数理解析研究所講究録
第501巻 1983年 86-98

On a question concerned with a concordance relation of G-complexes

阪大理 森本雅治 (Masaharu Morimoto)

§1. Introduction

このノートにおいては G は位数が素数巾でない有限群とし、すべての複体は有限複体であるとする。

R. Oliver は整数群 $\mathbb{Z}$ の部分群

$$S = \{ \chi(X^G) - 1 \mid X \text{ は可縮な } G\text{-複体} \}$$

の生成元 n_G $(\geqq 0)$ を決定した。2つの G-複体 X_0 と X_1 が concordant であるとは G-複体 Z と pseudo-equivalences $f_i : X_i \longrightarrow Z$, $i = 0, 1$, が存在する時を言う。X_0 と X_1 が concordant ならば $\chi(X_0{}^G) \equiv \chi(X_1{}^G) \bmod n_G$ が成り立つ。Oliver-Petrie [3] から問を引用する。

(Q)　Y を G－複体，F' を $\chi(F') \equiv \chi(Y^G) \bmod n_G$ をみたす複体とする．Y と concordant な G－複体 X で $X^G = F'$ をみたすものが存在するか？

Y が自由 G－作用を持つ場合に反例が存在する（§2 例1 を参照）。そこで（Q）における Y に次のような仮定を付けて以下考えることにする．

（仮定）　Y は連結で $\pi_1(Y)$ は有限，更に $Y^G \neq \phi$ とする．

Oliver－Petrie は $\pi_1(Y) = 0$ かつ Y^G が連結の場合に（Q）が肯定的であることを示した。このノートの目的は，彼等の結果を一般化することにある．

Y^G の連結成分の個数を k とする．この時次のような性質を持つ $\mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$（$k$－個）の部分群 N_Y が存在する（N_Y の定義は §3 を見られたい）。

定理 1.　複体 F' と（連続）写像 $f' : F' \to Y^G$ に対して，G－複体 X と pseudo-equivalence f:

$X \longrightarrow Y$ で $X^G = F'$ かつ $f^G = f'$ をみたすものが存在する必要十分条件は

$$(\chi(F_1) - \chi(F'_1), \cdots, \chi(F_k) - \chi(F'_k)) \in N_Y$$

である。 ここで $F'_i = f'^{-1}(F_i)$.

準同型写像 $\varepsilon : \mathbb{Z}^k \longrightarrow \mathbb{Z}$ を

$$\varepsilon(x_1, \cdots, x_k) = x_1 + \cdots + x_k$$

で定義する． もしある Y に対して $N_Y = \varepsilon^{-1}(n_G\mathbb{Z})$ が成り立てば、その Y に対しては (Q) は肯定的であることがわかる． ただし、一般的には $N_Y \neq \varepsilon^{-1}(n_G\mathbb{Z})$ である (§2 例2 を参照)。 Oliver - Petrie の先の結果の一般化として次の定理を得た． §2 例3 はその応用であるので参照されたい．

定理2． もし次の (i), (ii), (iii), (iv) の中のどれか1つが成り立つならば $N_Y = \varepsilon^{-1}(n_G\mathbb{Z})$ である．

(i) Y^G が連結である．

(ii) $G \notin \mathcal{G}$.

(iii) $\pi_1(Y)=0$ かつ任意の $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S}(G)$ に対して Y^P が連結である.

(iv) $G \notin \mathcal{G}_1$ かつ任意の $H \in \mathcal{G}^1 \cap \mathcal{S}(G)$ に対して Y^H が連結である.

上の定理における $\mathcal{S}(G)$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}^1$ は次のように与えられる有限群の族である. $\mathcal{S}(G)$ は G の部分群の全体, $\mathcal{P}$ は位数が素数巾の有限群の族. $\mathcal{G}_p^q$ は次のような正規部分群 $P \triangleleft H \triangleleft K$ を持つ有限群 K からなる族: P は位数が p-巾, K/H は位数が q-巾, 更に H/P は巡回群である. このとき $\mathcal{G}^1 = \bigcup_p \mathcal{G}_p^{\,1}$, $\mathcal{G}_1 = \bigcup_q \mathcal{G}_1^{\,q}$, $\mathcal{G} = \bigcup_{p,q} \mathcal{G}_p^{\,q}$ である, ただし, p および q は素数を渡る. 従って $\mathcal{G}_1$ は hyper-elementary group からなる族である. また $\mathcal{G}$ に属する群は可解であるから, 非可解群 G は上の定理の (ii) をみたす.

