\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{2}(x+x_1) & \sqrt{2}(y+y_1) \\ x_2+x_{21} & y_2+y_{21} \\ x_3+x_{31} & y_3+y_{31} \\ x_4+x_{41} & y_4+y_{41} \\ x_5+x_{51} & y_5+y_{51} \\ x_{23} & y_{23} \\ x_{24} & y_{24} \\ x_{25} & y_{25} \\ x_{34} & y_{34} \\ x_{35} & y_{35} \\ x_{32} & y_{32} \\ x_{45} & y_{45} \\ x_{42} & y_{42} \\ x_{43} & y_{43} \\ x_{52} & y_{52} \\ x_{53} & y_{53} \\ x_{54} & y_{54} \end{array}\right) \qquad M_2 = G\left(\begin{array}{c|c} \sqrt{2}(x+x_2) & \sqrt{2}(y+y_2) \\ x_1+x_{12} & y_1+y_{12} \\ x_3+x_{32} & y_3+y_{32} \\ x_4+x_{42} & y_4+y_{42} \\ x_5+x_{52} & y_5+y_{52} \\ x_{13} & y_{13} \\ x_{14} & y_{14} \\ x_{15} & y_{15} \\ x_{34} & y_{34} \\ x_{35} & y_{35} \\ x_{31} & y_{31} \\ x_{45} & y_{45} \\ x_{41} & y_{41} \\ x_{43} & y_{43} \\ x_{51} & y_{51} \\ x_{53} & y_{53} \\ x_{54} & y_{54} \end{array}\right)$$

（表　1）

$$M_3 = G \begin{pmatrix} \sqrt{2}(x+x_3) & \sqrt{2}(y+y_3) \\ x_1+x_{13} & y_1+y_{13} \\ x_2+x_{23} & y_2+y_{23} \\ x_4+x_{43} & y_4+y_{43} \\ x_5+x_{53} & y_5+y_{53} \\ x_{12} & y_{12} \\ x_{14} & y_{14} \\ x_{15} & y_{15} \\ x_{24} & y_{24} \\ x_{25} & y_{25} \\ x_{21} & y_{21} \\ x_{45} & y_{45} \\ x_{41} & y_{41} \\ x_{42} & y_{42} \\ x_{51} & y_{51} \\ x_{52} & y_{52} \\ x_{54} & y_{54} \end{pmatrix} \qquad M_4 = G \begin{pmatrix} \sqrt{2}(x+x_4) & \sqrt{2}(y+y_4) \\ x_1+x_{14} & y_1+y_{14} \\ x_2+x_{24} & y_2+y_{24} \\ x_3+x_{34} & y_3+y_{34} \\ x_5+x_{54} & y_5+y_{54} \\ x_{12} & y_{12} \\ x_{13} & y_{13} \\ x_{15} & y_{15} \\ x_{23} & y_{23} \\ x_{25} & y_{25} \\ x_{21} & y_{21} \\ x_{35} & y_{35} \\ x_{31} & y_{31} \\ x_{32} & y_{32} \\ x_{51} & y_{51} \\ x_{52} & y_{52} \\ x_{53} & y_{53} \end{pmatrix}$$

(表 1) continued

$$M_5 = G\begin{pmatrix} \sqrt{2}(x+x_5) & \sqrt{2}(y+y_5) \\ x_1+x_{15} & y_1+y_{15} \\ x_2+x_{25} & y_2+y_{25} \\ x_3+x_{35} & y_3+y_{35} \\ x_4+x_{45} & y_4+y_{45} \\ x_{12} & y_{12} \\ x_{13} & y_{13} \\ x_{14} & y_{14} \\ x_{23} & y_{23} \\ x_{24} & y_{24} \\ x_{21} & y_{21} \\ x_{34} & y_{34} \\ x_{31} & y_{31} \\ x_{32} & y_{32} \\ x_{41} & y_{41} \\ x_{42} & y_{42} \\ x_{43} & y_{43} \end{pmatrix}$$

(表 1) continued.

