数理解析研究所講究録
第 503 巻 1983 年 1-18

対称空間上の geodesic flow の完全積分可能性

山形大(理) 井伊 清隆 (Kiyotaka Ii)
山形大(理) 渡辺 伸一 (Shin-ichi Watanabe)

§1. 序

M を Riemann 多様体とする。Riemann 計量を (|) で表わす。M の tangent bundle TM と cotangent bundle T^*M を Riemann 計量によって同一視する。TM は symplectic 多様体である。TM 上の C^∞ 級(実数値)函数の全体 $C^\infty(TM)$ は Poisson algebra の構造をもつ。Poisson bracket を $\{\ ,\ \}$ で表わす。$H_M(v) := \frac{1}{2}(v|v)$ で定義される函数 $H_M \in C^\infty(TM)$ を M の energy 函数という。H_M は geodesic flow を生成する。H_M と Poisson 可換な函数 $f \in C^\infty(TM)$ を (geodesic flow の) 第1積分という。

定義. n 次元 Riemann 多様体 M 上の geodesic flow が完全積分可能とは、次の (i), (ii) をみたす n 個の第1積分 $f_1, \cdots, f_n$ が存在するとき:

(i) $\{f_i, f_j\} = 0, \ \forall i, j$ (Poisson 可換)

(ii) $df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \neq 0$ a.e. on TM (函数的に独立)

注. M および $f_1, \cdots, f_n$ が実解析的のときは、上の (ii) は次の (ii)′ と同値である:

(ii)′ 写像 $(f_1, \cdots, f_n): TM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ の像は開集合 ($\neq \phi$) を含む。

定理 (A. Thimm [5]). 次の等質空間上の geodesic flow は完全積分可能である: (a) 実 Grassmann 多様体 $G_{p,q}(\mathbb{R})$ (b) 複素 Grassmann 多様体 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ (c) $SU(n)/SO(n)$ (d) $P^n(\mathbb{C})$ における distance sphere (e) $SO(n)/SO(n-2)$

本稿では、次の定理の証明を述べる。

定理. 次の対称空間上の geodesic flow は完全積分可能である:

$G_{p,q}(\mathbb{R})$, $SO(2n)/U(n)$, $SO(n)$,

$G_{p,q}(\mathbb{C})$, $SU(n)/SO(n)$, $SU(2n)/Sp(n)$, $SU(n)$.

注 1. $G_{p,q}(\mathbb{R})$, $G_{p,q}(\mathbb{C})$, $SU(n)/SO(n)$ は既に Thimm の定理にあるが、統一的に扱えるのでここにも書いた。

注 2. $SO(n)$, $SU(n)$ については、V. Guillemin が数年前に完全積分可能性を証明しているとの情報を Kostant 氏より受けた。

注 3. A.S. Mishchenko - A.T. Fomenko の仕事についても、砂田氏、橋爪氏その他の方から指摘、教示された。

§2. Poisson algebra $C^\infty(\mathfrak{g})$

G を連結な Lie 群とし、$\mathfrak{g}$ をその Lie algebra とする。$X \in \mathfrak{g}$ をとる。$i_X : T_X\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ を X における $\mathfrak{g}$ の tangent space $T_X\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$ との自然な同一視とする。$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ を Ad-不変、非退化な symmetric bilinear form とする。$\mathfrak{g}$ とその dual space $\mathfrak{g}^*$ を B によって同一視する。$\mathfrak{g}$ 上の C^∞ 級(実数値)函数の全体を $C^\infty(\mathfrak{g})$ で表わす。$f \in C^\infty(\mathfrak{g})$, $X \in \mathfrak{g}$ に対して、$\nabla f(X) := i_X((\mathrm{grad}_B f)_X)$ とおく。Lie-Kostant bracket $\{\ ,\ \} : C^\infty(\mathfrak{g}) \times C^\infty(\mathfrak{g}) \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{g})$ は $\{f_1, f_2\}(X) := B(X, [\nabla f_1(X), \nabla f_2(X)])$ で与えられる。

