数理解析研究所講究録
第501巻 1983年 6-20


# On 3-manifolds with no periodic maps

阪市大理　河内明夫 (Akio Kawauchi)

**1. Introduction と主結果.** この報告は小林(阪大), 作間(阪市大)両氏との共同研究の論文[5]の解説であり, 詳細はそれを参照されたい. 断わらない限り, コンパクト連結有向PL(又は$C^\infty$) 3-多様体を単に3-多様体と呼ぶことにする。また, 周期写像により, 恒等写像以外のPL(又は$C^\infty$)周期写像をさすことにする。我々の目的は, 与えられた3-多様体のH-cobordism類の中には, 第2交換子群を法として, もとのものに等しい基本群をもつ, 周期写像をもたない, 3-多様体が無数にあること, 及び3-球面内の*link*に対し類似のことが成りたつことを示すことである。　2つの3-多様体$M_0, M_1$に対し, あるコンパクト有向PL(又は$C^\infty$) 4-多様体$W$で次の(1), (2), (3)を満たすものがあるとき, それらは<u>H-cobordant</u>であるという(Fig.1): (1) $-M_0+M_1 \subset \partial W$, (2) $H_*(W, M_i; Z)=0$, $i=0,1$, (3) $\overline{\partial W-(-M_0+M_1)}$は$\phi$又は$(\partial M_0)\times[0,1]$と同相になる。

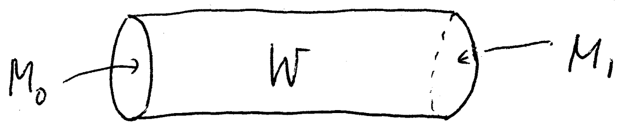



Fig. 1.

群 $G$ に対し，$G''$ を $G$ の第二交換子群，$G=G_1\supset G_2\supset G_3\supset\cdots$ を $G$ の lower central series とする。

<u>定理1</u>. $M$ を3-多様体とし，$\partial M$ は2-球面を含んでいないとする（$\partial M=\phi$ でもよい）。そのとき，Haken 3-多様体 $M^*$ で，次の(1),(2),(3)を満たすものが無数に存在する（同相を無視して）：

(1) $M^*$ は $M$ に H-cobordant，

(2) epimorphism $\theta:\pi_1(M^*)\to\pi_1(M)$ で，$\operatorname{Ker}\theta\subset\pi_1(M^*)''$ となるものがある，

(3) $M^*$ は周期写像をもたない。

(1)のみを満たす Haken 3-多様体 $M^*$ の存在は，Livingston [16]，Mayers [8] により得られていた。また，周期写像を持たない3-多様体の例は，Raymond/Tollefson [10]，Siebenmann [12]，小林[6]，作間[11] で取り上げられた。Stallings [14] の結果を使うと，(1)から次がわかる：

(1)′ すべての $q$ で，$\pi_1(M^*)/\pi_1(M^*)_q\cong\pi_1(M)/\pi_1(M)_q$.

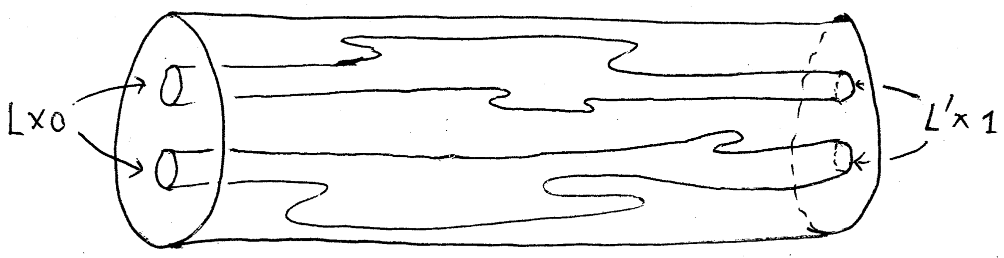
(2)より明らかに次が出る：

(2)′ $\pi_1(M^*)/\pi_1(M^*)'' \cong \pi_1(M)/\pi_1(M)''$。

Haken 3-多様体は aspherical 多様体であり，周期写像を持たない3-多様体の知られた例はすべて Haken 多様体だったので，次を注意する：

<u>定理2</u>．任意の3-多様体 $M$ に対し，定理1の(1),(2),(3)を満たす non-aspherical 3-多様体 $M^*$ が無数に存在する。