$M=\sum_1^5 M_i$ とおくとノルムの三角不等式より,

$$2\|M\| \geqq 12|\langle x|y\rangle|$$

を示せば十分である. 更に trace norm についての duality

$$\|M\| = \sup_{\|S\|_\infty \leqq 1} |\mathrm{tr}(S^*M)|;$$

(但し $\|S\|_\infty$ は 行列 S の spectral norm (S^*Sの最大固有値)$^{1/2}$とする) より 次のような 17×17行列 $S=[S_{ij}]$ を求めればよいことになる:

$$|\mathrm{tr}(S^*M)| \geqq 6\|S\|_\infty |\langle x|y\rangle|.$$

$\mathrm{tr}(S^*M)$ に対し x_i, x_{ij}, y_i, y_{ij} $(1\leqq i,j\leqq 5,\ i\neq j)$ を含む内積を消去すべく S を選ぶ (表 2). 明らかに $S^*=S$ となり, 計算により,

$$\mathrm{tr}(S^*M) = 120(\langle x|y\rangle)$$

は容易に得られる. 従って S の spectral norm $\|S\|_\infty$ について $\|S\|_\infty = 20$ を示せば

十分である．以下はこの計算のためのものである．

次の(表3)は行列 S^2 を与えているが，これは行列 S の第一列が固有値 20 に属する固有ベクトルであることを示している．従って次の2つの不等式を示せば十分である：　$20I_{17}-S \geqq 0$　　$S+20I_{17} \geqq 0$.

(注) この2つの行列に対してSylvesterの定理によって左上の1×1 minorから順次右と下との一列一行を増してつくったminorが全て $(\geqq)$ 0であることを示せばよいが，(表4)のBasicプログラムの実行結果からわかるように実用的でない．(TOSHIBA IHC 8000，16Kビット仕様による)．従って部分的に対角化してSchur complementを作ってゆき，行列の要素は大きくせず行列のサイズを落してゆく方法をとる．

I)　$20I-S$　(表5)について．

1°	2行(列)	に	6, 7, 8	行(列)を加える
	3	〃	9, 10, 11	〃
	4	〃	12, 13, 14	〃
	5	〃	15, 16, 17	〃

$\Big\}$ ……(表6)

〃

2° (表6) の左上の diag(8, 80, 80, 80, 80) で Schur complement をとり, 4倍する ……(表 7)

3° (表7) の 12×12 行列は (これを F とおく) 全ての行(列)和が 0 だから $\det(20I-S)=0$. $20I-S$ の非負定値性は F の非負定値性と同値だから, F から 17行(列)を除いた F(17) の非負定値性を言えば十分.

4° F(17) の 6行(列)に 11行(列)を加える
7 13
8 15
9 〃 14 〃
11 12
13 16
14 15 ……(表 8)

5° (表8)の 7 10
8 〃 9 〃
13 14 ……(表 9)

6° 7, 8行(列)は全て 0 だから除いて diag(100, 100, 100) で Schur complement をとり, 4で割ると次の 6×6 行列を得る.

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

左上からの minor を順次求めると 12, 36, 576, 4608, 12288, 32768 と

なり，この 6×6 行列が正定値であることがわかる．

Ⅲ) S＋20I (表 10) について．

1° 2行(列)に 6, 7, 8 行(列)を加える
3 〃 9, 10, 11 〃
4 〃 12, 13, 14 〃
5 〃 15, 16, 17 〃 ……(表 11)

2° (表 11) の左上の diag(32, 80, 80, 80, 80) について Schur complement をとり 16 倍する ……(表 12)

3° (表 12) の 6 行(列) に 11 行(列) を加える
7 〃 13 〃
8 〃 15 〃
9 〃 14 〃
10 〃 16 〃
12 〃 17 〃 ……(表 13)

4° (表 13) の 6 行(列) から 12 行(列) を引く
7 〃 10 〃
8 〃 9 〃 ……(表 14)

5° (表 14) の左上の diag(320, 320, 320) について Schur complement をとる ……(表 15)

6° (表 15) の 9 行(列) から 14, 15 行(列) を引く
10 〃 13 16 〃
12 〃 11 17 〃 ……(表 16)