注. Lie-Kostant bracket は、本来 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 上で以下の

ように Lie bracket の拡張として、より自然に定義されるものである： $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ をとる。$j_\alpha : \mathfrak{g}^* \longrightarrow T_\alpha \mathfrak{g}^*$ を自然な同一視とする。dual map を $j_\alpha^* : T_\alpha^* \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ で表わす。$C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 上の Lie-Kostant bracket は $\{f_1, f_2\}(\alpha) := \alpha([j_\alpha^*((df_1)_\alpha), j_\alpha^*((df_2)_\alpha)])$ で定義される。上記 $C^\infty(\mathfrak{g})$ 上の Lie-Kostant bracket は $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の、B による同一視を介して、$C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 上の それを 引き戻したものである。

$\mathfrak{g}$ 上の多項式函数の全体 $S(\mathfrak{g})$ は $C^\infty(\mathfrak{g})$ の Poisson subalgebra である。

補題 1. (1) G の adjoint 作用は 自然に Poisson algebra $C^\infty(\mathfrak{g})$ および $S(\mathfrak{g})$ の自己同型を引き起こす。

(2) Poisson algebra $S(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ は G-不変な多項式の全体と一致する。

次に、$G = U(n)$ $(SU(n))$, $SO(n)$ の各場合について、$S(\mathfrak{g})$ の可換な Poisson subalgebra を構成する。

$G = U(n)$ $(SU(n))$ の場合： B としては $B(X, Y) := -\mathrm{tr}(XY)$ をとる。 $\mathfrak{u}(n)$ 上の j-th fundamental invariants $F_j^{(n)}$ $(1 \leqq j \leqq n)$ は

$$\det\left(\lambda E_n - \frac{1}{\sqrt{-1}} X\right) = \lambda^n - F_1^{(n)}(X)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n F_n^{(n)}(X)$$

で与えられる。 $F_j^{(n)} \in S(\mathfrak{u}(n))$ である。

補題 2 (Kostant [3], P207 参照).

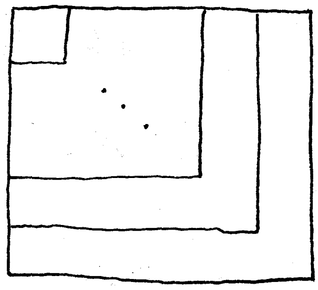
$$Z(\mathfrak{u}(n)) = \mathbb{R}[F_1^{(n)}, \cdots, F_n^{(n)}]$$

$\mathfrak{u}(n)$ の subalgebra の列:

$$\mathfrak{u}(n) \supset \mathfrak{u}(n-1) \supset \cdots \supset \mathfrak{u}(1)$$

および直交射影 $\pi_i : \mathfrak{u}(n) \longrightarrow \mathfrak{u}(i)$

を考える。



$\mathfrak{u}(i)$ 上の j-th fundamental invariants を π_i で引き戻したものを $F_j^{(i)}$ $(1 \leqq j \leqq i)$ で表わす、すなわち、

$$\det\left(\lambda E_i - \frac{1}{\sqrt{-1}} \pi_i(X)\right) = \lambda^i - F_1^{(i)}(X)\lambda^{i-1} + \cdots + (-1)^i F_i^{(i)}(X)$$

$F_j^{(i)} \in S(\mathfrak{u}(n))$ である。 pull-back $\pi_i^* : S(\mathfrak{u}(i)) \longrightarrow S(\mathfrak{u}(n))$ は Poisson algebra の準同型であることに注意すると次を得る。

命題 3. $\Lambda(\mathfrak{u}(n)) := \mathbb{R}[F_j^{(i)} \mid 1 \leqq j \leqq i \leqq n]$ は (maximal) commutative Poisson subalgebra in $S(\mathfrak{u}(n))$ である。

