数理解析研究所講究録
第 501 巻 1983 年 118-135


# Semi-free $S^1$-actions on homotopy spheres and higher dimensional knots

東大 理　桝田 幹也
(Mikiya Masuda)

## §1 序

ホモトピー球面上の smooth $S^1$ 作用を考える際、作用が「free」な場合と、「semi-free」な場合が、最も単純な場合と思われる。「free」の場合、$S^1$-orbit space を考えると、それは、ホモトピー複素射影空間になり、容易に、

$$\text{“ホモトピー } S^{2n+1} \text{ 上の free } S^1 \text{ 作用全体”}$$
$$\updownarrow \ 1:1$$
$$\text{“ホモトピー } \mathbb{C}P^n \text{ 全体”}$$

であることがわかる。この事実に注目し、surgery 理論を用いて、ホモトピー球面上の free $S^1$ 作用が、(可算)無限にあることが示される([Hc])。しかし、残念ながら、この集合には、自然な群構造がない。したがって、(可算)無限にあるとしか言えないし、(中心的な位置にあると思われる)生成元は何かということも無意味な問題である。これに

反して、「semi-free」の場合には、固定点のまわりのequivariant connected sumにより、自然に可換群の構造が入り、その構造や、生成元は何かということを論ずることが出来る。この群のfree partのrankについては、すでに、Browder-Petrie[B]により完全な解答が与えられている。ここでは、free partの生成元について、考えたい。

## §2. 背景

以下、考えるcategoryは$C^\infty$で、manifoldは断わらない限りすべてclosedとし、次の記号を用いる。

- $X \simeq Y \Leftrightarrow$ XとYはホモトピー同値
- $X \cong Y \Leftrightarrow$ XとYはdiffeo.
- $\rho$をX上の群Gの作用としたとき、
  G-fixed point setを$F(\rho, X)$又は$F(G, X)$
  G-orbit spaceを$X/\rho$又は$X/G$と表わす。

<u>定義</u>

$$\Sigma^n_q(S^1) \underset{def}{=} \left\{ (\Sigma, \phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Sigma \simeq S^n \quad (\Sigma\text{: oriented}) \\ \phi\text{: semi-free } S^1\text{-action on } \Sigma \\ \text{s.t. (i) } F(\phi, \Sigma) \cong S^q \\ \text{(ii) (complex) normal bdle of } F(\phi, \Sigma) \text{ is trivial} \end{array} \right\}$$

注 ・ $n-q$ は正の偶数

・ $F(\phi,\Sigma)$ の normal bundle は $S^1$ 作用により、自然に複素構造が入る。

・ 多くの場合 (ii)の条件は満たされている。(例えば、$n-q=2$ 又は 4 のとき、又は後述の例)。

上記の集合は、固定点のまわりの equivariant connected sum により可換群の構造をもつ。この群の free part の rank は、次で与えられる。

<u>定理1</u> (Browder-Petrie [B-P]).

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\Sigma^n_q(S^1) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4*}(\mathbb{C}P^{s-1}\times(D^{q+1},S^q);\mathbb{Z}) - \varepsilon$$

ただし、 $2s=n-q$,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{if } n\equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

これより特に、(1) $n-q=2$ のとき、$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\Sigma^n_q(S^1)=0$ (実は、$\Sigma^n_q(S^1)=0$ for $n\geqq 7$ W. Y. Hsiang [Hy])。

(2) $n-q=4$ のとき、

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\Sigma^n_q(S^1) = \begin{cases} 1 & \text{if } q\equiv 3 \pmod 4 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

この場合、$\Sigma^n_q(S^1)$ は codim 3 高次元 knot group と密接な関係がある。それを述べるために、次の定義をする。

定義:

$$\Sigma^m_q \underset{\text{def}}{=} \left\{ \text{oriented pair } (M,N) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \simeq S^m \\ N \cong S^q \\ N \subset M \ \text{submanifold} \end{array} \right\}$$