7° (表16)の 9行(列)に10行(列)を加える ‥‥(表17)

8° (表17)の 9行(列)は全て0だから除去，11行(列)と12行(列)を入替える. ‥‥(表18)

9° (表18)の左上 diag (192,192)について Schur complement をとる ‥‥(表19)

10° (表19)の 14行(列)から 15行(列)を引く
12 〃 に 13 を加える
17 〃 16 〃
‥‥(表20)

11° (表20)の 12行(列)から 17行(列)を引くと次の 4×4 行列を得る. 左上からの minor を順次求めると

$$\begin{bmatrix} 163 & -45 & 67 & 70 \\ -45 & 115 & -45 & -90 \\ 67 & -45 & 163 & 70 \\ 70 & -90 & 70 & 140 \end{bmatrix}$$

163, 16720, 2150400, 1228800 となりこの4×4行列が正定値であることがわかる. (証明終り)

(注意) 短期共同研究終了後数日して，北大応電研の中村美浩氏より，行列 S の固有値全てと固有ベクトルの表が送られて来ました. それによっても $\|S\|_\infty = 20$ がわかることを付け加えます.

The matrix S.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	12	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
2	$-3\sqrt{2}$	-6	4	4	4	2	2	2	-3	-3	2	-3	2	-3	2	-3	-3
3	$-3\sqrt{2}$	4	-6	4	4	2	-3	-3	2	2	2	-3	-3	2	-3	2	-3
4	$-3\sqrt{2}$	4	4	-6	4	-3	2	-3	2	-3	-3	2	2	2	-3	-3	2
5	$-3\sqrt{2}$	4	4	4	-6	-3	-3	2	-3	2	-3	2	-3	-3	2	2	2
6	$\sqrt{2}$	2	2	-3	-3	2	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6
7	$\sqrt{2}$	2	-3	2	-3	-2	2	-2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2
8	$\sqrt{2}$	2	-3	-3	2	-2	-2	2	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1
9	$\sqrt{2}$	-3	2	2	-3	-1	-2	6	2	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2
10	$\sqrt{2}$	-3	2	-3	2	-1	6	-2	-2	2	-2	-2	6	-1	-1	0	-1
11	$\sqrt{2}$	2	2	-3	-3	0	-1	-1	-2	-2	2	6	-2	-1	-2	-1	6
12	$\sqrt{2}$	-3	-3	2	2	6	-1	-2	-1	-2	6	2	-2	-2	-1	-1	0
13	$\sqrt{2}$	2	-3	2	-3	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	2	-2	-2	6	-1
14	$\sqrt{2}$	-3	2	2	-3	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	2	6	-2	-1
15	$\sqrt{2}$	2	-3	-3	2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6	2	-2	-2
16	$\sqrt{2}$	-3	2	-3	2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	2	-2
17	$\sqrt{2}$	-3	-3	2	2	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	2

(表 2)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	240	-60r2	-60r2	-60r2	-60r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2	20r2
2	-60r2	180	-20	-20	-20	-60	-60	-60	40	40	-60	40	-60	40	-60	40	40
3	-60r2	-20	180	-20	-20	-60	40	40	-60	-60	-60	40	40	-60	40	-60	40
4	-60r2	-20	-20	180	-20	40	-60	40	-60	40	40	-60	-60	-60	40	40	-60
5	-60r2	-20	-20	-20	180	40	40	-60	40	-60	40	-60	40	40	-60	-60	-60
6	20r2	-60	-60	40	40	124	-40	-40	-28	-28	116	20	-28	-32	-28	-32	20
7	20r2	-60	40	-60	40	-40	124	-40	-32	20	-28	-28	116	-28	-28	20	-32
8	20r2	-60	40	40	-60	-40	-40	124	20	-32	-28	-32	-28	20	116	-28	-28
9	20r2	40	-60	-60	40	-28	-32	20	124	-40	-40	-28	-28	116	20	-28	-32
10	20r2	40	-60	40	-60	-28	20	-32	-40	124	-40	-32	20	-28	-28	116	-28
11	20r2	-60	-60	40	40	116	-28	-28	-40	-40	124	20	-32	-28	-32	-28	20
12	20r2	40	40	-60	-60	20	-28	-32	-28	-32	20	124	-40	-40	-28	-28	116
13	20r2	-60	40	-60	40	-28	116	-28	-28	20	-32	-40	124	-40	-32	20	-28
14	20r2	40	-60	-60	40	-32	-28	20	116	-28	-28	-40	-40	124	20	-32	-28
15	20r2	-60	40	40	-60	-28	-28	116	20	-28	-32	-28	-32	20	124	-40	-40
16	20r2	40	-60	40	-60	-32	20	-28	-28	116	-28	-28	20	-32	-40	124	-40
17	20r2	40	40	-60	-60	20	-32	-28	-32	-28	20	116	-28	-28	-40	-40	124