3-球面 $S^3$ 内の link $L$ に対し，$S^3$ から $L$ の tube 近傍 $T(L)$ の内部を取り去ったものを $L$ の<u>外部</u>といい，$E(L)$ と書く．$H_1(E(L);Z)$ は自由アーベル群で，その基底として $L$ の各連結成分の meridian よりなるものがとれる．$\tilde{E}(L)$ を $\pi_1(E(L)) \to H_1(E(L);Z)$ の kernel に対応した被覆とする。$H_1(\tilde{E}(L);Z)$ は群環 $Z[H_1(E(L);Z)]$ 上の加群となる。これを $L$ の <u>Alexander 加群</u>という．$S^3$ 内の2つの link $L, L'$ に対し，局所平担埋込み $f: S^1\times[0,1]_1 + S^1\times[0,1]_2 + \cdots + S^1\times[0,1]_r \to S^3\times[0,1]$ で，$L\times 0 = f(S^1\times 0_1 + \cdots + S^1\times 0_r)$, $L'\times 1 = f(S^1\times 1_1 + \cdots + S^1\times 1_r)$ となるものがあるとき，$L$ と $L'$ は <u>cobordant</u> という (Fig. 2)。




$S^3 \times [0,1]$

Fig. 2.

定理3. $S^3$内の任意のlink $L$(knotの場合も含む)に対し, 次の(1),(2),(3)を満たすprime link $L^* \subset S^3$が, 外部$E(L^*)$の位相型を無視して, 無数に存在する:

(1) $L^*$は$L$にcobordant,

(2) $L^*$と$L$のAlexander加群は, $H_1(E(L^*);Z)$と$H_1(E(L);Z)$のmeridian基底の適当な同一視のもとに, 同型となる,

(3) $E(L^*)$は周期写像をもたない.

(1)のみを満たすprime link $L^*$の存在はKirby/Lickorish[15], [16], [8](ただし, [15], [16]はknotのみ)で得られ, (1),(2)を満たすprime link $L^*$の存在は中西[20]で得られた.

次の問題は未解決である: 各$n \geq 2$に対し, どの3-多様体も必ず周期$n$の写像をもつ3-多様体にH-cobordantだろうか? どのlinkも必ず外部が周期$n$の写像をもつようなlinkにcobordantだ

ろうか？　向き逆転周期写像をもつようなものにH-cobordantになれない3-多様体は存在する(例：Poincaré ホモロジー球面)。外部が向き逆転同相写像をもつようなknotにcobordantになれないknotは存在する(例，trefoil knot)。

2．<u>証明に必要なLemmas</u>．3-多様体の一般用語はJaco [3]による。

<u>Lemma 1</u>．$k \subset S^3$ をknotとし，$A \subset \partial E(k)$ を $k$ のmeridian annulusとする．もし $E(k)$ が $h(A)=A$ となる周期写像 $h$ をもてば，$k$ はstrongly invertible knotか又はstrongly negative-amphicheiral knotである．

証明は小林[6, Theorem 2]の証明の議論に含まれる．

<u>Lemma 2</u>。$k(p,q,r)$ を交叉数 $p,q,r$ のpretzel knot (Fig.3)で，$|p|,|q|,|r|$ を奇数 $>1$ かつ $pq+qr+rp=-1$ なるものとする．(例えば，$p=-2r+1$，$q=-2r+1$，$r$，奇数 $\neq \pm 1$) このとき，$k(p,q,r)$ は次を満たす：(1) Alexander多項式1をもつ，(2) non-invertibleである，(3) non-amphicheiralである，(4) $E(k(p,q,r))$ はnon-Seifert，simple 3-多様体，(5) $\{|p|,|q|,|r|\} \ni$

