数理解析研究所講究録
第 503 巻 1983 年 19-35

Kac-Moody group
(Kac-Peterson の仕事の紹介)

名大・理 田中洋平 (Yôhei Tannaka)

complex semi-simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ は、対応するCartan matrix を用いて、生成元と関係式で表示される。又 $\mathfrak{g}$ に対応する simply connected な Lie 群 G は線型代数群の構造をもつ。一方Cartan matrix の条件を少しゆるめて得られる Lie 環が Kac-Moody Lie 環である。

Kac と Peterson ([6],[7]) は Kac-Moody algebra に対応する "代数" 群を定義して、有限次元の場合と類似ないくつかの結果を出した。

ここでは Kac-Moody group の定義, flagvariety, 共役性, Peter-Weyl 型の定理について述べる。

§1. Kac-Moody Lie algebra と Kac-Moody group

$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ ($|I|<\infty$, $a_{ij}\in\mathbb{Z}$) が (広義の) Cartan matrix であるとは次の条件 (1)-(3)

(1) $a_{ii}=2$ $(\forall i\in I)$　(2) $i\neq j$ の時 $a_{ij}\leq 0$

(3) $a_{ij}\neq 0$ なら $a_{ji}\neq 0$

を満たす時にいう。更に symmetrizable であるとは

(4) non-degenerate な対角行列 D で $DA=S$ が対称行列にできるようなものがある。

の成立する時とする。

有限次元 semi-simple Lie algebra から決まる本来の Cartan matrix は上の意味での symmetrizable な Cartan matrix であり、条件(4) の S が positive definite にとれるものとして特徴付けられる。ここではその様な A を finite type と呼ぶ。

<u>Definition of Kac-Moody algebra</u>

$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$: Cartan matrix に対して以下の生成系と基本関係式で定義される Lie algebra を A に対応する Kac-Moody Lie algebra と呼び $\mathfrak{g}(A)$ と書く。

生成元 : $\{h_i, e_i, f_i\}_{i\in I}$

基本関係式 :
$$\begin{cases} [h_i,h_j]=0,\ [h_i,e_j]=a_{ij}e_j,\ [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j \\ [e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i \\ (\mathrm{ad}\,e_i)^{-a_{ij}+1}(e_j)=0 \ (i\neq j),\quad \mathrm{ad}(f_i)^{-a_{ij}+1}(f_j)=0 \ (i\neq j) \end{cases}$$

各 $i\in I$ に対して $\mathfrak{g}_i \underset{\text{def.}}{=} \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}f_i$ は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ に同型な $\mathfrak{g}(A)$ の subalgebra である。A が decomposable な時、即ちある置換行列 P があって

$$PAP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

となれば $\mathfrak{g}(A) \cong \mathfrak{g}(B) \oplus \mathfrak{g}(C)$ である。以後 A は symmetrizable で indecomposable とする。

$\Pi = \{\alpha_i \mid i\in I\}$ を I で index された集合とし、

$Q = \mathbb{Z}\Pi = \{\sum_{i\in I} n_i\alpha_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$ とおく。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ は $\deg e_i = \alpha_i$, $\deg f_i = -\alpha_i$, $\deg h_i = 0$ により Q-graded になる。

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in Q} \mathfrak{g}_\alpha$$

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} = \sum_{i\in I} \mathbb{C}h_i$ で、各 $\mathfrak{g}_\alpha$ は ad $\mathfrak{h}$-同時固有空間になる。

$\Delta \underset{\text{def.}}{=} \{\alpha\in Q\setminus\{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ を root 系と呼ぶ。

$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ (disj.) ここで $\Delta_+ = \Delta \cap \{\sum n_i\alpha_i \mid n_i \geq 0\}$, $\Delta_- = -\Delta_+$

$r_i \in GL(\mathfrak{h})$ $(i\in I)$ を

$r_i(h_j) = h_j - a_{ji}h_i$ $(j\in I)$ と定義する。

$W = \langle r_i \mid i\in I\rangle$ を Weyl group と呼ぶ。

$(W, \{r_i \mid i\in I\})$ は Coxeter 系になる。W は Q にも作用する。

$r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i$ $(j\in I)$

$\Delta^R \underset{\text{def.}}{=} W(\Pi)$ の元を real root

$\Delta^I \underset{\text{def.}}{=} \Delta \setminus \Delta^R$ の元を imaginary root と呼ぶ。