(表 3)

```
100 N=17
110 DIM A(N,N), B(N)
120 FOR I=1 TO N
130 FOR J=1 TO N
140 READ A(I,J)
150 NEXT J
160 NEXT I
170 L=1:K=2
180 X1=1
190 IF A(L,L)=0 THEN L1=L1+1:GOTO 360
200 Y=A(L,L)
210 FOR J=L TO N
220 A(L,J)=A(L,J)/Y
230 NEXT J
240 FOR I=K TO N
250 X=A(I,L)
260 FOR J=K TO N
270 A(I,J)=A(I,J)-A(L,J)*X
280 NEXT J:NEXT I
290 L=L+1
300 K=K+1
310 X1=X1*Y
320 IF L<N THEN 190
330 X1=X1*A(N,N)
340 LPRINT "DET=";X1
350 END
360 IF L1>N THEN 440
370 If A(L1,L)=0 THEN L1=L1+1:GOTO 360
380 FOR J=L TO N
390 B(J)=A(L1,j)
400 A(L1,J)=A(L,J)
410 A(L,J)=-B(J)
420 NEXT J
430 GOTO 200
440 X1=0:GOTO 340
```

20-SをAと読ませた結果は

DET=-1.762299094 E-09

となるが，後で示す通り真の値は 0 である．これは $\sqrt{2}$ を有理近似した時の誤差に加えて，途中の丸め誤差のためと思われる．

このように数値実験では実用性に乏しい．

(表 4)

The matrix 20I - S

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	8	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	$3\sqrt{2}$	26	-4	-4	-4	-2	-2	-2	3	3	-2	3	-2	3	-2	3	3
3	$3\sqrt{2}$	-4	26	-4	-4	-2	3	3	-2	-2	-2	3	3	-2	3	-2	3
4	$3\sqrt{2}$	-4	-4	26	-4	3	-2	3	-2	3	3	-2	-2	-2	3	3	-2
5	$3\sqrt{2}$	-4	-4	-4	26	3	3	-2	3	-2	3	-2	3	3	-2	-2	-2
6	$-\sqrt{2}$	-2	-2	3	3	18	2	2	1	1	0	-6	1	2	1	2	-6
7	$-\sqrt{2}$	-2	3	-2	3	2	18	2	2	-6	1	1	0	1	1	-6	2
8	$-\sqrt{2}$	-2	3	3	-2	2	2	18	-6	2	1	2	1	-6	0	1	1
9	$-\sqrt{2}$	3	-2	-2	3	1	2	-6	18	2	2	1	1	0	-6	1	2
10	$-\sqrt{2}$	3	-2	3	-2	1	-6	2	2	18	2	2	-6	1	1	0	1
11	$-\sqrt{2}$	-2	-2	3	3	0	1	1	2	2	18	-6	2	1	2	1	-6
12	$-\sqrt{2}$	3	3	-2	-2	-6	1	2	1	2	-6	18	2	2	1	1	0
13	$-\sqrt{2}$	-2	3	-2	3	1	0	1	1	-6	2	2	18	2	2	-6	1
14	$-\sqrt{2}$	3	-2	-2	3	2	1	-6	0	1	1	2	2	18	-6	2	1
15	$-\sqrt{2}$	-2	3	3	-2	1	1	0	-6	1	2	1	2	-6	18	2	2
16	$-\sqrt{2}$	3	-2	3	-2	2	-6	1	1	0	1	1	-6	2	2	18	2
17	$-\sqrt{2}$	3	3	-2	-2	-6	2	1	2	1	-6	0	1	1	2	2	18