さらに、$M \cong S^m$ を要請した $\Sigma^m_q$ の部分集合を、$\Sigma^{m,q}$ とかく。

これらの集合は、$m-q \geq 3$ かつ $q \geq 5$ のとき knot connected sum により、可換群になる。

注意1. $\Sigma^m_q \cong \Sigma^{m,q} \oplus \Theta^m$, ただし $\Theta^m$ はホモトピー $S^m$ 全体のなす群(特に有限群)。

さて、$(\Sigma, \phi)$ を $\Sigma^n_q(S^1)$ の元とするとき、orbit space $\Sigma/\phi$ は、$n-q=4$ のとき、ホモトピー球面になることが、容易にわかる。したがって、pair $(\Sigma/\phi, F(\phi,\Sigma))$ は $\Sigma^m_q$ の元を定める。

定理2 (Levine [L,] 1973) 上で述べた対応

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{q+4}_q(S^1) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \Sigma^{q+3}_q \\ \rotatebox{90}{$\in$} & \Psi & \\ (\Sigma,\phi) & \longmapsto & (\Sigma/\phi,\ F(\phi\Sigma)) \end{array}$$

は同型

一方、knot group $\Sigma_q^{q+3}$ は Levine [$L_2$] により、ホモトピー群の言葉を用いて、ある exact sequence で表わされ（後述）、ある程度わかっている。例えば、

$$\Sigma_q^{q+3} = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \underset{(\text{finite})}{\text{torsion}} & \text{if } q \equiv 3 \pmod 4 \\ \underset{(\text{finite})}{\text{torsion}} & \text{その他} \end{cases}$$

である。この事実と、定理2より $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_q^{q+4}(S^1)$ が決定されるが、これは、Browder-Petrie により得られた前述のものと一致している。

(注) $q=3$ のときには Haefliger により $\Sigma_3^6 \cong \mathbb{Z}$ (i.e. torsionなし)
よって、$\Sigma_3^7(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

一方、最近 M. Davis は次の事を示した。

<u>定理3</u> (Davis [D] 1982) $\Sigma_3^7(S^1)$ の生成元は、$S^4$上の $S^3$-bundle として得られるあるホモトピー $S^7$ 上の自然な semi-free $S^1$ 作用である。

(具体的な構成については [D] を参照してください)。

$\Sigma_q^n(S^1)$ を torsion subgroup でわったものを $\hat{\Sigma}_q^n(S^1)$ と書くことにすると、Davisの定理の一般化として、自然に、

次の問題が考えられる。

$\boxed{\text{問題}}$ $\hat{\Sigma}^n_q(S^1)$ の生成元は何か．

特に $n-q=4$ のときはどうか．

<u>注意2.</u> 一般の $n, q$ に対しては、"一般に" rank が 1 以上となるが、特に $n-q=4$ のときには、上でみたように

$$\hat{\Sigma}^n_q(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q \equiv 3\ (4) \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

## §3. 例.

ホモトピー球面上の semi-free $S^1$ 作用の例として、以下で述べる Brieskorn 上の $S^1$ 作用が有名である。

$$N_\varepsilon := \{(u, v, z_1, \cdots, z_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+3} \mid u^3 + v^{6r-1} + z_1^2 + \cdots + z_{2k}^2 = \varepsilon\} \quad (\varepsilon : \text{十分小})$$

とおくとき、$M^{4k-1}(r) \underset{\mathrm{def}}{=} N_\varepsilon \cap S^{4k+5}$ の diffeo. type は $\varepsilon$ の取り方によらず、次の性質をもつ。

<u>事実</u> $bP^{4m}$ を (4m次元) parallelizable manifold を bound するホモトピー $S^{4m-1}$ 全体とすると、$m \geqq 2$ のとき、有限巡回群で