$\alpha \in \Delta^R$ に対して $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ である。

$\mathfrak{g}$-module (π, V) が integrable であるとは、任意の $e \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta^R$ に対して、$\pi(e)$ が locally nilpotent である時にいう。

(この条件は $\alpha \in \Pi$ に対して成り立てば十分である。)

<u>Definition of Kac-Moody group</u>

G^* : 加法群 $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta^R)$ の free group

$i_\alpha : \mathfrak{g}_\alpha \to G^*$ を cannonical inclusion とする。

(π, V) : integrable $\mathfrak{g}$-module に対して

$G^* \xrightarrow{\pi^*} GL(V)$ を

$$\pi^*(i_\alpha(e)) = \exp(\pi(e)) \quad (e \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Delta^R)$$

で定める。

$$G^* \supset N^* = \bigcap_{\substack{(\pi, V) \\ \text{integrable} \\ \text{module}}} \operatorname{Ker}(\pi^*)$$

$$G = G(A) \underset{\text{def.}}{=} G^*/N^*$$

を A に対応する Kac-Moody group と呼ぶ。

$q : G^* \to G$ を cannonical projection とする。$e \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して $(\alpha \in \Delta^R)$

$x_\alpha(e) \underset{\text{def.}}{=} q(i_\alpha(e))$, $\quad U_\alpha \underset{\text{def.}}{=} x_\alpha(\mathfrak{g}_\alpha)$ とおく。

U_αは additive なGの1-parameter subgroupである。

Gは U_α $(\alpha \in \pm\Pi)$で生成され，$[G, G] = G$となる。

$$U_\pm \underset{\mathrm{def.}}{=} \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Delta^R{}_\pm \rangle \quad (複号同順)$$

とおく。ここで $\Delta^R_\pm = \Delta^R \cap \Delta_\pm$

例 1) finite type

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$：有限次元 $\Longleftrightarrow$ A：finite type

有限次元の complex simple Lie algebraは全てこの様にして得られる。$\mathfrak{h}$ は Cartan subalgebraで，Δは$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$に関する本来の意味でのルート系と同一視できる。$\Delta^R = \Delta$となる。$(\pi, V)$を integrable $\mathfrak{g}$-加群とすれば $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ の作用はlocally finite. 従って Vは有限次既約表現の和になる。$\mathfrak{g}$に対応する simply connectedな simple Lie group$\tilde{G}$は 各 $\alpha \in \Delta$ に対応する additiveな 1-parameter subgroup y_αで生成される。 Kac-Moody Lie group G の 1-parameter subgr. U_α, U_βの commutator relation は 対応するy_α, y_βで同じになる。これよりGは $\tilde{G}$ に同型である事が示される。(Cf. [13]). U_-はU_+に共役で，U_+は maximal な unipotent subgroupである。

例 2) affinte type

Aがaffine typeとは次が成り立つ時で，$\mathfrak{g}(A)$をaffine Lie alg.と呼ぶ。

(#) 条件(4)の A が singular な positive semi-definite matrix になるように D をとる事ができる。

extended Cartan matrix $A = \tilde{X}_\ell$ は affine type である。即ち $\Delta^{(0)}$ を type X_ℓ の root 系、$\Pi^{(0)} = \{\alpha_1^{(0)}, \cdots, \alpha_\ell^{(0)}\}$ をその simple root 系、$\phi = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i^{(0)}$ を highest root $\alpha_0^{(0)} = -\phi$ とおいて

$$a_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i^{(0)}, \alpha_j^{(0)} \rangle}{\langle \alpha_i^{(0)}, \alpha_i^{(0)} \rangle} \qquad (i, j = 0, 1, \cdots, \ell)$$