(表 5)

	1	2 +6+7+8	3 +9+10+11	4 +12+13+14	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	8	0	0	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	0	80	0	0	0	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	80	0	0	0	0	0	20	20	20	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	80	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20	0	0	0
5	0	0	0	0	80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20
6	$-\sqrt{2}$	20	0	0	0	18	2	2	1	1	0	-6	1	2	1	2	-6
7	$-\sqrt{2}$	20	0	0	0	2	18	2	2	-6	1	1	0	1	1	-6	2
8	$-\sqrt{2}$	20	0	0	0	2	2	18	-6	2	1	2	1	-6	0	1	1
9	$-\sqrt{2}$	0	20	0	0	1	2	-6	18	2	2	1	1	0	-6	1	2
10	$-\sqrt{2}$	0	20	0	0	1	-6	2	2	18	2	2	-6	1	1	0	1
11	$-\sqrt{2}$	0	20	0	0	0	1	1	2	2	18	-6	2	1	2	1	-6
12	$-\sqrt{2}$	0	0	20	0	-6	1	2	1	2	-6	18	2	2	1	1	0
13	$-\sqrt{2}$	0	0	20	0	1	0	1	1	-6	2	2	18	2	2	-6	1
14	$-\sqrt{2}$	0	0	20	0	2	1	-6	0	1	1	2	2	18	-6	2	1
15	$-\sqrt{2}$	0	0	0	20	1	1	0	-6	1	2	1	2	-6	18	2	2
16	$-\sqrt{2}$	0	0	0	20	2	-6	1	1	0	1	1	-6	2	2	18	2
17	$-\sqrt{2}$	0	0	0	20	-6	2	1	2	1	-6	0	1	1	2	2	18

(表6)

17

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6						51	-13	-13	3	3	-1	-25	3	7	3	7	-25
7						-13	51	-13	7	-25	3	3	-1	3	3	-25	7
8						-13	-13	51	-25	7	3	7	3	-25	-1	3	3
9						3	7	-25	51	-13	-13	3	3	-1	-25	3	7
10						3	-25	7	-13	51	-13	7	-25	3	3	-1	3
11						-1	3	3	-13	-13	51	-25	7	3	7	3	-25
12						-25	3	7	3	7	-25	51	-13	-13	3	3	-1
13						3	-1	3	3	-25	7	-13	51	-13	7	-25	3
14						7	3	-25	-1	3	3	-13	-13	51	-25	7	3
15						3	3	-1	-25	3	7	3	7	-25	51	-13	-13
16						7	-25	3	3	-1	3	3	-25	7	-13	51	-13
17						-25	7	3	7	3	-25	-1	3	3	-13	-13	51

(表 7)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6						100	0	0	0	0	0	-50	20	20	10	10	
7						0	100	0	0	-100	0	-10	0	0	10	-50	
8						0	0	100	-100	0	20	10	0	0	50	-10	
9						0	0	-100	100	0	-20	-10	0	0	-50	10	
10						0	-100	0	0	100	0	10	0	0	-10	50	
11					11+12	0	0	20	-20	0	52	26	0	0	10	6	
12						-50	-10	10	-10	10	26	51	-10	-10	3	3	
13					13+16	20	0	0	0	0	0	-10	52	-12	-6	26	
14					14+15	20	0	0	0	0	0	-10	-12	52	26	-6	
15						10	10	50	-50	-10	10	3	-6	26	51	-13	
16						10	-50	-10	10	50	6	3	26	-6	-13	51	
17																	