(1) $M^{4m-1}(r) \in bP^{4m}$

(2) $M^{4m-1}(r) \cong S^{4m-1} \Leftrightarrow b_m | r$ ($b_m$ は $bP^{4m}$ の位数)

この $M^{4k-1}(r)$ 上には次の自然な semi-free $S^1$ 作用がある。

$l<k$, $g=e^{i\theta}\in S^1$ とする。このとき 作用 $\Phi_l$ を

$$\Phi_l(g,z) \underset{def}{=} \left(\begin{array}{c|ccc} I_{2l+2} & & 0 & \\ \hline & D(\theta) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & D(\theta) \end{array}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{2k} \end{pmatrix}$$

と定義する。

ただし、 $I_{2l+2} = (2l+2)$ 次単位行列

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

明らかに、 $F(\Phi_l, M^{4k-1}(r)) = M^{4l-1}(r) \underset{\substack{\uparrow \\ (l\geqq 2\ が必要)}}{\in} bP^{4l}$ .

よく知られているように、固定点の complex normal bundle は trivial である。よって、$\Sigma_q^n(S^1)$ の定義の (ii) の条件は満たされている。 従って、$(M^{4k-1}(r), \Phi_l)$ が $\Sigma_{4l-1}^{4k-1}(S^1)$ の元であるためには、固定点 $M^{4l-1}(r)$ が $S^{4l-1}$ に diffeo. であることが必要十分である。事実 a (2) より、

$$(M^{4k-1}(r), \Phi_l) \in \Sigma_{4l-1}^{4k-1}(S^1) \iff b_l \mid r .$$

注意3. $W^{4k}(r) \underset{def}{=} N_\varepsilon \cap D^{4k+6}$ とすると、これ上にも、semi-free $S^1$ 作用が、同様に定義される。それを $\tilde{\Phi}_l$ とかくと、

・ $\partial(W^{4k}(r), \tilde{\Phi}_l) = (M^{4k-1}(r), \Phi_l)$

- $F(\tilde{\varphi}_\ell, W^{4k}(r)) = W^{4\ell}(r)$,
- $W^{4\ell}(r)$ の complex normal bundle は trivial.

## §4. 結果

__主定理__ 次のような homomorphism $\hat{\beta}$ がある。

$$\hat{\beta}: \Sigma^{4k-1}_{4\ell-1}(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{hom.}$$

s.t. $\hat{\beta}((M^{4k-1}(b_\ell), \varphi_\ell)) = a_\ell$ for $\ell \geq 2$ (up to sign)

ここで、 $a_\ell = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell \text{ is even,} \\ 2 & \text{if } \ell \text{ is odd.} \end{cases}$

__系1.__ $k=\ell+1$, つまり codim 4 の場合、$(M^{4\ell+3}(b_\ell), \varphi_\ell)$ ($\ell \geq 2$) は、$\hat{\Sigma}^{4\ell+3}_{4\ell-1}(S^1)$ ($\cong \mathbb{Z}$) の

(i) 生成元 ($\ell$ が偶数のとき)

(ii) 生成元か生成元の2倍 ($\ell$ が奇数のとき).

又、codim 4 の場合は、knot 群 $\Sigma^{4\ell+2, 4\ell-1}$ と関連があった。一方、この群は、Levine [L2] により、exact sequence

$$0 \to \mathbb{Z} \to \Sigma^{4\ell+2,\, 4\ell-1} \longrightarrow \ker \sigma_\ell \to 0$$

を用いて、表わされている。ここで、$\sigma_\ell$ は inclusion から導かれる自然な homomorphism $\pi_{4\ell-1}(G_3, SO_3) \to \pi_{4\ell-1}(G, SO)$.
しかし、この exact sequence が split しているかどうかについては、知られていないようである。我々の定理は、この splitting に関する情報を与えている

系2. Levine exact sequence $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha_\ell} \Sigma^{4\ell+2, 4\ell-1} \to \ker \sigma_\ell \to 0$ は、$\ell$ が偶数のとき、split.