で与えられる。$X_\ell^{(1)}$ 型と呼ぶ。この時 $\mathfrak{g}(A)$ は次の様な realization をもつ。

$\mathfrak{g}^{(0)}$ を type X_ℓ の simple Lie algebra とする。

$$\mathfrak{g}(A) = \mathbb{C} \cdot c \oplus \mathfrak{g}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$$

c は $\mathfrak{g}(A)$ の center で

$$[X \otimes t^m, Y \otimes t^n] = m \delta_{m,-n} \langle X, Y \rangle c + [X, Y] \otimes t^{m+n}$$

$$(X, Y \in \mathfrak{g}^{(0)},\ m, n \in \mathbb{Z},\ \langle\ ,\ \rangle \text{ は } \mathfrak{g}^{0} \text{ の Killing form})$$

$\mathfrak{h} = \mathbb{C} c + \mathfrak{h}^{(0)} \otimes 1$ ($\mathfrak{h}^{(0)}$ は $\mathfrak{g}^{(0)}$ の Cartan subalgebra)

$\alpha_i^{(0)}$ を α_i $(i = 1, \cdots, \ell)$ と同一視することにより、$\Pi^{(0)} \subset \Pi$, $\Delta^{(0)} \subset \Delta$ となる。

$\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i = \alpha_0 + \phi$ は imaginary root で

$$\Delta^I = \mathbb{Z}\delta \setminus \{0\} \qquad \mathfrak{g}_{n\delta} = \mathfrak{h}^{(0)} \otimes t^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

$$\Delta^R = \Delta^{(0)} + \mathbb{Z}\delta \qquad \mathfrak{g}_{\alpha + n\delta} = \mathfrak{g}_\alpha^{(0)} \otimes t^n \quad (\alpha \in \Delta^{(0)}, n \in \mathbb{Z})$$

$\underline{\underline{G}}$ を $\mathfrak{g}^{(0)}$ に対応する simply conn.な simple algebraic group scheme
$\underline{\underline{U}}_\alpha$ ($\alpha\in\Delta^{(0)}$) を α に対応する $\underline{\underline{G}}$ の unipotent subgroup scheme
$\underline{\underline{U}}_\pm$ を $\Delta_\pm$ に対応した unipotent subgroup scheme とする。
$\mathfrak{g}^{(0)}$ の有限次表現 $(\pi^{(0)}, V)$ は $\mathfrak{g}/\mathbb{C}c \cong \mathfrak{g}^{(0)}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ の
表現 $(\pi, V\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ を定め、これは integrable な $\mathfrak{g}$-module である。これより、Kac-Moody group $G=G(A)$ から $\underline{\underline{G}}(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ への homomorphism ϕ で

$$\phi(U_{\alpha+n\delta}) = \{u_\alpha(at^n)\in\underline{\underline{U}}_\alpha(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \mid a\in\mathbb{C}\}$$
$$(\alpha\in\Delta^{(0)},\ n\in\mathbb{Z})$$

となるものが存在する。ϕ は全射で、$\mathrm{Ker}\,\phi\cong\mathbb{C}^*$ は G の center である事が示される。この ϕ によって

$$U_+ \cong \{g(t)\in\underline{\underline{G}}(\mathbb{C}[t]) \mid g(0)\in\underline{\underline{U}}_+(\mathbb{C})\}$$
$$U_- \cong \{g(t^{-1})\in\underline{\underline{G}}(\mathbb{C}[t^{-1}]) \mid g(0)\in\underline{\underline{U}}_-(\mathbb{C})\}$$

となる。例えば $A_\ell^{(1)}$ 型の場合

$$\underline{\underline{G}}=SL_{\ell+1} \qquad \underline{\underline{U}}_+=\left\{\begin{pmatrix}1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\right\},\ \underline{\underline{U}}_-=\left\{\begin{pmatrix}1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$G\supset U_+ = \begin{pmatrix}1+t\mathbb{C}[t] & & \mathbb{C}[t] \\ & \ddots & \\ t\mathbb{C}[t] & & 1+t\mathbb{C}[t]\end{pmatrix}$$

$$U_- = \begin{pmatrix}1+t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] & & t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] \\ & \ddots & \\ \mathbb{C}[t^{-1}] & & 1+t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]\end{pmatrix}$$

§2. flag variety，共役性

2.1. 各$i \in I$に対し，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$より

$\phi_i : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow G$ が定まる。

$$\begin{cases} \phi_i\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = x_{\alpha_i}(a e_i) \\ \phi_i\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\right) = x_{-\alpha_i}(a f_i) \end{cases} \quad a \in \mathbb{C} \text{ となる。}$$