§2. Examples

このセクションでは p および q は異なる素数とする.

例1（(Q)に対する反例）． $G=\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_q\oplus\mathbb{Z}_q$ とする．この場合 $n_G=pq$ である．Y を自由 G-複体，$F'=\{1,\cdots,pq\}$ としよう．$\chi(Y^G)\equiv\chi(F')$ mod n_G が成り立つ．Y と concordant である G-複体 X，$X^G=F'$，が存在すると仮定する．すると G-複体 Z，$Z^G\neq\phi$，と pseudo-equivalence $f:Y\longrightarrow Z$ が存在する．Y と Z に基点 "$+$" を disjoint に加え（$Y^+=Y\amalg\{+\}$，$Z^+=Z\amalg\{+\}$）$f^+:Y^+\longrightarrow Z^+$ を

$$f^+(y)=\begin{cases} + & \text{if } y=+ \\ f(y) & \text{if } y\in Y\end{cases}$$

で定義する．写像錐 M_{f^+} は可縮である．Smith の定理から $(M_{f^+})^{\mathbb{Z}_p}$ は $\mathbb{Z}_p$-acyclic である．特にそれは連結である．一方

$$(M_{f^+})^{\mathbb{Z}_p}=M_{f^{+\mathbb{Z}_p}}=Z^{\mathbb{Z}_p}\amalg\{+\}$$

であるから $(M_{f^+})^{\mathbb{Z}_p}$ は連結ではない．よって上のような G-複体 X は存在しない．

例2 ($N_Y \neq \varepsilon^{-1}(n_G\mathbb{Z})$). $G = \mathbb{Z}_{pq}$ とし、V をG-表現空間でその単位球面 $S(V)$ 上に G が自由に作用するものとする. $Y = S(V \oplus \mathbb{R})$ とおく, ただし $\mathbb{R}$ は1次元G-表現空間で自明なG-作用を持つものである. この時 Y^G は2点から成り、$n_G = 0$, $\varepsilon^{-1}(n_G\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ である. 一方 N_Y は§3の定義と Oliver-Petrie [3] の Proposition 2.6 から $\{0\}$ であることがわかる. よってこの場合 $N_Y \neq \varepsilon^{-1}(n_G\mathbb{Z})$ である.

例3 (定理2 (ii) の応用). G を少なくとも3つの巡回群でないシロー部分群を持つ可換群 (たとえば $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_r \oplus \mathbb{Z}_r$, r は p および q と異なる素数) とする. この時 $G \notin \mathcal{G}$ で $n_G = 1$ である. V を複素G-表現空間とし, $Y = P(V) = S(V)/S^1$, $S^1 \subset \mathbb{C}$, とおく. この時任意の複体 F' と写像 f': $F' \to Y^G$ に対してG-複体 X と pseudo-equivalence $f: X \to Y$ で $X^G = F'$, $f^G = f'$ をみたすものが存在する.

更に $\dim Y^G = \dim F' = 0$ であれば, equivariant thickening により, 上の X は (境界の

ある）コンパクトG－多様体でとれる.

§3. Definition of N_Y

以下の概念，記号の多くは Oliver－Petrie [3] による. 紹介を兼ねて復習をする.

Y をG－複体, $\mathcal{S}(G)$ を G の部分群の全体, $\mathcal{S}(Y)$ を Y の（G－不変とは限らない）部分複体の全体とする. $\mathcal{S}(G)$ は inner automorphism によって与えられるG－作用を持ち, $\mathcal{S}(Y)$ は Y 上のG－作用から誘導されるG－作用を持つ. $\mathcal{S}(G)\times\mathcal{S}(Y)$ には対角作用が入る. $\mathcal{S}(G)\times\mathcal{S}(Y)$ から $\mathcal{S}(G)$ への projection を ρ で, $\mathcal{S}(Y)$ への projection を $|\cdot|$ で表す. Y から得られる G－poset $\Pi(Y)$ とは,

$$\{(H, X)\in\mathcal{S}(G)\times\mathcal{S}(Y) \mid H\in\mathcal{S}(G),\ X \text{ は } Y^H \text{ の1つの連結成分}\}$$

のことである. $\Pi(Y)$ は $\mathcal{S}(G)\times\mathcal{S}(Y)$ のG－不変な部分集合である. $\Pi=\Pi(Y)$ とおく.