〈証〉 注意1 と定理2より、$\Sigma^{4\ell+3}_{4\ell-1}(S^1) \cong \Sigma^{4\ell+2, 4\ell-1} \oplus \Theta^{4\ell+2}$
$\hat{\beta}$ は、$\Sigma^{4\ell+3}_{4\ell-1}(S^1)$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism であるが、$\Theta^{4\ell+2}$ は有限群であるから、$\Sigma^{4\ell+2, 4\ell-1}$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism を導く。これも同じ記号 $\hat{\beta}$ で表わすと、$\alpha_\ell$ と $\hat{\beta}$ の定義から、$\hat{\beta} \circ \alpha_\ell(1) = a_\ell$ がわかる。□

注 $\ell = 1$ のとき、上の exact sequence は split していない（実際 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ となる。）。$\ell > 1$ なる奇数のとき、上の exact sequence が split するかどうかは、わからない。

## §5、$\hat{\beta}$の定義の動機.

$\hat{\beta}$の定義の動機となったMontgomery-Yangの対応を.
簡単に復習しよう。まず.

$$\Pi = \{\text{ホモトピー}\ \mathbb{C}P^3\ \text{全体}\}$$ とする。

(実は、この集合は、和が定義できて、可換群になることが、
[M-Y] により、知られている。) $X \in \Pi$ の元とするとき、
$\gamma(X) \in \mathbb{Z}$ が次で定まる。

$$p_1(X) = (4 + 24\gamma(X))\,x^2.$$

ここで、$p_1(X)$ は $X$の first Pontrjagin class で $x$ は、
$H^2(X;\mathbb{Z})$ の生成元。

<u>定理4</u> (Montgomery-Yang, Wall, ----)

$$\Sigma_3^7(S^1) \xrightarrow{\Phi} \Sigma_3^6 = \Sigma^{6,3} \xrightarrow{K} \Pi \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}$$

はすべて、isomorphism.

この定理は、我々にいくつかのことを教えてくれる。
例えば、

(I) $\Sigma_3^7(S^1)$ (又は $\Sigma^{6,3}$) を研究することと、$\Pi$を研究することは同じ.

(II) $\gamma$, 本質的に$\Pi$の(first) Pontrjagin class, は、$\Sigma_3^7(S^1)$ の invariant である。

これら2つの事実は、高次元の場合でもだいたい成立する。それを説明する前に、上の対応をもう少し詳しく見よう。

まず、$\Phi$は定理2で与えられたもの。つまり、orbit space をとる対応。$K$は knot のまわりで、適当な framing を取って、surgery する対応。この順序は、入れかえてもよい。つまり、まず (equivariant) surgery をして、次に orbit space をとっても、同じことである。

$\tilde{S}^{2n-1}$, $\tilde{D}^{2n}$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球面，単位球で、複素数をかけるという $S^1$ 作用をもったものとすると、$\Sigma\in\Sigma_3^7(S^1)$は、

$$\Sigma = D^4\times\tilde{S}^3 \cup_f S^3\times\tilde{D}^4$$

と分解する。

ここで、$f: S^3\times\tilde{S}^3 \longrightarrow S^3\times\tilde{S}^3$ equivariant diffeo. で、$S^3\times\{0\} = F(\Phi,\Sigma)$。今、注意した様に、合成 $K\circ\Phi$ は、次の様に記述できる。

$$\begin{tikzcd}
\Sigma = D^4\times\tilde{S}^3 \cup_f S^3\times\tilde{D}^4 \arrow[d, "\text{equivariant surgery}"] \arrow[dd, bend right=60, "K\circ\Phi"'] \\
\tilde{\Sigma} = D^4\times\tilde{S}^3 \cup_f D^4\times\tilde{S}^3 \arrow[d, "\text{orbit space}"] \\
\tilde{\Sigma}/S^1 = D^4\times S^2 \cup_{f'} D^4\times S^2 \in \Pi.
\end{tikzcd}$$