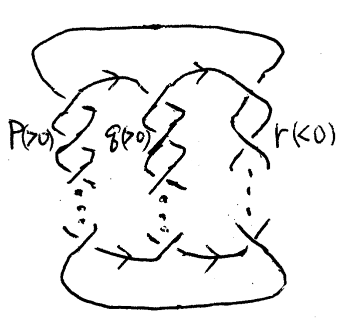



Fig.3

$\{|p'|, |q'|, |r'|\}$ のとき，$k(p,q,r)$ と $k(p',q',r')$ の knot 型は異なる（即ち，$h(k(p,q,r)) = k(p',q',r')$ となる同相写像 $h : S^3 \circlearrowleft$ は存在しない）。

証明は行わない。[(1)は直接，(2)は Trotter [18]，(3)は [4] より，(4)は bridge 指数が3なので，(1)及び Schubert [21] の議論から出る。(5)は Reidemeister による古典的事実 [17]。]

次の Lemma は中西氏の協力のもとで得られた。感謝する。

<u>Lemma</u> 3。Fig.4 に描かれた link $L_0 = O \cup k_0$ の外部 $E(L_0)$ は non-Seifert, simple である。

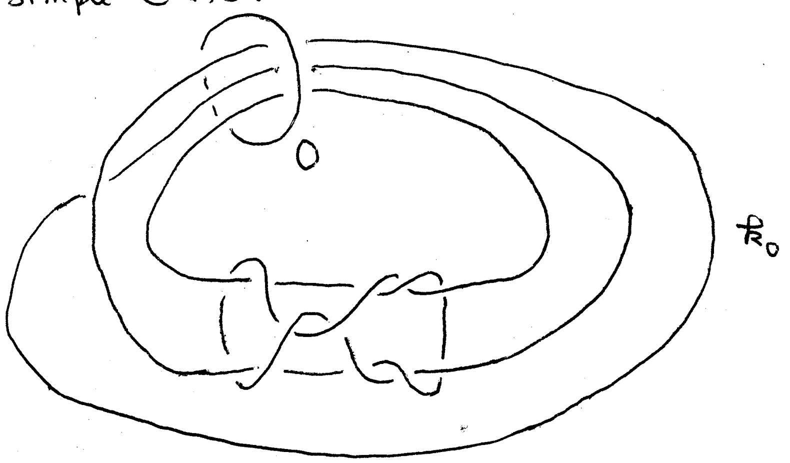
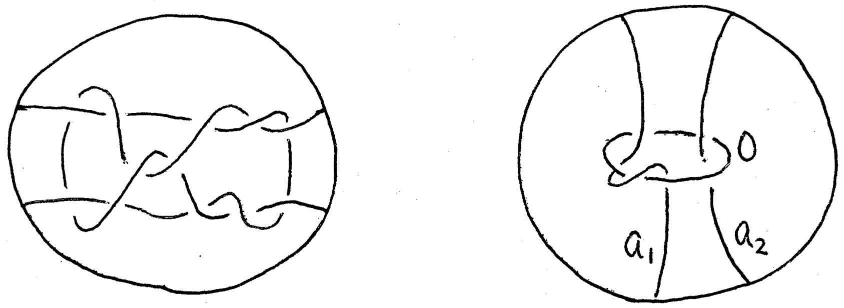



Fig.4

(証明) $L_0$ を中西 [9] の意味の2つの tangles $t_1 \subset B^3$，$t_2 \subset B^3$ に分ける (Fig.5)。$t_1$ は相馬 [13] により simple tangle，$t_2$ は [9] の意味の prime tangle. [Local triviality, Inseparability, Indivisibility は容

易にcheckできる.] 特に, [9, Theorem 1.10]より $L_0$ は prime link である。




$t_1 \subset B^3$ $\quad$ $t_2 = O \cup a_1 \cup a_2 \subset B^3$

Fig.5.

$B^3 - t_2$ に埋め込まれた incompressible torus $F$ は $\partial T(O)$ にisotopicになることを示す。Fig.6 の斜線部分の disk $P$ をとり, $P_0 = P - P \cap O$

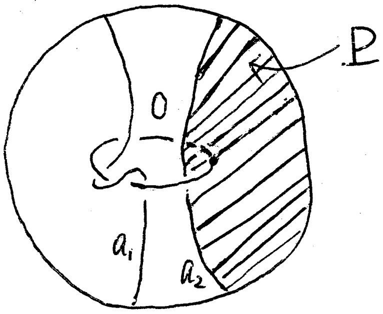



Fig. 6.