注. $\{F_j^{(i)} \mid 1 \leqq j \leqq i \leqq n\}$ の個数 $= \dfrac{n(n+1)}{2}$
$= \frac{1}{2}(\dim U(n) + \operatorname{rank} U(n))$

$\mathfrak{u}(n)$ 上の実数値連続函数 $A_j^{(i)}$ $(1 \leqq j \leqq i \leqq n)$ を

$$\det\left(\lambda E_i - \frac{1}{\sqrt{-1}}\pi_i(X)\right) = \left(\lambda - A_1^{(i)}(X)\right)\cdots\left(\lambda - A_i^{(i)}(X)\right),$$

$$A_1^{(i)}(X) \leqq A_2^{(i)}(X) \leqq \cdots \leqq A_i^{(i)}(X)$$

で定義する。
連続写像 $A : \mathfrak{u}(n) \longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ を

$$A := (A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \cdots, A_n^{(n)}, A_1^{(n-1)}, \cdots, A_1^{(1)})$$

で定義する。
多項式写像 $F : \mathfrak{u}(n) \longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ を

$$F := (F_1^{(n)}, F_2^{(n)}, \cdots, F_n^{(n)}, F_1^{(n-1)}, \cdots, F_1^{(1)})$$

で定義する。
多項式写像 $S : \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ を

$$S(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)}, a_1^{(n-1)}, \cdots, a_1^{(1)})$$
$$:= (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_n^{(n)}, f_1^{(n-1)}, \cdots, f_1^{(1)})$$

で定義する、ただし $f_j^{(i)}$ は次で与えられるもの：

$$(\lambda - a_1^{(i)})(\lambda - a_2^{(i)}) \cdots (\lambda - a_i^{(i)})$$
$$= \lambda^i - f_1^{(i)} \lambda^{i-1} + \cdots + (-1)^i f_i^{(i)}$$

$\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ の部分集合（凸角領域）D を

$$D := \left\{ (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)}, a_1^{(n-1)}, \cdots, a_1^{(1)}) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \;\middle|\; a_{j-1}^{(i)} \leqq a_{j-1}^{(i-1)} \leqq a_j^{(i)},\ 2 \leqq j \leqq i \leqq n \right\}$$

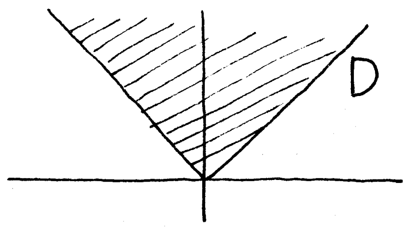
で定義する。

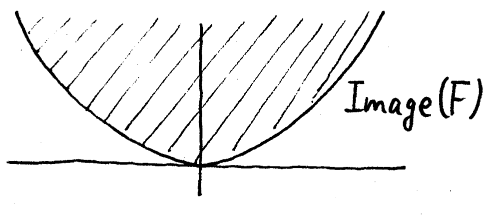
命題 4. (1) $D = \mathrm{Image}(A)$

(2) $S|_D : D \longrightarrow S(D)$ は同相写像

(3) $F = S \circ A$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(n) \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "F"'] & D \arrow[d, "S"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \mathrm{Image}(F) \\ & \rotatebox{90}{$=$} \\ & S(D) \end{tikzcd}$$





系. $\{ F_j^{(i)} \mid 1 \leqq j \leqq i \leqq n \}$ は函数的に（従って代数的にも）独立である。

証明. D は $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ の開集合 $(\neq\phi)$ を含み、$S|D$ は同相写像であるから、$S(D)=\mathrm{Image}(F)$ も $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ の開集合 $(\neq\phi)$ を含む。$F_j^{(i)}$ は実解析的であるから

$$dF_1^{(n)}\wedge dF_2^{(n)}\wedge\cdots\wedge dF_n^{(n)}\wedge dF_1^{(n-1)}\wedge\cdots\wedge dF_1^{(1)}\neq 0\quad a.e.$$