さて、高次元の場合をみよう。$\Sigma\in\Sigma_q^n(S^1)$ $(n-q=2s)$ とすると、

$$\Sigma = D^{q+1} \times \tilde{S}^{2s-1} \underset{f}{\cup} S^{q} \times \tilde{D}^{2s}$$ と分解する。

$$\downarrow \text{ equivariant surgery}$$

$$\tilde{\Sigma} = D^{q+1} \times \tilde{S}^{2s-1} \underset{f}{\cup} D^{q+1} \times \tilde{S}^{2s-1}$$

$$\downarrow \text{ orbit space.}$$

$$\tilde{\Sigma}/S^1 = D^{q+1} \times \mathbb{C}P^{s-1} \underset{f'}{\cup} D^{q+1} \times \mathbb{C}P^{s-1}$$

高次元の場合，$\Sigma$ に $\tilde{\Sigma}/S^1$ を対応させる対応は，全単射とは言えないが，ある意味で“ほとんど全単射”であることがわかる。これは，(I)の事実に対応している。したがって，$\tilde{\Sigma}/S^1$ の Pontrjagin class たちが，$\Sigma_q^n(S^1)$ の invariant を与えることが予想される。実際，Pontrjagin class を用いて，$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4*}(\mathbb{C}P^{s-1} \times (D^{q+1}, S^q); \mathbb{Z})$ の分，$\Sigma_q^n(S^1)$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism が定義でき，Signature theorem から，多くとも，このうち独立なものは，$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4*}(\mathbb{C}P^{s-1} \times (D^{q+1}, S^q); \mathbb{Z}) - \varepsilon$ 個であることがわかり，これらが実際独立であることは surgery 理論を使って示せる。

## §6. $\hat{\beta}$ の定義

簡単のため，$\Sigma_{4l-1}^{4l+3}(S^1)$ (codim 4) で $l \geq 2$ の場合

のみ扱う。 $(\Sigma,\phi)\in\Sigma^{4\ell+3}_{4\ell-1}(S^1)$ に対し、固定点集合のまわりの equivariant embedding $h: S^{4\ell-1}\times\tilde{D}^4\longrightarrow\Sigma$ を一つ選ぶ。これを用いて、前節で述べた対応により $\tilde{\Sigma}/S^1$ を得る。次の補題は Mayer-Vietoris exact seq. よりすぐ従う。

<u>補題1.</u> $\ell\geqq 2$ のとき $H^*(\tilde{\Sigma}/S^1)\cong H^*(S^{4\ell}\times S^2)$.

<u>定義</u> $\ell\geqq 2$ のとき、

$$\beta((\Sigma,\phi))\underset{def}{=}x\cup p_\ell(\tilde{\Sigma}/S^1)\,[\tilde{\Sigma}/S^1]\in\mathbb{Z}$$

ただし、$x$ は $H^2(\tilde{\Sigma}/S^1;\mathbb{Z})$ の生成元.

(注) 正確には、生成元 $x$ の取り方には、符号のあいまいさがある。それを除くには、向きのことを考慮に入れる必要がある。

<u>補題2.</u> (1) $\beta$ の値は $h$ の取り方によらない。
(2) $\beta:\Sigma^{4\ell+3}_{4\ell-1}(S^1)\longrightarrow\mathbb{Z}$ は homomorphism

<証> 略 □

一般に $\beta$ が全射であることは期待できない。

実際、次のことが示せる。

<u>補題3.</u> $\beta$の値は $(2\ell-1)!\,a_\ell \times \left(\frac{B_\ell a_\ell}{4\ell}\text{の分母}\right)$ $(=d_\ell$とおく$)$
で割れる。ここで $B_\ell$は $\ell$番目のBernoulli数.