$G_i \underset{\text{def.}}{=} \operatorname{Im}\phi_i$，　$H_i \underset{\text{def.}}{=} \phi_i\left(\left\{\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}^*\right\}\right)$

$N_i \underset{\text{def.}}{=} N_{G_i}(H_i)$，　$H \underset{\text{def.}}{=} \langle H_i \rangle$，　$N \underset{\text{def.}}{=} \langle N_i \rangle$ とおく。

Hは$U_\pm$をnormalizeする。$B_\pm \underset{\text{def.}}{=} \langle H, U_\pm \rangle = H \cdot U_\pm$ とおく。

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & N/H \\ \cup\!\!\!\! & & \cup\!\!\!\! \\ r_i & \longmapsto & N_i \setminus H / H \end{array}$$ は同型写像になる。

<u>Th. 1</u>　(1) (G, B_+, N, S)はTits systemである。

(2) $I \supset X$に対応するparabolic subgroupをP_X，Wの部分群W_Xとすると，

$$G = \bigcup_{\substack{w \in W/W_X \\ (\text{disjoint})}} B_+ w P_X \qquad \text{(Bruhat 分解)}$$

$$G = \bigcup_{w \in W/W_X} B_- w P_X \qquad \text{(Birkoff 分解)}$$

注) Th 1(1) から Marcuson([9])，Moody-Teo ([11])，Morita ([12]) の結果が導かれる。

有限型の場合 Bruhat分解とBirkoff分解は同値なもの。Wの最長元w_0によるleft translationで一方から他方が出る。

$P_+ \underset{\mathrm{def}}{=} \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid 0 \leq \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \quad {}^\forall h_i\}$ とおく。

$\Lambda \in P_+$ に対して次の様な integrable $\mathfrak{g}$-module $(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ が同型を除いて unique に存在する。

(cf. Lepowsky [8], Kac [5], etc)

$\left[\begin{array}{l} 0 \neq {}^\exists v_\Lambda \in L(\Lambda) \text{ があって次の性質を満たす。} \\ \quad L(\Lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) v_\Lambda \\ \quad \pi_\Lambda(h) v_\Lambda = \Lambda(h) v_\Lambda \\ \quad \pi_\Lambda(\mathfrak{g}_\alpha) v_\Lambda = 0 \quad ({}^\forall \alpha \in \Delta_+) \end{array}\right.$

$(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ は irreducible である。$\mathfrak{h}$ の作用に関して

$$L(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} L(\Lambda)_\lambda$$

と weight 空間分解ができる。Λ は $L(\Lambda)$ の highest weight になる。

$\lambda \in W(\Lambda)$ なら $L(\Lambda)_\lambda$ は 1 次元になる。

$\Lambda \in P_+$ を固定する。

$$Y \underset{\mathrm{def}}{=} G \cdot [v_\Lambda] \subset \mathbb{P}(L(\Lambda)) \left(= L(\Lambda) \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*\right)$$

を flag variety と呼ぶ。

$\lambda \in W(\Lambda)$ に対し

$$Y_\pm(\lambda) = U_\pm \cdot [v_\lambda] \subset Y$$ とおく。

$(0 \neq v_\lambda \in L(\Lambda)_\lambda)$

$$\mathbb{P}(L(\Lambda)) = \bigcup_{\substack{0 \neq U \subset L(\Lambda) \\ \text{有限次元}}} \mathbb{P}(U)$$

により、$\mathbb{P}(U)$ の Zariski（或いは通常の）topology から $\mathbb{P}(L(\Lambda))$ の位相を定める。

$X=\{i\in I \mid \Lambda(h_i)=0\}$ とすれば $W(\Lambda)$ と W/W_X は bijective に対応する.

$$\begin{array}{ccc} W(\Lambda) & \longleftrightarrow & W/W_X \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ w(\Lambda) & \longleftrightarrow & wW_X \end{array}$$

$W(\Lambda)$ 上の order を対応する W/W_X 上の Bruhat order により定める.