を得る。

$G=SO(n)$ の場合：　B としては $B(X,Y):=-\mathrm{tr}(XY)$ をとる。$\mathfrak{so}(n)$ 上の fundamental invariants $F_{2j}^{(n)}\in S(\mathfrak{so}(n))$　$(1\leqq j\leqq r,\ r:=[\frac{n}{2}])$ は、

$$\det(E_n+\lambda X)$$

$$=\begin{cases}1+F_2^{(n)}(X)\lambda^2+\cdots+F_{2r-2}^{(n)}(X)\lambda^{2r-2}+F_{2r}^{(n)}(X)\lambda^{2r} \\ \qquad (n\,;\text{奇数のとき}) \\ 1+F_2^{(n)}(X)\lambda^2+\cdots+F_{2r-2}^{(n)}(X)\lambda^{2r-2}+\left(F_{2r}^{(n)}(X)\right)^2\lambda^{2r} \\ \qquad (n\,;\text{偶数のとき})\end{cases}$$

で与えられる。

$$Z(\mathfrak{so}(n))=\mathbb{R}[F_2^{(n)},F_4^{(n)},\cdots,F_{2r}^{(n)}]$$

である。$\mathfrak{so}(n)$ の subalgebra の列：$\mathfrak{so}(n)\supset\mathfrak{so}(n-1)\supset\cdots\supset\mathfrak{so}(2)$ および直交射影 $\pi_i:\mathfrak{so}(n)\longrightarrow\mathfrak{so}(i)$ を考える。$U(n)$ の場合と同様にして次を得る。

命題 3'. $\Lambda(\mathfrak{so}(n)):=\mathbb{R}[F_{2j}^{(i)}\mid 1\leqq j\leqq[\frac{i}{2}],2\leqq i\leqq n]$

は (maximal) commutative Poisson subalgebra in $S(so(n))$ である。

$so(n)$ 上の実数値連続函数 $A_j^{(i)}$ $(1 \leqq j \leqq [\frac{i}{2}],$ $2 \leqq i \leqq n)$ を

$$\det\left(E_i + \lambda \pi_i(X)\right) = \prod_{j=1}^{[i/2]} \left(1 + \left(A_j^{(i)}(X)\right)^2 \lambda^2\right),$$

$$A_1^{(i)} \geqq A_2^{(i)} \geqq \cdots \geqq A_{[i/2]}^{(i)} \geqq 0 \quad (i\,;\,奇数のとき)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1^{(i)} \geqq A_2^{(i)} \geqq \cdots \geqq A_{[i/2]-1}^{(i)} \geqq \left|A_{[i/2]}^{(i)}\right| \\ A_1^{(i)} A_2^{(i)} \cdots A_{[i/2]}^{(i)} = F_{2[i/2]}^{(i)} \end{array}\right\} (i\,;\,偶数のとき)$$

で定義する。

$$d := \sum_{i=2}^{n} \left[\frac{i}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} + \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

とおき 連続写像 $A : so(n) \longrightarrow \mathbb{R}^d$、多項式写像 $F : so(n) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を $U(n)$ の場合と同様に定義する。

多項式写像 $S : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$S\left(a_j^{(i)} \,\middle|\, 1 \leqq j \leqq \left[\frac{i}{2}\right],\ 2 \leqq i \leqq n\right)$$
$$:= \left(f_j^{(i)} \,\middle|\, 1 \leqq j \leqq \left[\frac{i}{2}\right],\ 2 \leqq i \leqq n\right)$$

で定義する、ただし $f_j^{(i)}$ $(1 \leqq j < \frac{i}{2})$ は $(x_1^{(i)})^2, \cdots,$ $(x_{[i/2]}^{(i)})^2$ の j-th fundamental polynomial とし、更に i が

偶数のときには $f_{i/2}^{(i)} := a_1^{(i)} \cdots a_{i/2}^{(i)}$ とする。
$\mathbb{R}^d$ の部分集合（凸角領域）D を