とおく。$F$ と $P_0$ は垂直に交わるとしてよい. $F$ と $P_0$ は $\phi$ 又はいくつかの loops よりなるが, isotopy 変形のもとにその個数が最小になるような $F$ と $P_0$ を考える。$F \cap P_0 \neq \phi$. [もし $F \cap P_0 = \phi$ なら $\pi_1(F) \cong Z+Z$ から $\pi_1(B^3 - a_1 \cup O \cup P \cup \partial B^3) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1) = Z * Z$ への monomorphism が存在するはずだが, これは起り得ない.] $F \cap P_0$ の $P$ での innermost loop $l$ を取る. $l$ は $P$ で円板 $D$ を囲む. $t_2$ の prime 性より, $D$ は

点 $\ell \cap D$ を含み，また $\ell$ は $F$ で essential。$F$ により $B^3$ は2つの部分に分けられる。それを $N_1, N_2$ とする。ただし $\partial N_1 = F$, $\partial N_2 = F \cup \partial B^3$ とする。もし $D \subset N_1$ ならば，$O \subset B^3$ が trivial knot だから，$(O \subset N_1) \cong (S^1 \times o \subset S^1 \times B^2)$ が出て，$F = \partial N_1 = \partial T(O)$ がわかる。従って $D \subset N_2$ となれないことを示せば主張が得られる。もし $D \subset N_2$ ならば，$t_2 \subset N_2$ となることにより，$N_1$ はある non-trivial knot $k_1$ の外部でなければならない。従って，$O$ は $k_1$ を因子として含むことになり，$O \subset B^3$ の triviality に反する。よって $D \not\subset N_2$. $E(L_0)$ が simple であることを言うために，$E(L_0)$ が $\partial$-parallel でない incompressible torus $F$ を含んでいたと仮定する。[13, Lemma 2] により $F$ は $B^3 - t_2$ に含まれた torus $F'$ に $S^3 - L$ で isotopic。従って上に示したことから，$\partial T(O)$ に isotopic で，結局 $\partial$-parallel (矛盾)。故に $E(L_0)$ は simple である。$E(L_0)$ は Seifert 多様体でないことを示す。もし $E(L_0)$ が Seifert 多様体ならば，simple であることから，高々1つの例外ファイバーをもつ annulus 上の Seifert 多様体 (Jaco, [3, p155] 参照)。そのとき，$E(k_0) = E(L_0) \cup S^1 \times B^2$ は高々2つの例外ファイバーをもつ Seifert 多様体であることが示せ，$k_0$ は torus knot でなければならない。$k_0$ は樹下-寺阪 knot と呼ばれる Alexander 多項式 $= 1$ をもつ non-trivial knot ([19]) で torus knot ではない。(Fig. 7.)

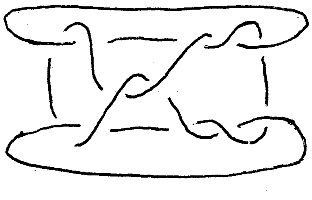


Fig. 7.

こうして $E(L_0)$ はSeifert多様体ではない。(証明終)

<u>Lemma 4.</u> $T$ を3-多様体 $M$ の中のsolid torusとする。$k\subset S^3$ をknotとし，$T(k)$上のlongitudeを$T$のmeridianに移す任意の同相写像 $\partial E(k)\cong\partial T$ により作られた3-多様体 $M^*=\overline{M-T}\cup E(k)/\partial T\equiv\partial E(k)$ を考える。(1) もし$k$がtrivial knot $O\subset S^3$ にcobordant (即ち, slice knot) ならば$M^*$と$M$はH-cobordantである。(2) もし$k$のAlexander多項式が1ならば，$\mathrm{Ker}\,\theta\subset\pi_1(M^*)''$ となるepimorphism $\theta:\pi_1(M^*)\to\pi_1(M)$ が存在する。