<u>Th. 2</u> (1) $$V=\bigcup_{\substack{\lambda\in W(\Lambda)\\ (\mathrm{disj})}} V_+(\lambda) \qquad (\text{Bruhat 分解})$$

$$=\bigcup_{\substack{\lambda\in W(\Lambda)\\ (\mathrm{disj.})}} V_-(\lambda) \qquad (\text{Birkoff 分解})$$

(2) $$\overline{V_+(\lambda)}=\bigcup_{\lambda\geqq\mu} V_+(\mu)$$

$$\overline{V_-(\lambda)}=\bigcup_{\mu\geqq\lambda} V_-(\mu)$$

$V\ni[v_\Lambda]$ の stabilizer は Parabolic subgroup P_X に等しいので Th 2 の(1) はそれぞれ G の Bruhat 分解, Birkoff 分解に対応している. 各 $V_+(\lambda)$ は有限次元, $V_-(\lambda)$ は finite codimension である。通常の位相から誘導された位相に関して Bruhat 分解は V の cell 分割を与える。従って V の Poincaré 級数は Coxeter system (W,S) の言葉で表わす事ができる。

2.2. $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ とおく。$\mathfrak{g}$ が finite type の時 $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}_\pm$ は それぞれ Cartan subalgebra, Borel subalgebra であり, その $Ad(G)$ 共役類は、各々 maximal $ad_{\mathfrak{g}}$-diagonalizable abelian subalgebra, maximal solvable algebra として特徴付けられた。一般の Kac-Moody Lie algebra でも同様の特徴付けがある。

Th. 3 $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{s}$ が maximal $ad_{\mathfrak{g}}$-diagonalizable abelian subalgebra なら $\mathfrak{s}$ は $Ad(G)$ の元によって $\mathfrak{h}$ にうつされる。(このような $\mathfrak{s}$ を Cartan subalgebra と呼ぶ。)

Cor. $\mathfrak{g}(A_1) \cong \mathfrak{g}(A_2)$ なら A_1 と A_2 は "同じ"
即ち A_1 と A_2 の size は等しく, ある置換行列 P があって
$$A_2 = P A_1 P^{-1}.$$

$\mathfrak{g}$ の subalgebra $\mathfrak{a}$ が completely solvable subalg. とは $ad\,\mathfrak{a}$-stable な subspace の列
$\cdots \mathfrak{a}_{-2} \supset \mathfrak{a}_{-1} \supset \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots$ で $\mathfrak{g} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{a}_i$
$\dim \mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1} = 1$ ($\forall i \in \mathbb{Z}$) となるものがとれる時とする。
maximal completely solvable subalgebra を Borel subalg. と呼ぶ。$\mathfrak{b}_\pm$ は Borel subalg. である。

Th. 4 completely solvable algebra はある Borel alg. に含まれる。Borel subalgebra は $\mathfrak{b}_+$ か $\mathfrak{b}_-$ に $Ad(G)$-共役である。(注: $\dim \mathfrak{g} = \infty$ の時 $\mathfrak{b}_+$ と $\mathfrak{b}_-$ は $Ad(G)$-共役ではない。)

§3. regular functions, Peter-Weyl型の定理

$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$をKac-Moody Lie algebra. Gを対応するKac-Moody Lie groupとする。$\mathfrak{g}$のinvolutiveなautomorphism ωを

$$\omega(e_i)=-f_i,\ \omega(f_i)=-e_i,\ \omega(h_i)=-h_i$$

で定義する。ωはGのautomorphismを引き起すがこれも同じωであらわす。$(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ $(\Lambda\in P_+)$に対して、

$\pi_\Lambda^*=\pi_\Lambda\circ\omega$もintegrable $\mathfrak{g}$-moduleになる。π_Λ^*の表現空間を$L^*(\Lambda)$と表わし、$v_\Lambda(\in L(\Lambda))$に対応する元を$v_\Lambda^*$と書く。$L^*(\Lambda)\times L(\Lambda)$上に$G$-invariantなbilinear form $\langle\ ,\ \rangle$で、$\langle v_\Lambda^*, v_\Lambda\rangle=1$となるものが存在してuniqueである。$\langle\ ,\ \rangle$はnon-degenerateであり$L^*(\Lambda)\subset(L(\Lambda))^*$とみなせる。

real rootの列 $\overline{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_k)$ (重複も許す)に対して写像 $x_{\overline{\beta}}$を

$$\begin{array}{rccc} x_{\overline{\beta}}: & \mathfrak{g}_{\beta_1}\times\cdots\times\mathfrak{g}_{\beta_k} & \longrightarrow & G \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & (e_1,\cdots,e_k) & \longmapsto & x_{\beta_1}(e_1)\cdots x_{\beta_k}(e_k) \end{array}$$

