数理解析研究所講究録
第500巻 1983年 111-123

可逆作用素の集合の構造について

富山大 教育 泉野佐一 (Saichi Izumino)

1. 序. 可逆作用素の取り扱いは広くBanach空間上でもよいが，ここでは(可分な)Hilbert空間上に限りたい。Hilbert空間H上の有界線形作用素の全体をB(H)，その中で可逆な元の全体を$\mathfrak{G}$とする。$\mathfrak{G}$はB(H)の極大な群であり連結なことなどはよく知られている。ここでは

$\mathfrak{G}$の(ノルム)閉包$\overline{\mathfrak{G}}$,

$\mathfrak{G}$の境界$\partial\mathfrak{G}$,

$\overline{\mathfrak{G}}$の内部$(\overline{\mathfrak{G}})^\circ$,

$\overline{\mathfrak{G}}$の境界$\partial\overline{\mathfrak{G}}$

などの幾何的，代数的構造についていくつかの結果を示したい。なお本稿の内容の多くは加藤佳宣氏より伝えられたものであり，同氏に心から謝意を表したい。

$\overline{\mathfrak{G}}$の研究としては最初と思われるKadison-Feldman [3] (1954)があるがこれは次のようなものである:

$A \in \overline{\mathcal{G}} \iff$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の(1)―(3)を満たす閉部分空間 $M \subset H$ が存在する.

(1) $\ker A \subset M$.

(2) $\sup\{\|Ax\| : x \in M,\ \|x\| = 1\} < \varepsilon$.

(3) $\dim M = \dim (AM^{\perp})^{\perp}$.

Beutler[1] (1965) は作用素 A が閉値域をもつとき

$\dim \ker A = \dim \ker A^{*} \iff \exists B \in \mathcal{G}\ (B_1 \in \mathcal{G})$ と orth. proj. $P\ (P_1)$ を使って $A = PB\ (= B_1 P_1)$

を示した。実はこれは $A \in \overline{\mathcal{G}}$ なる条件に外ならない(定理4.2)。また Kelly-Hogan[7] (1972) は conservative operator の方向から $\overline{\mathcal{G}}$ の研究を行っている。最近では Treese-Kelly [9] (1977) は $\partial\mathcal{G}$ の元の characterization を行っている。その他 Bouldin [2], 筆者[5] 等の研究があり 1 つの作用素から $\overline{\mathcal{G}}$ までの距離公式などが得られている。ここではこれらについて更に進んだいくつかの考察を進めたい。なお $\overline{\mathcal{G}}$ はいうまでもなく単位元をもつ半群であり この方面からのいろいろの考察がなされるべきと思われる。ここではまとまった結果は示されないが, 2,3 の方向だけを示したい。

2. 記号と準備. A が Fredholm 作用素 ($A \in \mathbb{F}$ とかく) またはもっと一般に semi-Fredholm 作用素のとき, A の

指数 ind A は

$$\mathrm{ind}\, A = \dim \ker A - \dim \ker A^*$$

で定義される。すべての $A \in B(H)$ に対して ind A を定義するため Rogers [8] に従って $\dim \ker A = \dim \ker A^* = \infty$ のとき ind $A = 0$ と定める。こうするといろいろと都合がよいようである。例えば

$$(2.1) \quad \mathrm{ind}\, A = 0 \iff \text{適当な unitary } U \text{ を用いて } A = U|A| \quad (|A| = (A^*A)^{1/2})$$

便宜上 $\quad \mathbb{Z} = \{A \in B(H) : \mathrm{ind}\, A = 0\}$

とかく。A の essential spectrum を $\sigma_e(A)$，また

$$m_e(A) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(|A|)\}$$

とおく。いわゆる Gohberg-Krein の定理 [8] によれば

$$(2.2) \quad \|A - B\| < m_e(A) \Rightarrow \mathrm{ind}\, B = \mathrm{ind}\, A$$