(表 8)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6						100	0	0	0	0	0	-50	40	20	10	10	
7					7+10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8					8+9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9						0	0	0	100	0	-20	-10	0	0	-50	10	
10						0	0	0	0	100	0	10	0	0	-10	50	
11						0	0	0	-20	0	52	26	0	0	10	6	
12						-50	0	0	-10	10	26	51	-20	-10	3	3	
13					13+14	40	0	0	0	0	0	-20	80	40	20	20	
14						20	0	0	0	0	0	-10	40	52	26	-6	
15						10	0	0	-50	-10	10	3	20	26	51	-13	
16						10	0	0	10	50	6	3	20	-6	-13	51	
17																	

(表9)

The matrix S-(-20)I

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	32	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
2	$-3\sqrt{2}$	14	4	4	4	2	2	2	-3	-3	2	-3	2	-3	2	-3	-3
3	$-3\sqrt{2}$	4	14	4	4	2	-3	-3	2	2	2	-3	-3	2	-3	2	-3
4	$-3\sqrt{2}$	4	4	14	4	-3	2	-3	2	-3	-3	2	2	2	-3	-3	2
5	$-3\sqrt{2}$	4	4	4	14	-3	-3	2	-3	2	-3	2	-3	-3	2	2	2
6	$\sqrt{2}$	2	2	-3	-3	22	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6
7	$\sqrt{2}$	2	-3	2	-3	-2	22	-2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2
8	$\sqrt{2}$	2	-3	-3	2	-2	-2	22	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1
9	$\sqrt{2}$	-3	2	2	-3	-1	-2	6	22	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2
10	$\sqrt{2}$	-3	2	-3	2	-1	6	-2	-2	22	-2	-2	6	-1	-1	0	-1
11	$\sqrt{2}$	2	2	-3	-3	0	-1	-1	-2	-2	22	6	-2	-1	-2	-1	6
12	$\sqrt{2}$	-3	-3	2	2	6	-1	-2	-1	-2	6	22	-2	-2	-1	-1	0
13	$\sqrt{2}$	2	-3	2	-3	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	22	-2	-2	6	-1
14	$\sqrt{2}$	-3	2	2	-3	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	22	6	-2	-1
15	$\sqrt{2}$	2	-3	-3	2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6	22	-2	-2
16	$\sqrt{2}$	-3	2	-3	2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	22	-2
17	$\sqrt{2}$	-3	-3	2	2	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	22

(表 10).

	1	2 +6+7+8	3 +9+10+11	4 +12+13+14	5 +15+16+17	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	32	0	0	0	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
2	0	80	0	0	0	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	80	0	0	0	0	0	20	20	20	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	80	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20	0	0	0
5	0	0	0	0	80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20
6	$\sqrt{2}$	20	0	0	0	22	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6
7	$\sqrt{2}$	20	0	0	0	-2	22	-2	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2
8	$\sqrt{2}$	20	0	0	0	-2	-2	22	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1
9	$\sqrt{2}$	0	20	0	0	-1	-2	6	22	-2	-2	-1	-1	0	6	-1	-2
10	$\sqrt{2}$	0	20	0	0	-1	6	-2	-2	22	-2	-2	6	-1	-1	0	-1
11	$\sqrt{2}$	0	20	0	0	0	-1	-1	-2	-2	22	6	-2	-1	-2	-1	6
12	$\sqrt{2}$	0	0	20	0	6	-1	-2	-1	-2	6	22	-2	-2	-1	-1	0
13	$\sqrt{2}$	0	0	20	0	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	22	-2	-2	6	-1
14	$\sqrt{2}$	0	0	20	0	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	22	6	-2	-1
15	$\sqrt{2}$	0	0	0	20	-1	-1	0	6	-1	-2	-1	-2	6	22	-2	-2
16	$\sqrt{2}$	0	0	0	20	-2	6	-1	-1	0	-1	-1	6	-2	-2	22	-2
17	$\sqrt{2}$	0	0	0	20	6	-2	-1	-2	-1	6	0	-1	-1	-2	-2	22