(略証) (1)を示すために，$A$を$k$と$O$をつなぐ$S^3\times[0,1]$の中のannulusとする。$W_0$を$S^3\times[0,1]$から$A$のtube近傍の内部を取り除いたものとする。$W_0$は$E(k)$と$S^1\times B^2$のH-cobordismになり，$T\times 1$と$S^1\times B^2$を適当に同一視して作った4-多様体 $W=M\times[0,1]\cup W_0$ は$M$と$M^*$のH-cobordismを与える。$k$がAlexander多項式$=1$のknotであることと，$\pi_1(E(k))/\pi_1(E(k))''\cong\mathbb{Z}$ とは同値である。このとき，van Kampenの定理から(2)は得られる。

## 3. <u>定理1,2,3の略証</u>.

<u>定理1の略証</u>. $k=k(p,q,r)$ を向きづけられたLemma 2のpretzel knotとし，$\bar{k}=k(-r,-q,-p)$ ($k$の"reflected inverse") とおく。$k\#\bar{k}$ はslice knotでAlexander多項式は1.

Lemma 3で考えた link $L_0 = O \cup k_0$ に対し, $k_0 \subset \overline{S^3 - T(O)}$ ($\cong S^1 \times B^2$) を考える. $T(O)$の meridian, longitude を $T(\bar{k})$ の longitude, meridian に移す同相 $\overline{S^3 - T(O)} \cong T(\bar{k}) \subset S^3$ により $k_0$を$S^3$の中に入れる。出来た knot を $\bar{k}(k_0)$ とかく. Lemma 3 より $E(\bar{k}(k_0))$ は essential annulus を含まず, 従って $\bar{k}(k_0)$ は prime。$k \# \bar{k}(k_0)$ は slice knot で, Alexander 多項式は 1 であることが示せる。定理を得るためには, まず Mayers [8] の結果から, $E = \overline{M - T(k_s)}$ が non-Seifert, simple で, $[k_s] = 0$ ($\in H_1(M; Z)$) となるような knot $k_s \subset \mathrm{Int}\, M$ がとれることに注意する. そのとき, $T(k_s)$ の meridian, longitude を一意に指定できる. $T(k \# \bar{k}(k_0))$ の meridian, longitude を $T(k_s)$ の longitude, meridian に移す同相 $\partial E(k \# \bar{k}(k_0)) \cong \partial T(k_s)$ により作る 3-多様体 $M^* = E \cup E(k \# \bar{k}(k_0)) / \partial E \equiv \partial E(k \# \bar{k}(k_0))$ は定理 1 の (1), (2) を満たす Haken 3-多様体である. $M^*$ が周期写像をもたないことをいうのに, simple 部分が $E$, $E(k)$, $E(L_0)$, $E(\bar{k})$ からなるような $M^*$ の Jaco/Shalen-Johannson 分割 ([3]) を考える. $M^*$の任意の自己同相 $h$ は, $h'E(k \# \bar{k}(k_0)) = E(k \# \bar{k}(k_0))$ となる $h'$ に ambient isotopic となることがわかる. [ここで使う事実: $D(2)$ を穴 2 つをもつ円板とし, $p_1, p_2, p_3$ を $\partial D(2)$ の各成分上の点とする. $D(2) \times S^1$ の任意の自己同相写像は $p_1 \times S^1 \cup p_2 \times S^1 \cup p_3 \times S^1$ を isotopy を無視して考えると, 保存する.] それ故, もし $h$ が周期写像ならば, 同変 torus 定理 (Freedman/Hass/Scott [1]) により,