であるが指数を調べるとき便利な道具である。いま $\mathbb{F}_l$, $\mathbb{F}_r$ でそれぞれ左，右 semi-Fredholm 作用素の全体を表わすことにする。$A \in \mathbb{F}_l$ ($\mathbb{F}_r$) $\iff$ $m_e(A) > 0$ ($m_e(A^*) > 0$) なることと (2.2) から

$$(2.3) \quad \overline{\mathbb{G}} \cap \mathbb{F}_l = \overline{\mathbb{G}} \cap \mathbb{F}_r = \mathbb{F} \cap \mathbb{Z} \; (= \mathbb{F}_0 \text{ とかく})$$

がわかる。次に

$$m(A) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(|A|)\}$$

とおく。また左，右可逆な作用素の全体をそれぞれ $\mathbb{G}_l$, $\mathbb{G}_r$

とする。このとき，(2.3) と同様な次の関係が容易にわかる。

$$(2.4)\qquad \overline{\mathbb{G}} \cap \mathbb{G}_l = \overline{\mathbb{G}} \cap \mathbb{G}_r = \mathbb{G}.$$

(2.3) や (2.4) より $\overline{\mathbb{G}}$ の中では左（右）可逆性，semi-Fredholm 性はそれぞれ可逆性，index zero の Fredholm 性を表わすことを示している。このことからまた $\sigma(|A|)=\sigma(|A^*|)$, $\sigma_e(|A|)=\sigma_e(|A^*|)$,

$$(2.5)\qquad m(A)=m(A^*),\quad m_e(A)=m_e(A^*)\qquad (A\in\overline{\mathbb{G}})$$

などが導びかれる。

3. $\overline{\mathbb{G}}$ の幾何的構造。 $\overline{\mathbb{G}}$ の幾何的構造として，まずその連結性，単連結性に注意したい。連結性は $\mathbb{G}$ の連結性よりわかる。$\overline{\mathbb{G}}$ 内の loop $l(t)$ $(0\le t\le 1)$ に対して $\lambda l(t)$: $(0\le\lambda\le 1$, $0\le t\le 1)$ が1点 $0\in\overline{\mathbb{G}}$ に可縮なことから $\overline{\mathbb{G}}$ の単連結性がわかる。次に話を変えて1つの作用素 $A\in B(H)$ から $\overline{\mathbb{G}}$, $\partial\mathbb{G}$, $\partial\overline{\mathbb{G}}$ までの最短距離の問題，$(\overline{\mathbb{G}})^\circ$, $\partial\overline{\mathbb{G}}$ の特徴づけなどを考えたい。次の結果は本質的には [5] で示されたものである。

命題 3.1 [2, Theorem 3]. $\mathrm{ind}\,A\neq 0 \Rightarrow$

$$\mathrm{dist}(A,\overline{\mathbb{G}})=\max\{m_e(A),\ m_e(A^*)\}.$$

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{G}$ の関係については次が知られている。

命題 3.2 [5, Corollary of Theorem 2]. ($\mathbb{K}$ は compact 作用素全体)

$$\overline{\mathbb{G}}=\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}+\mathbb{K}=\overline{\mathbb{F}}_0$$

先の Kadison–Feldman [3] の結果において $P=\mathrm{proj}\,M$ (M へ

の orth. projection), $P^{\perp} = \mathrm{Proj}\, M^{\perp}$, $AP^{\perp} = B$ とおくと $A = B + AP$ で, (2)から $\|AP\| < \varepsilon$, また(1), (3)から容易に

$$\dim \ker B = \dim PH = \dim \ker B^*$$

とわかりこれは $\mathrm{ind}\, B = 0$ を示す. 従って $\mathrm{dist}\,(A, \mathbb{Z}) \leqq \|A - B\| < \varepsilon$ となり $A \in \overline{\mathbb{Z}}$ を意味する。つまり $A \in \overline{\mathbb{G}} \Leftrightarrow A \in \overline{\mathbb{Z}}$ というわけであり命題3.2の最初の部分に他ならない。

定理3.3 (1) $\partial \overline{\mathbb{G}} = \{A \in B(H) : m_e(A) = m_e(A^*) = 0\}$

(2) $(\overline{\mathbb{G}})^{\circ} = \mathbb{F}_0$

(3) $\partial \mathbb{G} = \partial \overline{\mathbb{G}} \cup (\mathbb{F}_0 \cap \mathbb{G}^c)$