(表 11)

diag (32, 80, 80, 80, 80)

```
1 1 271
1 2 -113
1 3 -113
2 1 -113
2 2 271
2 3 -113
3 1 -113
3 2 -113
3 3 271
DET= 6635520
1 1 271
1 2 -113
1 3 -113
1 4 -17
2 1 -113
2 2 271
2 3 -113
2 4 -33
3 1 -113
3 2 -113
3 3 271
3 4 95
4 1 -17
4 2 -33
4 3 95
4 4 271
DET= 1530593280
1 1 271
1 2 -113
1 3 -113
1 4 -17
1 5 -17
2 1 -113
2 2 271
2 3 -113
2 4 -33
2 5 95
3 1 -113
3 2 -113
3 3 271
3 4 95
3 5 -33
4 1 -17
4 2 -33
4 3 95
4 4 271
4 5 -113
5 1 -17
5 2 95
5 3 -33
5 4 -113
5 5 271
DET= 2.717908992E+11
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6						271	-113	-113	-17	-17	-1	95	-17	-33	-17	-33	95
7						-113	271	-113	-33	95	-17	-17	-1	-17	-17	95	-33
8						-113	-113	271	95	-33	-17	-33	-17	95	-1	-17	-17
9						-17	-33	95	271	-113	-113	-17	-17	-1	95	-17	-33
10						-17	95	-33	-113	271	-113	-33	95	-17	-17	-1	-17
11						-1	-17	-17	-113	-113	271	95	-33	-17	-33	-17	95
12						95	-17	-33	-17	-33	95	271	-113	-113	-17	-17	-1
13						-17	-1	-17	-17	95	-33	-113	271	-113	-33	95	-17
14						-33	-17	95	-1	-17	-17	-113	-113	271	95	-33	-17
15						-17	-17	-1	95	-17	-33	-17	-33	95	271	-113	-113
16						-33	95	-17	-17	-1	-17	-17	95	-33	-113	271	-113
17						95	-33	-17	-33	-17	95	-1	-17	-17	-113	-113	271

(表 12)

15	6	-50
15	7	-50
15	8	270
15	9	190
15	10	-130
15	11	-33
15	12	-130
15	13	-33
15	14	95
15	15	271
15	16	-113
15	17	-113
16	6	-50
16	7	190
16	8	-130
16	9	-50
16	10	270
16	11	-17
16	12	-130
16	13	95
16	14	-33
16	15	-113
16	16	271
16	17	-113
17	6	190
17	7	-50
17	8	-130
17	9	-50
17	10	-130
17	11	95
17	12	270
17	13	-17
17	14	-17
17	15	-113
17	16	-113
17	17	271

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1														
2														
3														
4														
5			6+11	7+13	8+15	9+14	10+16		12+17					
6		6+11	540	-180	-180	-180	-180	270	380	-50	-50	-50	-50	190
7		7+13	-180	540	-180	-180	380	-50	-180	270	-130	-50	190	-50
8		8+15	-180	-180	540	380	-180	-50	-180	-50	190	270	-130	-130
9		9+14	-180	-180	380	540	-180	-130	-180	-130	270	190	-50	-50
10		10+16	-180	380	-180	-180	540	-130	-180	190	-50	-130	270	-130
11			270	-50	-50	-130	-130	271	190	-33	-17	-33	-17	95
12		12+17	380	-180	-180	-180	-180	190	540	-130	-130	-130	-130	270
13			-50	270	-50	-130	190	-33	-130	271	-113	-33	95	-17
14			-50	-130	190	270	-50	-17	-130	-113	271	95	-33	-17
15			-50	-50	270	190	-130	-33	-130	-33	95	271	-113	-113
16			-50	190	-130	-50	270	-17	-130	95	-33	-113	271	-113
17			190	-50	-130	-50	-130	95	270	-17	-17	-113	-113	271

(表 13)

1	2	3
6	6	320
6	7	0
6	8	0
6	9	0
6	10	0
6	11	80
6	12	-160
6	13	80
6	14	80
6	15	80
6	16	80
6	17	-80
7	6	0
7	7	320
7	8	0
7	9	0
7	10	-160
7	11	80
7	12	0
7	13	80
7	14	-80
7	15	80
7	16	-80
7	17	80
8	6	0
8	7	0
8	8	320
8	9	-160
8	10	0
8	11	80
8	12	0
8	13	80
8	14	-80