$D := \{ (a_j^{(i)}) \in \mathbb{R}^d \mid a_1^{(i)} \geqq a_1^{(i-1)} \geqq a_2^{(i)} \geqq a_2^{(i-1)} \geqq \cdots \geqq a_{[(i-1)/2]}^{(i)} \geqq | a_{[i/2]}^{(i-1)} |$ （i；奇数のとき），$a_1^{(i)} \geqq a_1^{(i-1)} \geqq a_2^{(i)} \geqq a_2^{(i-1)} \geqq \cdots \geqq a_{[(i-1)/2]}^{(i-1)} \geqq | a_{i/2}^{(i)} |$ （i；偶数のとき），$2 \leqq i \leqq n \}$

で定義する。このとき、命題 4 およびその系と同様の事実が成り立つ。

§3. Moment map

M を Riemann 多様体、G を Lie 群、$\mathfrak{g}$ をその Lie algebra とする。$\varphi : G \times M \longrightarrow M$ を C^∞-action とする。$X \in \mathfrak{g}$ に対して、M 上の vector field $\tilde{X}$ が

$$\tilde{X}_m f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \varphi(e^{tX}, m), \ \forall f \in C^\infty(M), \forall m \in M$$

によって定義される。TM と T^*M、$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ をそれぞれ同一視する。φ は symplectic action $\Phi : G \times TM \longrightarrow TM$, $\Phi_g = (\varphi_{g^{-1}})^*$, を引き起こす。

補題 5. Φ の moment map $\mu : TM \longrightarrow \mathfrak{g}$ は $B(\mu(v), X) = (v \mid \tilde{X}_m)$, $\forall v \in T_m M$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, で与え

られる。 μ は C^∞-写像である。

補題 6 (Guillemin-Sternberg [1], P231 参照).
pull-back $\mu^* : C^\infty(\mathfrak{g}) \longrightarrow C^\infty(TM)$ は Poisson algebra の準同型である。

以下、$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ は Ad-不変、正定値な symmetric bilinear form とする。 K を G の閉部分群、$\mathfrak{k}$ をその Lie algebra とする。 $\mathfrak{m} := \mathfrak{k}^\perp$ とおく。等質空間 $M := G/K$ を考える。 $\pi : G \longrightarrow M$ を射影とする。M の Riemann 計量 $(\ |\ )$ は B から誘導されたものとする。$\varphi : G \times M \longrightarrow M$ を $\pi \circ L_g = \varphi_g \circ \pi$ で定義する。

補題 7. φ によって引き起こされる symplectic action $\Phi : G \times TM \longrightarrow TM$ の moment map $\mu : TM \longrightarrow \mathfrak{g}$ は $\mu(\varphi_{g*} \circ \pi_*(X)) = Ad_g(X)$, $X \in \mathfrak{m}$, $g \in G$, で与えられる。

§4. 対称空間

Mを主定理にある対称空間とし、G を対応する Lie 群と

する。

$$
\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "F=(F_j^{(i)})"'] & D \arrow[d, "S"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& & \mathbb{R}^{\frac{1}{2}(\dim G + \mathrm{rank}\, G)}
\end{tikzcd}
$$

μ による $F_j^{(i)}$ の pull-back により、TM 上の実解析的函数 $f_j^{(i)} := F_j^{(i)} \circ \mu \in C^\infty(TM)$ が得られる。命題 3、命題 3′ および補題 6 により $\{f_j^{(i)}\}$ は Poisson 可換である。各々の M について Image$(A\circ\mu)$ を調べることによって $\{f_j^{(i)}\}$ の中から独立なものを選び出すことが出来る。

(I) 複素 Grassmann 多様体 $M = G_{p,q}(\mathbb{C})$
$= U(n)/U(p)\times U(q) \quad (1 \leqq p \leqq q,\ p+q=n)$

補題 8.