証明. (1) $m_e(A) = m_e(A^*) = 0$ とする。$\mathrm{ind}\, A = 0$ ならば命題3.2より $A \in \overline{\mathbb{G}}$, $\mathrm{ind}\, A \neq 0$ ならば命題3.1より $\mathrm{dist}\,(A, \overline{\mathbb{G}}) = 0$, よって再び $A \in \overline{\mathbb{G}}$. 従って $A \in \partial \overline{\mathbb{G}}$ をいうには A を中心とする(任意の) ε-球が $\overline{\mathbb{G}}$ の外点を含むことを示せばよい。一般性を失うことなく $\mathrm{ind}\, A \leqq 0$ としてよい。$A = V|A|$ を極分解とする。V は isometry としてよい。このとき $\mathrm{ind}\, V = \mathrm{ind}\, A \leqq 0$ である。$|A|$ の spectral measure を $E(\cdot)$, $E_\varepsilon = E([0, \varepsilon/2])$, また

$$B_\varepsilon = \int \max\{\lambda - \varepsilon/2,\ 0\}\, dE(\lambda)$$

とする。このとき $m_e(A) = 0$ から $\dim E_\varepsilon H = \infty$ [4] に注意する。また $B_\varepsilon E_\varepsilon = E_\varepsilon B_\varepsilon = 0$, $\| |A| - B_\varepsilon \| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ がいえる.

いま $E_\varepsilon H$ 上ではちょうど unilateral simple shift, $(E_\varepsilon H)^\perp$ 上では恒等作用素となるような W を考える。このとき $C = VW(B_\varepsilon + \varepsilon/2)$ とおけば $B_\varepsilon + \varepsilon/2$ は可逆だから $\mathrm{ind}\, W = -1$ を用いて，$\mathrm{ind}\, C = \mathrm{ind}\, V + \mathrm{ind}\, W \leq 0 + (-1) = -1$.

また $m_e(C) \geq m_e(V)\, m_e(W)\, m_e(B_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}) \geq \varepsilon/2$.

従って $\mathrm{dist}\,(C, \overline{\mathbb{G}}) \geq m_e(C) \geq \varepsilon/2$，つまり $C \notin \overline{\mathbb{G}}$.

ところが

$$\|A - C\| = \|V|A| - VW(B_\varepsilon + \varepsilon/2)\| \leq \||A| - W B_\varepsilon\| + \varepsilon/2$$
$$= \||A| - B_\varepsilon\| + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$$
$$(\text{cf. } WB_\varepsilon = W(1-E_\varepsilon)B_\varepsilon = B_\varepsilon)$$

これから $A \in \partial\overline{\mathbb{G}}$ がわかる。次に $A \in \partial\overline{\mathbb{G}}$ とする。例えば $m_e(A) > 0$ とすると $A \in \mathbb{F}_e$，従ってまた $A \in \overline{\mathbb{G}} \cap \mathbb{F}_e = \mathbb{F}_0$. しかし，$\mathbb{F}_0$ は $\overline{\mathbb{G}}$ の中の開集合だからこれは矛盾。よって $m_e(A) = 0$. (同様に $m_e(A^*) = 0$).

(2) $\mathbb{F}_0 \subset (\overline{\mathbb{G}})^\circ$ なることは明らか。逆の包含関係を示すため $A \in (\overline{\mathbb{G}})^\circ$ とする。(1)より $m_e(A) > 0$ または $m_e(A^*) > 0$. $m_e(A) > 0$ とすれば $A \in \mathbb{F}_e \cap \overline{\mathbb{G}}$. 従って $A \in \mathbb{F}_0$.

(3) $\partial\overline{\mathbb{G}} \subset \partial\mathbb{G}$ は明らか。$A \in \partial\mathbb{G} \setminus \partial\overline{\mathbb{G}}$ とすると，(2)より $A \in \mathbb{F}_0 \cap \mathbb{G}^c$ とわかる。

系 3.4 $(\overline{\mathbb{F}_0})^\circ = \mathbb{F}_0$，即ち $\mathbb{F}_0$ は regularly open.