と定める。G上の$\mathbb{C}$-valued function fがweakly-regularであるとは、任意の$\overline{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_k)$ $(\beta_i\in\Delta^R)$に対して $f\circ x_{\overline{\beta}}$が$\mathfrak{g}_{\beta_1}\times\cdots\times\mathfrak{g}_{\beta_k}$上のpolynomial functionになる事をいう。weakly-regular

な function 全体のなす algebra を $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ と書く。
V が integrable $\mathfrak{g}$-module の時. $v^* \in V^*$, $v \in V$ に対して $f_{v^*, v}(g) = \langle v^*, g(v) \rangle$ は weakly-regular function である。

$U_\pm$ の subgroup $U'_\pm$ が large subgroup であるとは 有限個の G の元 $g_1, \cdots, g_m$ があって $\bigcap_{i=1}^{m} g_i U_\pm g_i^{-1} \subset U'_\pm$ となる時にいう。 $f(g) \in \mathbb{C}[G]_{w.r.}$ が (strongly-) regular であるとは. ある large subgroup $U'_\pm \subset U_\pm$ があって

$$f(u_- g u_+) = f(g) \qquad (\forall u_\pm \in U'_\pm, \ \forall g \in G)$$

が成り立つ時にいう。regular function 全体は $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ の subalgebra を成す。これを $\mathbb{C}[G]$ で表わす。
$\mathbb{C}[G]$ は G の元による left multiplication 及び right multiplication に関して閉じている. $v \in L(\Lambda)$ $v^* \in L^*(\Lambda) \subset (L(\Lambda))^*$ をとってくると $f_{v^*, v}(g)$ は regular function になる。

<u>Th.5</u>

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\Lambda \in P_+} L^*(\Lambda) \otimes L(\Lambda) & \longrightarrow & \mathbb{C}[G] \\ \cup & & \cup \\ v^* \otimes v & \longmapsto & f_{v^*, v}(g) \end{array}$$

は $G \times G$-module isomorphism である.
つまり. $\mathbb{C}[G]$ の元は $L(\Lambda)$ の "matrix element" で張られるものとして特徴付けられる。

G が finite type の時 $U_- H U_+ \subset G$ が Zariski

dense である事より $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ は G の座標環に等しくなる。$\{e\}$ は large subgroup なので $\mathbb{C}[G]_{w.r.} = \mathbb{C}[G]$
$L(\Lambda)$ ($\Lambda \in P_+$) は有限次元であるから $L^*(\Lambda) = L(\Lambda)^*$。
Th.5 はこの場合 淡中-duality (或いは Peter-Weyl の定理の algebraic version) に他ならない。

affine type $X_\ell^{(1)}$ の場合, $\underline{G}$ の有理表現

$$\pi : \underline{G} \longrightarrow GL_N$$

より定まる G の表現 $\quad (G/_{center} \cong \underline{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$

$$\pi^G : G \longrightarrow GL_N(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

$$\pi(g) = \Big(\sum_k a_{ij}^{(k)}(g) t^k\Big)_{1 \le i, j \le N}$$

とすれば $a_{ij}^{(k)}(g)$ は weakly regular function で $a_{ij}^{(k)}(cg) = a_{ij}^{(k)}(g)$. (ここで c は G の center の元) となる。ところが Th.5 から $f(cg) = f(g)$ ($\forall c \in \text{center}\, G$) となるような regular function は constant しかない。従って $\mathbb{C}[G]_{w.r.} \supsetneqq \mathbb{C}[G]$。

一般に $\dim \mathfrak{g} = \infty$ の場合は $\mathbb{C}[G]_{w.r.} \supsetneqq \mathbb{C}[G]$ である. $(ad, \mathfrak{g})$ の matrix coefficient は regular function になれない。