$\hbar E(\mathfrak{k}\#\bar{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k}_0)) = E(\mathfrak{k}\#\bar{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k}_0))$ とできる。そのとき，同変 annulus 定理[6]から $\hbar E(\mathfrak{k}) = E(\mathfrak{k})$，かつ $\mathfrak{k}$ のある meridian annulus $A \subset \partial E(\mathfrak{k})$ に対し，$\hbar A = A$ とできる（[6, Theorem 2]の証明参照）。[$\mathfrak{k}$, $\bar{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k}_0)$ knot 型の異なる prime knots に注意する。] Lemma 1 により，$\mathfrak{k}$ は *strongly invertible* か又は *strongly negative-amphicheiral* でなければならない。Lemma 2 より $\mathfrak{k}$ はそうではない。このような $M^*$ は同相を除いて無数にあることは，Lemma 2 (5) より出る。実際，pretzel knots $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ から構成したものを $M_1^*$, $M_2^*$ と書くとき，Jaco/Shalen-Johannson 分割を考えることにより，「$M_1^* \cong M_2^* \Rightarrow$ meridian を保存する同相 $E(\mathfrak{k}_1) \cong E(\mathfrak{k}_2)$ がある $\Rightarrow$ $\mathfrak{k}_1$ と $\mathfrak{k}_2$ は同じ knot 型をもつ」がわかる。（略証終）

（注意）Johannson の定理[3, Chap. X]より，「$\pi_1(M_1^*) \cong \pi_1(M_2^*) \Leftrightarrow M_1^* \cong M_2^*$」もわかるので，定理1は基本群の同型を除いて，$M^*$ は無数にあると述べてもよい。

<u>定理2の略証</u>．まず $\partial M$ が 2-球面を含まない場合を考える。定理1の (1),(2) を満たす Haken 3-多様体 $M_1$ をとる。3-球面と定理1を使って，(1),(2),(3) を満たし，$M_1$ に同相でないような Haken ホモロジー球面 $S^*$ が無数にある。そのとき $M_1 \# S^*$ は non-aspherical で (1),(2)を満たす。同変球面定理（*Meeks/Yau* [7]）

により(3)も満たす。$\partial M$が2-球面を含む場合は、すべての2-球面にそって3-cellをはる(今の場合r個)：$M^+ = M \cup B_1^3 \cup \cdots \cup B_r^3$.
定理1より$M^+$から(1),(2),(3)を満たすHaken 3-多様体$M^{+*}$が無数に作れる。このとき、$M^*$として、$M^{+*}$からr個の3-cellsの内部を除いたものをとる。$M^*$はnon-asphericalで、Mに対し(1),(2),(3)を満たす。

定理3の略証. 中西[20]により、(1),(2)を満たすprime link $L^*$が存在する. それ故、Lをprime linkと仮定してよい. Lの成分を$L_i$, $i=1,2,\cdots,r$, とかく. 相異なるknot型をもつr個のLemma 2のpretzel knots $k_i$, $i=1,2,\cdots,r$, を用意する, ただし, $r=1$のときは$k_1$は$L=L_1$と異なるknot型をもつものとする. 定理1の証明で使ったknot sum $k_i \# \bar{k}_i(k_0)$を考える. $L_i' = L_i \# k_i \# \bar{k}_i(k_0)$, $L' = \bigcup_{i=1}^{r} L_i'$とおく(Fig. 8). $L'$はLに対し(1),(2)を満たす. さらに, $L^* = \bigcup_{i=1}^{r} L_i'(k_0)$とおくと, Lemma 3よりこれはprime linkで, [9, Lemma 3.3]より$L'$に対し, (1),(2)を満たすことがわかる.

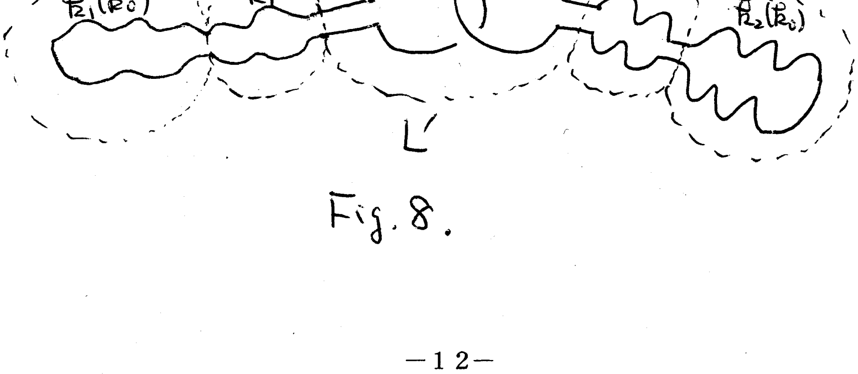



Fig. 8.