命題3.5

(1) $$dist(A, \partial\mathfrak{G}) = \begin{cases} \max\{m_e(A), m_e(A^*)\} & (A \notin \overline{\mathfrak{G}}). \\ m(A)\,(= m(A^*)) & (A \in \overline{\mathfrak{G}}). \end{cases}$$

(2) $$dist(A, \partial\overline{\mathfrak{G}}) = \max\{m_e(A), m_e(A^*)\}.$$

証明. (1) $A \notin \overline{\mathfrak{G}}$ のとき明らかに $dist(A, \partial\mathfrak{G}) = dist(A, \overline{\mathfrak{G}})$, 従って命題3.1より求める等式を得る。次に $A \in \overline{\mathfrak{G}}$ のときであるが $m(A) > 0$ としてよい。($m(A) = 0$ のときは $A \in \partial\mathfrak{G}$ となり等式は容易である。) このとき $A \in \mathfrak{G}_e$ 従って(例えば(2.4)より) $A \in \mathfrak{G}$。いま $A = U|A|$, U は unitary とする。$A' = U(|A| - m(A))$ とおくと $m(A') = m(A'^*) = 0$ から $A' \in \partial\mathfrak{G}$, 従って

$$dist(A, \partial\mathfrak{G}) \leqq \|A - A'\| = m(A).$$

もし等号が成り立たないとすれば $\|A - B\| < m(A)$ となる $B \in \partial\mathfrak{G}$ が存在することになる。しかしこのとき $B \in \mathfrak{G}$ となり矛盾である。よって $dist(A, \partial\mathfrak{G}) = m(A)$.

(2) $A \notin \overline{\mathfrak{G}}$ ならば, $dist(A, \partial\overline{\mathfrak{G}}) = dist(A, \overline{\mathfrak{G}})$ より等式(2)を得る。そこで $A \in \overline{\mathfrak{G}}$ のときを考える。$m_e(A) = 0$ (従って $m_e(A^*) = 0$) のときは定理3.3より $A \in \partial\overline{\mathfrak{G}}$ となり等式(2)は成り立つ。従って $m_e(A) > 0$ としてよい。こうすると, $A \in \mathbb{F}_e \cap \overline{\mathfrak{G}} = \mathbb{F}_0$ となる。そこで, $A = U|A|$ と分解する。U は unitary とする。$A' = U(|A| - m_e(A))$ とおくと $m_e(A') =$

$m(A'^*)=0$ から $A'\in\partial\overline{\mathbb{G}}$（定理3.3(1)）がわかる。従って
$$dist(A,\partial\overline{\mathbb{G}})\leq\|A-A'\|=m_e(A)$$
もし $dist(A,\partial\overline{\mathbb{G}})<m_e(A)$ ならば $B\in\partial\overline{\mathbb{G}}$ を適当に選んで $\|A-B\|<m_e(A)$ とできる。するとこのとき $B\in\mathbb{F}_e$, $ind\,B=ind\,A=0$ から $B\in\mathbb{F}_0\notin\partial\overline{\mathbb{G}}$ となり矛盾である。従って求める等式を得る。

4. $\overline{\mathbb{G}}$ の代数的構造. まず $A\in\mathbb{Z}$ に関しては(2.1)を用いて，次が成り立つ。

命題 4.1 [5, Theorem 3] $A\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$ 複素数 α,β と unitary U,V を選んで $A=\alpha U+\beta V$.

orth. projection の全体を $\mathbb{P}$, 閉値域をもつ作用素の全体を (CR) とかくとき，Beutler [1, Theorem 1] の精密化として次がいえる。

定理 4.2 $A\in$(CR) とする。次の各条件は同値である。

(1) $A\in\overline{\mathbb{G}}$.

(2) $A\in\mathbb{Z}$.