〈証〉 $\theta_\ell$を $\tilde{\Sigma}/S^1$ のtangent bundleにassociateした
principal $SO(4\ell+2)$ bundle の $H^{4\ell}(\tilde{\Sigma}/S^1;\mathbb{Z})$ に値をもつ
obstruction classとすると、Kervaire [K] より.

$$P_\ell(\tilde{\Sigma}/S^1) = (2\ell-1)!\,a_\ell\,\theta_\ell \qquad \text{—①}$$

一方、Atiyah-Hirzebruch-Singer より

$$\mathbb{Z} \ni e^{x} \cup \hat{\mathfrak{a}}(\tilde{\Sigma}/S^1)\,[\tilde{\Sigma}/S^1] \qquad (\hat{\mathfrak{a}}(\ )\text{は}\hat{\mathfrak{a}}\text{-class})$$

$$= -\frac{B_\ell}{2\times(2\ell)!}\,x \cup P_\ell(\tilde{\Sigma}/S^1)\,[\tilde{\Sigma}/S^1]$$

$$= -\frac{B_\ell a_\ell}{4\ell}\,x \cup \theta_\ell\,[\tilde{\Sigma}/S^1]$$

$\therefore$ $x \cup \theta_\ell[\tilde{\Sigma}/S^1]$ は $\frac{B_\ell a_\ell}{4\ell}$ の分母で割れる —②

①②より補題を得る。 $\square$

この補題より

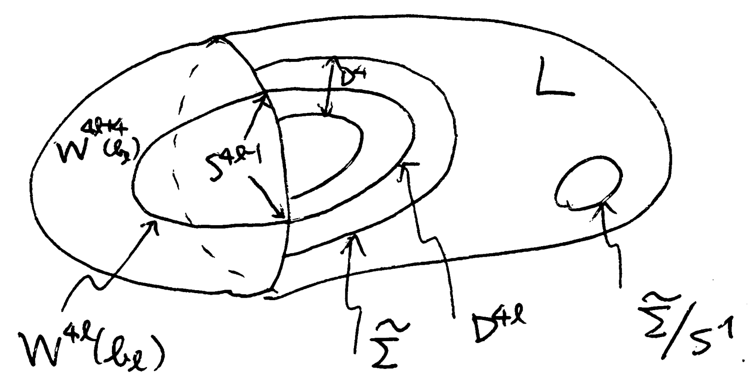
<u>定義</u> $$\hat{\beta}((\Sigma,\phi)) \underset{def}{=} \frac{\beta((\Sigma,\phi))}{d_\ell} \in \mathbb{Z}$$
($d_\ell$は補題3のもの).

## §7. 定理の証明.

$k=l+1$ の場合だけ示す。 まず $(M^{4l+3}(r), \Phi_l)=\partial(W^{4l+4}(r), \tilde{\Phi}_l)$ であった(§3 注意3). 我々の関心は $r=b_l$ のときである。簡単のため $M^{4l+3}(b_l)$ を $\Sigma$, 作用 $\Phi_l$ を $\Phi$ と略記する。計算したいのは 値 $\beta((\Sigma,\Phi)) = x^{\cup}p_l(\tilde{\Sigma}/S^1)\,[\tilde{\Sigma}/S^1]$. そのために次のような closed $S^1$-manifold $X$ を考える。

$L$: $\tilde{\Sigma} \xrightarrow[S^1]{} \tilde{\Sigma}/S^1$ に associate した $D^2$-bundle の total space とする。

$W^{4l+4}(b_l)$ の boundary $M^{4l+3}(b_l)$ の固定点は standard な $S^{4l-1}$ であるから、これに沿って handle $D^{4l}\times\tilde{D}^4$ を equivariant にはりつけることが出来る。これによって出来た $S^1$ manifold $N$ の boundary が、まさに $\tilde{\Sigma}$ であることに注意されたい。 従って $N$ と $L$ をそれぞれの境界に沿ってはりつけることが出来る。これが求める $X$ である。 つまり、 $X = W^{4l+4}(b_l)\cup D^{4l}\times\tilde{D}^4\cup L$