$$
\mathrm{Image}(A\circ\mu) = \left\{ (a_j^{(i)}) \in D \;\middle|\; a_i^{(n)} + a_{n-i+1}^{(n)} = a_j^{(n)} = 0,\ 1 \leqq i \leqq p,\ p < j \leqq n-p \right\}
$$

定理 9. TM 上の次の $2pq$ $(=\dim M)$ 個の

函数は函数的に独立である。

$$f_{2j}^{(n)} \quad (1 \leqq j \leqq p),$$
$$f_j^{(i)} \quad (2p \leqq i < n,\ 1 \leqq j \leqq 2p),$$
$$f_j^{(i)} \quad (1 \leqq i < 2p,\ 1 \leqq j \leqq i).$$

これ以外の $f_j^{(i)}$ は恒等的に 0 である。

M の energy 函数 H_M は定数倍を無視して $f_2^{(n)}$ に一致する。 他の対称空間についても $H_M \in \mathbb{R}[f_2^{(n)}]$ または $H_M \in \mathbb{R}[f_1^{(n)}, f_2^{(n)}]$ である。

系． 複素 Grassmann 多様体上の *geodesic flow* は完全積分可能である。

(II) $M = SU(n)/SO(n)$

補題 10.

$$\mathrm{Image}(A \circ \mu) = \{ (a_j^{(i)}) \in D \mid a_1^{(n)} + \cdots + a_n^{(n)} = 0 \}$$

定理 11. TM 上の $f_1^{(n)}$ 以外の $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ ($= \dim M$) 個の $f_j^{(i)}$ は函数的に独立である。$f_1^{(n)}$ は恒等的に 0 である。

(Ⅲ) $M = SU(2n)/Sp(n)$

補題 12.

$$\mathrm{Image}(A\circ\mu) = \left\{ (a_j^{(i)}) \in D \;\middle|\; a_{2i-1}^{(2n)} = a_{2i}^{(2n)},\ 1 \leqq i \leqq n \right\}$$

定理 13. TM上の次の $n(2n-1)-1$ $(= \dim M)$ 個の函数は函数的に独立である。

$f_i^{(2n)}$ $(1 < i \leqq n)$,

$f_i^{(2n-1)}$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$,

$f_j^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq n-2,\ 1 \leqq j \leqq i)$.

これ以外の $f_j^{(i)}$ は上記の函数の多項式として表わせる。

(IV) $M = G_{p,q}(\mathbb{R}) = SO(n)/S(O(p)\times O(q))$ $(1 \leqq p \leqq q,\ p+q=n)$

補題 14.

$$\mathrm{Image}(A\circ\mu) = \left\{ (a_j^{(i)}) \in D \;\middle|\; a_j^{(n)} = 0,\ p < j \leqq \left[\tfrac{n}{2}\right] \right\}$$

定理 15. TM上の次の pq $(= \dim M)$ 個の函数は函数的に独立である。

$f_{2j}^{(i)}$ $(2p \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq p)$,

$$f_{2j}^{(i)} \quad (2 \leqq i < 2p,\ 1 \leqq j \leqq [\tfrac{i}{2}]).$$

これ以外の $f_j^{(i)}$ は恒等的に 0 である。

(V) $M = SO(2n)/U(n)$

補題16.

$$\mathrm{Image}(A \circ \mu) = \begin{cases} \{(a_j^{(i)}) \in D \mid a_{2j-1}^{(2n)} = a_{2j}^{(2n)},\ 1 \leqq j \leqq \frac{n}{2}\} & (n;\text{偶数のとき}) \\ \{(a_j^{(i)}) \in D \mid a_{2j-1}^{(2n)} = a_{2j}^{(2n)},\ 1 \leqq j \leqq [\frac{n}{2}],\ x_n^{(2n)} = 0\} & (n;\text{奇数のとき}) \end{cases}$$