$\mathbb{C}[G]^{U_+} = \{ f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gu) = u, \ \forall g \in G, \forall u \in U_+ \}$ は left-multiplication により G-module になる。

$\Lambda \in P_+$ に対して $\theta_\Lambda = f_{v^*_\Lambda, v_\Lambda}$

$$S_\Lambda = \{ f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gb) = \theta_\Lambda(b) f(g) \quad \forall g \in G, \forall b \in B_+ \}.$$

とおく。S_Λ は $\mathbb{C}[G]^{U_+}$ の G-submodule になる。

<u>Th. 6</u> (1) $\mathbb{C}[G]^{U_+} = \bigoplus_{\Lambda \in P_+} S_\Lambda$

(2) $\begin{array}{ccc} L^*(\Lambda) & \longrightarrow & S_\Lambda \\ \cup & & \cup \\ v^* & \longmapsto & f_{v^*, v} \end{array}$ は同型写像.

Gが有限次元の場合 Th. 6 (2) は Borel-Weil の定理である。

§4. 結び

$\bar{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_k)$ $(\beta_i \in \Delta^R)$ に対し $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ の ideal $I_{\bar{\beta}}$ を $I_{\bar{\beta}} \underset{def.}{=} \{ f \in \mathbb{C}[G]_{w.r.} \mid f \circ \chi_{\bar{\beta}} \equiv 0 \text{ on } \mathfrak{g}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{g}_{\beta_k} \}$ とし、$\{ I_{\bar{\beta}} \}$ により $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ を topological alg. とする。Gの点と $\mathrm{Specm}\, \mathbb{C}[G]_{w.r.} = \{$closedな codim 1 のideal全体$\}$ は自然な対応により bijective に対応する. 逆元 $i: G \to G$ かけ算 $m: G \times G \to G$ より誘導される, $i^*: \mathbb{C}[G]_{w.r.} \to \mathbb{C}[G]_{w.r.}$ と $m^*: \mathbb{C}[G]_{w.r.} \to \mathbb{C}[G]_{w.r.} \hat{\otimes} \mathbb{C}[G]_{w.r.}$ によって G の群構造は決定される。$\mathbb{C}[G]$ では Gが無限次元の時うまくいかない。(e.g. $i^*(\mathbb{C}[G]) \not\subset \mathbb{C}[G]$.). 一方 $G \times G$-module として. $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ はよくわからない。(integrable も保証されない)

Hopf alg. str. を持ち、しかも $G\times G$-module としての構造がわかるような うまい $\mathbb{C}[G]$ w.r. の closed subalg. がみつかる事が望ましい。

Garland([2])は affine type の場合に対応する "analytic" な群を構成した。無限次元の場合、応用の為には Kac-Moody group では小さいのかも知れない。(cf. [1])

文献

[1] Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa : Transformation groups for soliton equations, RIMS preprints

[2] Garland : The arithmetic theory of loop groups, Publ. Math. I.H.E.S. vol 52

[3] 岩堀-横沼 : Kac-Moody Lie 環と Macdonald 恒等式, 『数学』 vol 33

[4] Kac : Simple irreducible Lie algebras with finite growth, Math. USSR-Izvestija vol 32 (1968)

[5] —— : Infinite dimensional Lie algebras, Dedekind η-function, classical Möbius function and the very strange formula, Adv. Math. 30

[6] Kac-Peterson : Infinite flagvarieties and conjugacy theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 80 (1983)

[7] Kac-Peterson : Regular functions on certain infinite dimensional groups, to appear in "Arithemetic and Geometry", Birkhäuser, Boston

[8] Lepowsky : Lectures on Kac-Moody Lie algebras, Univ. Paris VI

[9] Marcuson : Tits' systems in generalized non-adjoint Chevalley groups, J. Alg. 34

[10] Moody : Lie algebras associated with generalized Cartan matrices, Bull. A.M.S. 73

[11] Moody-Teo : Tits' systems with crystallographic Weyl groups, J. Alg. 21 (1972)

[12] Morita : Tits' systems in Chevalley groups over Laurent polynomial rings, Tsukuba J. Math. 3

[13] Steinberg : Lectures on Chevalley groups, Yale Univ.