(3) $B\in\mathbb{G}$, $P\in\mathbb{P}$ を選んで $A=BP$ とかける。

(4) $B\in\mathbb{G}$, $P\in\mathbb{P}$ を選んで $A=PB$ とかける。

証明. $A\in$(CR) より A の (Moore-Penrose) inverse $A^\dagger$ が存在する（$A^\dagger$は $AA^\dagger A=A$, $A^\dagger AA^\dagger=A^\dagger$, $(AA^\dagger)^*=AA^\dagger$,

$(A^+A)^* = A^+A$ を満たす有界作用素でこの４式より一意的に定まる，[1]，[6] を参照）。まず，(1) ⇒ (2) を示したい。$\{A_n\} \subset \mathfrak{G}$ で $A_n \to A$（ノルム収束）とする。$A_nA^+ \to AA^+$ かつ

$$(A_nA^+)^+(A_nA^+) = AA^+ = (AA^+)^+(AA^+).$$

一般に $C_n \to C$，$C_n^+C_n \to C^+C$ ならば $C_nC_n^+ \to CC^+$（[6]）なることより $(A_nA^+)(A_nA^+)^+ \to (AA^+)(AA^+)^+ = AA^+$.

従って十分大きな n に対して

$$\| (A_nA^+)^+(A_nA^+) - (A_nA^+)(A_nA^+)^+ \| < 1$$

よって $\dim \ker A_nA^+ = \dim \ker (A_nA^+)^*$，つまり $\mathrm{ind}\, A_nA^+ = 0$，$\mathrm{ind}\, A^+ = 0$ 即ち $\mathrm{ind}\, A = 0$。これは (2) を示している。

(2) ⇒ (3) を示すため (2) を仮定，$A = U|A|$，U は unitary とする。$A = U\{|A| + \varepsilon(1 - A^+A)\}A^+A$ であり

$$B = U\{|A| + \varepsilon(1 - A^+A)\}, \qquad P = A^+A$$

がそれぞれ (3) で求めているものとなる。(3) ⇒ (2) は容易である。(3) ⇔ (4) は $\mathrm{ind}\, A = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ind}\, A^* = 0$ より明らかである。

系 4.3（[9, Theorem]）$A \in (CR)$，$A \notin \mathfrak{G}$ とする。このとき次の各条件は同値である。

(1) $\{B_n\} \subset \mathfrak{G}$ が存在し $B_nA^+A \to A$.

(2) $B \in \mathfrak{G}$ を適当に選んで $BA^+A = A$.

(3) $A \in \partial\mathfrak{G}$.

(4) $A \in \mathbb{Z}$.

証明. (1)⇔(4) (1)を仮定する。$B_n A^+ A \in \overline{\mathbb{G}}$ より $A \in \overline{\mathbb{G}}$ 従って定理4.2より $A \in \mathbb{Z}$。逆は $\mathbb{Z} \subset \overline{\mathbb{G}}$ から $\{B_n\} \subset \mathbb{G}$ で $B_n \to A$ とできる。このとき明らかに $B_n A^+ A \to A$。(2)⇔(4) (3)⇔(4) は定理4.2より容易である。

系 4.4 ([9, Corollary]

$$\partial\mathbb{G} \cap (CR) = \mathbb{Z} \cap \mathbb{G}^c \cap (CR) = \mathbb{G}(\mathbb{P} \setminus \{1\}) = (\mathbb{P} \setminus \{1\})\mathbb{G}.$$

5. 半群としての$\overline{\mathbb{G}}$. $\overline{\mathbb{G}}$が半群なることは前に述べた。半群S(単位元1を仮定する)の研究に際し重要な概念としてGreen関係[10]と呼ばれるものがある。まずこれを定義したい。$a, b \in S$に対して

$a \rho_0 b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a = xb$ となる $x \in S$ が存在.

$a \sigma_0 b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a = by$ となる $y \in S$ が存在.

また ρ_0 と σ_0 の合成 $\tau_0 = \rho_0 \circ \sigma_0$ は

$a \tau_0 b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \rho_0 c$, $c \sigma_0 b$ となる $c \in S$ が存在

で定義される。さらに

$a \tilde{\rho}_0 b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \rho_0 b$ かつ $b \rho_0 a$,

$a \tilde{\sigma}_0 b$, $a \tilde{\tau}_0 b$ も同様に定義される。ρ_0, σ_0, τ_0, $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\tau}_0$, $\tilde{\rho}_0 \circ \tilde{\sigma}_0$ Green関係である。一般に $\tilde{\rho}_0 \circ \tilde{\sigma}_0 \subset \tilde{\tau}_0$