$X =$ 

Xは (4l+4) 次元 closed $S^1$ manifold で、作用は semi-free, 固定点は $W^{4l}(b_l) \cup D^{4l}$ $(=F_{とおく})$ と $\tilde{\Sigma}/S^1$ の2つの連結成分からなる。

さて、Fの complex normal bundle が trivial であることに注意して、G-signature theorem を用いると、

$$\mathrm{Sign}\,X = \mathcal{L}(F)\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2[F] + \mathcal{L}(\tilde{\Sigma}/S^1)\left(\frac{te^{2x}+1}{te^{2x}-1}\right)[\tilde{\Sigma}/S^1]$$

ただし、

tは標準的な複素1次元の $S^1$-module,

$\mathcal{L}(\ )$ は Hirzebruch の $\mathcal{L}$-class.

これに、

$$\begin{cases} \mathrm{Sign}\,F = \mathrm{Sign}\,W^{4l}(b_l) + \mathrm{Sign}\,D^{4l} = 8b_l \\ \mathcal{L}(\tilde{\Sigma}/S^1) = 1 + c_l p_l(\tilde{\Sigma}/S^1) \qquad (c_l = 2^{2l}(2^{2l}-1)B_l/(2l)!) \end{cases}$$

を代入すると、

$$\mathrm{Sign}\,X = 8b_l\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2 + (1 + c_l p_l(\tilde{\Sigma}/S^1))\left(\frac{te^{2x}+1}{te^{2x}-1}\right)[\tilde{\Sigma}/S^1].$$

Sign X は定義より、定数であるから、右辺は $t=1$ の pole を持ってはならない。従って簡単な計算より

$$x \cup p_l(\tilde{\Sigma}/S^1)[\tilde{\Sigma}/S^1] = \frac{8b_l}{c_l}$$ でなければならない。

$\therefore$

$$\hat{\beta}((\Sigma,\phi)) = \frac{\beta((\Sigma,\phi))}{d_l} = \frac{8b_l}{c_l d_l}.$$

これに、

$$\begin{cases} b_\ell = 2^{2\ell-2}(2^{2\ell-1}-1) & \left(\dfrac{4B_\ell}{\ell} \text{の分子}\right) \\ c_\ell = 2^{2\ell}(2^{2\ell-1}-1)\dfrac{B_\ell}{(2\ell)!} & \\ d_\ell = (2\ell-1)!\, a_\ell & \left(\dfrac{B_\ell a_\ell}{4\ell} \text{の分母}\right) \end{cases}$$

を代入すると

$$\hat{\beta}((\Sigma,\phi)) = a_\ell$$

これは、我々の定理を示している。 □

参考文献.


[Hc] W.C. Hsiang, A note on free differentiable actions of $S^1$ and $S^3$ on homotopy spheres, Ann. of Math. 83 (1966)

[B-P] Browder-Petrie, Diffeomorphisms of manifolds and semifree actions on homotopy spheres, Bull. of A.M.S. 77 (1971).

[Hy] W.Y. Hsiang, On the unknottedness of the fixed point set of differentiable circle group actions on spheres — P.A. Smith conjecture, Bull. of A.M.S. 70 (1964).

[$L_1$] Levine, Semi-free circle actions on spheres, Invent. Math. 22 (1973).

[$L_2$] —, A classification of differentiable knots, Ann. of Math. 82 (1965).

[D] M. Davis, Some group actions on homotopy spheres of dimension seven and fifteen, Amer. J. Math 104 (1982).

[M-Y] Montgomery-Yang, Differentiable actions on homotopy seven spheres, Trans. A.M.S. 122 (1966)

[K] Kervaire, A note on obstructions and characteristic classes, Amer. J. Math. 81 (1959).