基点 ϱ を持つG－複体 Z は次の条件(i), (ii), (iii) をみたす filtration $\{Z_\alpha \mid \alpha\in\Pi\}$, $Z_\alpha\subset Z$,

$g \in Z_\alpha$, が与えられた時 Π-複体 と呼ばれる.

(i) $Z_{g\alpha} = gZ_\alpha$ for $\forall g \in G$, $\forall \alpha \in \Pi$,

(ii) $Z_\alpha \subseteqq Z_\beta$ if $\alpha \leqq \beta$,

(iii) $Z^H = \bigvee_{\rho(\alpha)=H} Z_\alpha$ for $\forall H \in \mathcal{S}(G)$.

ここで $\alpha \leqq \beta$ は $\rho(\alpha) \supseteqq \rho(\beta)$ かつ $|\alpha| \leqq |\beta|$ を意味する. 2つのΠ-複体 Z と W が同値($Z \sim W$)であるとは, すべての $\alpha \in \Pi$ について $\chi(Z_\alpha) = \chi(W_\alpha)$ が成り立つ時を言う. 同値類の全体からなる集合 $\Omega(G, \Pi)$ は

$$[Z] + [W] = [Z \vee W]$$

により可換群となる. $\Omega(G,\Pi)$ の部分群 $\Delta(G,\Pi)$ が

$$\Delta(G,\Pi) = \{ [Z] \in \Omega(G,\Pi) \mid Z \text{ は 可縮}\Pi\text{-複体} \}$$

により定義される.

これらの概念を Y の普遍被覆空間 $\tilde{Y}$ に適用する. EG を普遍主G-束, $\bar{G} = \pi_1(EG \times_G Y)$ とお

く．$\overline{G}$ は $\overline{Y}$ に標準的に作用する．この作用により．我々は $\overline{G}$-poset $\overline{\Pi}=\Pi(\overline{Y})$ を得る．従って可換群 $\Omega(\overline{G},\overline{\Pi})$ および $\Delta(\overline{G},\overline{\Pi})$ を得る．基点を適当に取れば完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow G=\pi_1(EG/G) \longrightarrow 1$$

が得られる．$\overline{Y}$ から Y への projection p によって準同型写像 $p_{\#}:\Omega(\overline{G},\overline{\Pi}) \longrightarrow \Omega(G,\Pi)$ が誘導される（$\overline{Z}$ を $\overline{\Pi}$ 複体とする時、$p_{\#}([\overline{Z}])=[\overline{Z}/\pi_1(Y)]$)．

補題1．上の $p_{\#}$ は同型写像であり，$p_{\#}(\Delta(\overline{G},\overline{\Pi}))\subset\Delta(G,\Pi)$ である．

準同型写像 $\psi:\Omega(G,\Pi)\longrightarrow\mathbb{Z}^k$ を次式で定義する，ここで k は Y^G の連結成分の個数である．

$$\psi([X])=(\chi(X_{\alpha_1})-1,\ \cdots,\ \chi(X_{\alpha_k})-1),$$

ここで X は Π-複体で，$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ は Y^G の連結成分に対応する Π の元である．

定義.　$N_Y = \psi(p_{\#}(\Delta(\overline{G}, \overline{\Pi})))$.

Oliver-Petrie は $n_Y = \psi(\Delta(G, \Pi))$ と定義した. 補題1により, $n_Y \supsetneqq N_Y$ である.

補題2.　定理2の仮定の下では $n_Y = N_Y$ が成り立つ.

Π-複体 X は $(k-1)$-連結, ここで $k = \dim X$, でかつ $\widetilde{H}_k(X;\mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}[G]$-projective である時 Π-resolution と呼ばれる. $\Omega(G,\Pi)$ の部分群 $\Phi(G,\Pi)$ を

$$\Phi(G,\Pi) = \{[X] \in \Omega(G,\Pi) \mid X \text{ は } \chi(X) = 1 \text{ をみたす } \Pi\text{-resolution}\}$$

で定義する. Oliver-Petrie [3] の Proposition 2.6 の意味において, $\Phi(G,\Pi)$ は計算可能である. そこで $m_Y = \psi(\Phi(G,\Pi))$ とおく. $m_Y \supsetneqq n_Y$ である.

補題3.　$n_Y = m_Y \cap \varepsilon^{-1}(n_G \mathbb{Z})$.