定理17. TM 上の次の $n(n-1)$ $(= \dim M)$ 個の関数は関数的に独立である。

$$f_{2j}^{(2n)} \quad (1 \leqq j \leqq [\tfrac{n}{2}]),$$
$$f_{2j}^{(2n-1)} \quad (1 \leqq j \leqq [\tfrac{n-1}{2}]),$$
$$f_{2j}^{(i)} \quad (2 \leqq i \leqq 2n-2,\ 1 \leqq j \leqq [\tfrac{i}{2}]).$$

(VI) $M = SU(n)$

この場合には、群 $SU(n) \times SU(n)$ の M への action
$\varphi : (SU(n) \times SU(n)) \times M \longrightarrow M$; $\varphi((g,h),x) := gxh^{-1}$
を考える。対応する moment map $\mu : TM \longrightarrow \mathfrak{su}(n) \times \mathfrak{su}(n)$

は $\mu(L_{x*}(X)) = (Ad_x(X), -X)$, $x \in M$, $X \in su(n)$,
で与えられる。

補題 18.

$$\mathrm{Image}((A\times A)\circ\mu) = \{(a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \in D\times D \mid a_j^{(n)} + b_{n-j+1}^{(n)} = 0,\ 1 \leqq j \leqq n\}$$

$\mu_1, \mu_2 : TM \longrightarrow su(n)$ を $\mu(v) = (\mu_1(v), \mu_2(v))$, $v \in TM$, で定義する。 $f_j^{(i)} := F_j^{(i)}\circ\mu_1$, $g_j^{(i)} := F_j^{(i)}\circ\mu_2$ とおく。

定理 19. TM 上の次の n^2-1 ($= \dim M$) 個の函数は函数的に独立である。

$$f_j^{(n)} \quad (2 \leqq j \leqq n),$$
$$f_j^{(i)} \quad (1 \leqq i \leqq n-1,\ 1 \leqq j \leqq i),$$
$$g_j^{(i)} \quad (1 \leqq i \leqq n-1,\ 1 \leqq j \leqq i).$$

(VII) $M = SO(n)$

SU(n) の場合と同様にして次を得る。

補題 20.

$$\mathrm{Image}((A\times A)\circ\mu)$$

$$=\begin{cases}\left\{(a_j^{(i)}, b_j^{(i)})\in D\times D \;\middle|\; a_j^{(n)}=b_j^{(n)},\ 1\leqq j\leqq\left[\frac{n}{2}\right]\right\} & (n\text{；奇数のとき})\\ \left\{(a_j^{(i)}, b_j^{(i)})\in D\times D \;\middle|\; a_j^{(n)}=b_j^{(n)},\ 1\leqq j\leqq\frac{n}{2},\ a_{n/2}^{(n)}=-b_{n/2}^{(n)}\right\} & (n\text{；偶数のとき})\end{cases}$$

定理 21. TM 上の次の $\frac{n(n-1)}{2}$ $(=\dim M)$ 個の函数は函数的に独立である。

$$f_{2j}^{(n)}\quad\left(1\leqq j\leqq\left[\frac{n}{2}\right]\right),$$
$$f_{2j}^{(i)}\quad\left(2\leqq i<n,\ 1\leqq j\leqq\left[\frac{i}{2}\right]\right),$$
$$g_{2j}^{(i)}\quad\left(2\leqq i<n,\ 1\leqq j\leqq\left[\frac{i}{2}\right]\right).$$

文　献

[1] V. Guillemin - S. Sternberg, *The moment map and collective motion*, Ann. Phys. 127 (1980), 220-253.

[2] K. Ii - S. Watanabe, *Complete integrability of the geodesic flows on symmetric spaces* (to appear).

[3] B. Kostant, The solution to a generalized Toda lattice and representation theory, Adv. Math. 34 (1979), 195-338.

[4] A.S. Mishchenko, Integration of geodesic flows on symmetric spaces, Math. Notes, 31 (1982), 132-134.

[5] A. Thimm, Über die Integrabilität geodätischer Flüsse auf homogenen Räumen, Dissertation, Bonn, 1980.