($a\ \widetilde{\rho_0}\circ\widetilde{\sigma_0}\ b$ ならば $a\ \widetilde{\tau_0}\ b$) であるが $\widetilde{\rho_0}\circ\widetilde{\sigma_0} \neq \widetilde{\tau_0}$ であるという。$\mathcal{S}=\overline{\mathcal{G}}$ のときはどうなるであろうか，まだわかっていない。

$A, B\in\overline{\mathcal{G}}$ で，$A = XB$ がある $X\in B(H)$ に対して成り立つとき，$X_1\in\overline{\mathcal{G}}$ を適当に選んで $A=X_1B$ とできるであろうか．つまり $\overline{\mathcal{G}}$ の中で $A\ \rho_0\ B$ となるであろうか．この問題に対しては $B\in(CR)$ ならば $X_1 = AB^\dagger$ が求めるものであることがわかる。実際，$AB^\dagger = \lim_{n\to\infty} AB^*(BB^* + 1/n)^{-1}\in\overline{\mathcal{G}}$ であり，また，$AB^\dagger B = A$ となる。$B\notin(CR)$ ならば必ずしもこのような $X_1\in\overline{\mathcal{G}}$ が存在しない。例えば，$A=\mathit{shift}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots)$，$B=\mathit{diag}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots)$，$X=\mathit{shift}(1,1,1,\cdots)$ とするとき，$A=XB$．もし $A=X_1B$ となったとすれば $X_1B=XB$．B の値域は dense なることから $X_1 = X\notin\overline{\mathcal{G}}$ となります．

次に $\overline{\mathcal{G}}$ の(半群)イデアルについて述べたい。一般に半群 S の真部分集合を $L(R)$ とするとき，

$$SL\subset L \qquad (RS\subset R)$$

ならば $L(R)$ を S の左(右)イデアルという．$\overline{\mathcal{G}}$ の中の左，右，両側イデアルにはどのようなものが存在するであろうか。

$$\partial\mathcal{G}\cdot\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{G}}\cdot\partial\mathcal{G} = \partial\mathcal{G}$$
$$\partial\overline{\mathcal{G}}\cdot\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{G}}\cdot\partial\overline{\mathcal{G}} = \partial\overline{\mathcal{G}}$$

などは容易にわかる．よって $\partial\mathcal{G}$, $\partial\overline{\mathcal{G}}$ は $\overline{\mathcal{G}}$ の両側イデアルで

あり，しかも明らかに閉イデアルである。$\partial\mathbb{F}$ は極大イデアル，素イデアルなども容易にわかる。この他compact作用素全体$\mathbb{K}$も閉両側イデアルなることは明らか。$\partial\mathbb{F} \supsetneq I \supsetneq \partial\overline{\mathbb{F}}$ となるイデアルが存在するであろうか。$\overline{\mathbb{F}}$ のすべての左，右，両側イデアルの形を決めることができないであろうか。閉片側イデアルは両側イデアルであろうかなどこの他多くの問題が考えられる。

References

[1] F. J. Beutler, The operator theory of the pseudo-inverse, J. Math. Anal. and Appl. 10 (1965), 451-470.

[2] R. Bouldin, The essential minimum modulus, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 513-517.

[3] J. Feldman and R. V. Kadison, The closure of the regular operators in a ring of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1954), 909-916.

[4] P. A. Fillmore, J. G. Stampfli and J. P. Williams, On the essential numerical range, the essential spectrum and a problem of Halmos, Acta Sci. Math. 33 (1972), 179-197.

[5] S. Izumino, Inequalities on operators with index zero, Math. Japon. 23 (1979), 565-572.

[6] S. Izumino, Convergence of generalized inverses and spline projectors, to appear.

[7] E. P. Kelly, Jr and D. A. Hogan, Bounded conservative, linear operators and the maximal group. II, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 298-302.

[8] D. D. Rogers, Approximation by unitary and essentially unitary operators, Acta Sci. Math. Szeged, 39 (1977), 141- 151.

[9] G. W. Treese and E. P. Kelly Jr., Generalized Fredholm operators and the boundary of the maximal group of invertible operators, Proc. Amer. Math. Soc. 67 (1977), 123-128.

[10] 田村孝行, 半群論 (共立講座).