$G \in \mathcal{G}'$ ならば $m(G) = 0$ とおく。$G \in \mathcal{G}'$ ならば $m(G)$ は異なる素数の積で，素数 q に対し

$$q \mid m(G) \Leftrightarrow G \in \mathcal{G}_p{}^q \quad (p \text{ はある素数})$$

をみたすものとする（Oliver [1] Theorem 5 参照）。この時

補題4. $[m_\Upsilon, n_\Upsilon] = n_G / m(G)$.

Oliver は $n_G / m(G) = 1$ or 2 を示した．更に $n_G / m(G) = 2$ となるのは $n_G = 4$ かつ $m(G) = 2$ となる時で，その場合を [2] Theorem 7 で決定している．大ざっぱに言えば，$n_G / m(G)$ はほとんどの場合 1 である．

§4. Outline of the proof

定理1の証明は [0] にある．

G-poset Π の G-不変部分集合は G-family in Π と呼ばれる．G-family $\mathcal{F}$ に対しも Π と同様にその普遍群 $\Omega(G, \mathcal{F})$ が定義され，自然に単型

$j : \Omega(G, \mathcal{F}) \longrightarrow \Omega(G, \Pi)$ が定まる. $\bar{G}$-family $\bar{\mathcal{F}}$ in $\bar{\Pi}$ に対しても $\Omega(\bar{G}, \bar{\mathcal{F}})$ および $J : \Omega(\bar{G}, \bar{\mathcal{F}}) \longrightarrow \Omega(\bar{G}, \bar{\Pi})$ が得られる. $\alpha_i \in \Pi$ で $p(\alpha_i) = G$ をみたすものを1つ固定する.

$$\mathcal{F}_i = \{ \beta \in \Pi \mid \beta \geqq \alpha_i \}$$

$$\bar{\mathcal{F}}_i = \{ \gamma \in \bar{\Pi} \mid \tilde{p}(\gamma) \geqq \alpha_i \}$$

とおく. ただし, $\tilde{p} : \bar{\Pi} \longrightarrow \Pi$ は $p : \bar{Y} \to Y$ から誘導されるものである. 次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\bar{G}, \bar{\mathcal{F}}_i) \arrow[rr, tail, two heads, "id"] \arrow[dr, tail, "J"'] \arrow[dd, tail, two heads, "p_\#"] & & \Omega(\bar{G}, \bar{\mathcal{F}}_i) \arrow[dd, tail, two heads, "p_\#"] \\
& \Omega(\bar{G}, \bar{\Pi}) \arrow[dd, tail, two heads, "p_\#"] & \\
\Omega(G, \mathcal{F}_i) \arrow[rr, tail, two heads, "id"] \arrow[dr, tail, "j"'] \arrow[dd, "\psi"] & & \Omega(G, \mathcal{F}_i) \arrow[dd, "\psi"] \\
& \Omega(G, \Pi) \arrow[ur, two heads, "r"'] \arrow[dd, two heads, "\psi"] & \\
\mathbb{Z} \arrow[rr, tail, two heads, "id"] \arrow[dr, tail] & & \mathbb{Z} \\
& \mathbb{Z}^R \arrow[ur, two heads, "\varepsilon"] &
\end{tikzcd}$$

上の図式で $r : \Omega(G,\Pi) \longrightarrow \Omega(G,\mathcal{F}_i)$ は自然に得られるレトラクションである．この図式の観察と，$K_0(\mathbb{Z}[G])$ に関する簡単な事実等を組み合わせて補題2，3，4 および定理2の証明を得る．定理2（IV）において $G \notin \mathcal{G}_1$ という条件が付いているのは $N_\Upsilon = n_\Upsilon$ を証明するのに Dress の induction technique を用いたためで，おそらく無くても成立するだろう．

References

[0] Morimoto, M.– Iizuka, K. : Extendibility of G-maps to pseudo-equivalences to finite G-CW-complexes whose fundamental groups are finite. to appear in O. J. M. 21.

[1] Oliver, R. : Fixed point set of group actions on finite acyclic complexes. Commentarii math. Helvet. 50, 155-177 (1975).

[2] Oliver, R. : G-actions on disks and permutation representations. II. Math. Z. 157, 237-263 (1977).

[3] Oliver, R.– Petrie, T. : G-CW-surgery and $K_0(\mathbb{Z}G)$. Math. Z. 179, 11-42 (1982).