$L^*$ が (3)を満たしていることを示すのに，$\partial E(L^*)$ と交わる $r$ 個の $E(L_0)$ を simple 部分としてもつ $E(L^*)$ の Jaco/Shalen-Johannson 分解を考える。任意の同相写像 $h: E(L^*)\circlearrowleft$ は，$h'(E(L^*))=E(L^*)$ となる $h'$ に ambient isotopic なことがわかる．もし $h$ が周期写像ならば，同変 torus 定理から $h(E(L'))=E(L')$ とできる．$L'$ の各成分は non-prime だから，任意の同相 $h_1: E(L')\circlearrowleft$ は同相 $\bar{h}_1: S^3\circlearrowleft$ で $\bar{h}_1(L')=L'$ となるものに拡張する([6, Lemma 2.1]参照)．橋爪[2]による link の素分解の一意性により，$\bar{h}_1$ は $L'$ の各素因子を保存する．というのは，$L'$ の各素因子は相異なるようにしたのだから．それ故，特に，$h(E(k_1\#\bar{k}_1(k_0)))$ と $E(k_1\#\bar{k}_1(k_0))$ は $E(L')$ において isotopic．同変 torus 定理から $h(E(k_1\#\bar{k}_1(k_0))=E(k_1\#\bar{k}_1(k_0))$ と仮定できる．定理1の証明において，これは起らないことを見た。故に，$E(L^*)$ は周期写像 $h$ を持つことができない．無限にあることは，定理1と同じ理由による．（略証終）

# 参考文献

[1] M. Freedman, J. Hass and P. Scott, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, Invent. Math. 71 (1983), 602-642.

[2] Y. Hashizume, On the uniqueness of the decomposition of a link, Osaka Math. J. 10 (1958), 283-300.

[3] W. Jaco, Lectures on three manifold topology, Conference Board of Math. Science, Regional Conference Series in Math. 43, 1980.

[4] A. Kawauchi, A survey on pretzel knots, preprint.

[5] A. Kawauchi, T. Kobayashi and M. Sakuma, On 3-manifolds with no periodic maps, preprint.

[6] T. Kobayashi, Equivariant annulus theorem for 3-manifolds, preprint.

[7] W. H. Meeks, III and S. T. Yau, Topology of three dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, Ann. of Math. 12 (1980), 441-484.

[8] R. Mayers, Homology cobordisms, link concordance and hyperbolic 3-manifolds, preprint.

[9] Y. Nakanishi, Primeness of links, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9 (1981), 415-440.

[10] F. Raymond and J. L. Tollefson, Closed 3-manifolds with no periodic maps, Trans. Amer. Math. Soc. 221 (1976), 403-418; Corrections, ibid.

272 (1982), 803 - 807.

[11] M. Sakuma, Homology cobordisms and 3-manifolds with no periodic maps (unpublished version), Osaka City Univ. (1983).

[12] L.C. Siebenmann, On vanishing of the Rochlin invariant and non-finitely amphicheiral homology 3-spheres, Lect. Notes in Math. 788, Springer-Verlag, 172-222, 1980.

[13] T. Soma, Simple links and tangles, Tokyo J. Math. (to appear).

[14] J. Stallings, Homology and central series of groups, J. Algebra 2 (1965), 170-181.

[追加]

[15] R.C. Kirby and W.B.R. Lickorish, Prime knots and concordances, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 86 (1979), 437-441.

[16] C. Livingston, Homology cobordisms of 3-manifolds, knot concordances, and prime knots, Pacific J. Math. 94 (1981), 193-206.

[17] K. Reidemeister, Knotentheorie, Ergebn. Math. 1 (1932).

[18] H.F. Trotter, Non-invertible knots exist, Topology 2 (1964), 275-284.

[19] S. Kinoshita and H. Terasaka, On unions of knots, Osaka Math. J. 9 (1957), 131-153.

[20] Y. Nakanishi, Prime links, concordance and Alexander invariants, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 8 (1980) 561-568.

[21] H. Schubert, Über eine Numerische Knoteninvariante, Math. Z. 61 (1954) 245-288.