8	15	80
8	16	-80
8	17	-80

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5						6-12	7-10	8-9									
6					6-12	320	0	0	0	0	80	-160	80	80	80	80	-80
7					7-10	0	320	0	0	-160	80	0	80	-80	80	-80	80
8					8-9	0	0	320	-160	0	80	0	80	-80	80	-80	-80
9						0	0	-160	540	-180	-130	-180	-130	270	190	-50	-50
10						0	-160	0	-180	540	-130	-180	190	-50	-130	270	-130
11						80	80	80	-130	-130	271	190	-33	-17	-33	-17	95
12						-160	0	0	-180	-180	190	540	-130	-130	-130	-130	270
13						80	80	80	-130	190	-33	-130	271	-113	-33	95	-17
14						80	-80	-80	270	-50	-17	-130	-113	271	95	-33	-17
15						80	80	80	190	-130	-33	-130	-33	95	271	-113	-113
16						80	-80	-80	-50	270	-17	-130	95	-33	-113	271	-113
17						-80	80	-80	-50	-130	95	270	-17	-17	-113	-113	271

(表 14)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9									460	-180	-90	-180	-90	230	230	-90	-90
10									-180	460	-90	-180	230	-90	-90	230	-90
11									-90	-90	211	230	-93	3	-93	3	115
12									-180	-180	230	460	-90	-90	-90	-90	230
13									-90	230	-93	-90	211	-93	-93	115	3
14									230	-90	3	-90	-93	211	115	-93	3
15									230	-90	-93	-90	-93	115	211	-93	-93
16									-90	230	3	-90	115	-93	-93	211	-93
17									-90	-90	115	230	3	3	-93	-93	211

(表15)

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9 14-15	192	-192	0	0	96	-96	-96	96	0
10 -13-16	-192	192	0	0	-96	96	96	-96	0
11	0	0	211	-96	-93	3	-93	3	115
12 -11-17	0	0	-96	192	0	-96	96	0	-96
13	96	-96	-93	0	211	-93	-93	115	3
14	-96	96	3	-96	-93	211	115	-93	3
15	-96	96	-93	96	-93	115	211	-93	-93
16	96	-96	3	0	115	-93	-93	211	-93
17	0	0	115	-96	3	3	-93	-93	211

(表16)

9

	9 +10	10	11	12	13	14	15	16	17
9 +10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	192	0	0	-96	96	96	-96	0
11	0	0	211	-96	-93	3	-93	3	115
12	0	0	-96	192	0	-96	96	0	-96
13	0	-96	-93	0	211	-93	-93	115	3
14	0	96	3	-96	-93	211	115	-93	3
15	0	96	-93	96	-93	115	211	-93	-93
16	0	-96	3	0	115	-93	-93	211	-93
17	0	0	115	-96	3	3	-93	-93	211

(表17)

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9									
10		192	0	0	-96	+96	96	-96	0
11		0	192	-96	0	-96	96	0	-96
12		0	-96	211	-93	3	-93	3	115
13		-96	0	-93	211	-93	-93	115	3
14		96	-96	3	-93	211	115	-93	3
15		96	96	-93	-93	115	211	-93	-93
16		-96	0	3	115	-93	-93	211	-93
17		0	-96	115	3	3	-93	-93	211

(式18)

	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9									
10									
11									
12				163	-93	-45	-45	3	67
13				-93	163	-45	-45	67	3
14				-45	-45	115	115	-45	-45
15				-45	-45	115	115	-45	-45
16				3	67	-45	-45	163	-93
17				67	3	-45	-45	-93	163

(式19)

	12	13	14	15	16	17
12	140	70	0	-90	70	140
13	70	163	0	-45	70	140
14	0	0	0	0	0	0
15	-90	-45	0	115	-45	-90
16	70	67	0	-45	163	70
17	140	70	0	-90	70	140

（表 20）