

## 半単純対称空間の Spherical $K$ -type のある種の 具体的表示について

東大 理 松本 久義 (Hisayosi Matumoto)

### §0 Introduction

半単純対称空間の discrete series については、近年において、Flensted-Jensen, 大島-松本らによって rank が 2 以上の場合も含めた、一般的な結果が得られている。これによると、半単純対称空間の discrete series は十分 regular な infinitesimal character を持つ場合は Parthasarathy と Zuckerman が独立に構成した Non-trivial  $(\mathfrak{g}, K)$ -Cohomology をもつ表現であり、Schlichtkrull によつて Langlands parameter も知られている。しかし、singular な場合には、その存在のための必要十分条件も含めてまだよくわかっていないようである。

ここで  $G$  を connected real semi-simple linear Lie group とし、そのある involution  $\sigma$  に対応する半単純対称空間  $G/H$  を考える。  $K$  を  $\sigma\theta = \theta\sigma$  なる  $G$  の Cartan involution  $\theta$  に対応する maximal compact subgroup とする。このとき、  $L = K \cap H$

とすると  $G/H$  の discrete series は  $L$ -fixed vector をもつ  $K$ -type (すなわち spherical  $K$ -type) を含むことが知られているが、ここでは、このような Spherical  $K$ -type の lowest weight vector を "具体的" に表示することを考えることにし、  
 事例として、rank 2 の場合の  $SO_0(m+2, n) / SO(2) \times SO_0(m, n)$  を考察する。

### §1 半単純対称空間の discrete series

$\mathfrak{g}$  を real semisimple Lie algebra,  $\sigma$  を  $\mathfrak{g}$  の involutive automorphism (i.e.  $\sigma^2 = \text{id}$ ) とする。さらに  $\theta$  を  $\sigma$  と可換な  $\mathfrak{g}$  の Cartan involution とする。そして  $\sigma$  (resp.  $\theta$ ) による  $\mathfrak{g}$  の  $\pm 1$  固有空間分解を、  
 $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{E} + \mathfrak{F}$ ) とおく。  
 すると、 $\theta$  と  $\sigma$  が可換なことから次の直和分解を得る。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{E} \cap \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{F} \cap \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{F} \cap \mathfrak{g}$$

これから、real Lie algebra の複素化を  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  のように表わす。  
 そして次のように定める。

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{f} \oplus i(\mathfrak{E} \cap \mathfrak{g}) \oplus i(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{f}) \oplus \mathfrak{F} \cap \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{E}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{f} \oplus i(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{f}) \quad \mathfrak{F}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{g} \oplus i(\mathfrak{E} \cap \mathfrak{g})$$

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{f} \quad \text{--- } i = \sqrt{-1} \text{ とおす}$$

そして、 $G_{\mathbb{C}}$  と  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  を Lie algebra に持つ、connected complex Lie group とする。すなわち  $G, K, H, K^{\mathbb{C}}, \dots$  など。  $\mathfrak{g}$ ,

$K, \mathfrak{g}, K^d, \dots$  などに対応する  $G_C$  の analytic subgroup を表わすことにする。われわれはこれから、半単純対称空間  $G^d/H^d$  の discrete series つまり  $L^2(G^d/H^d)$  の既約部分表現を考えることにする。まず次のような結果が知られている。

Theorem (Flensted-Jensen, Matsuki, Oshima)

$G^d/H^d$  が discrete series をもつための必要十分条件は、

$$\text{rank}(G^d/H^d) = \text{rank}(K^d/K^d \cap H^d) \text{ と成り立つことである。}$$

したがって、以下においては、 $\text{rank}(G^d/H^d) = \text{rank}(K^d/K^d \cap H^d)$  という条件を仮定することにする。

ここで  $\mathcal{Q}$  をある  $\mathfrak{g}$  の maximal abelian subspace とすると上の仮定により、 $\mathcal{Q}$  は  $\mathfrak{g}_1$  においても maximal abelian となる。次に、 $\hat{H}(K^d)$  は  $H_C$  の holomorphic representation の制限になっているような  $H$  の有限次元表現の同値類のつくる集合を表わす。すると、 $\hat{H}(K^d)$  と  $K^d$  の有限次元表現の同値類全体は、 $H_C$  の holomorphic representation を介して、 $|\mathcal{Q}|$  に対応する (ここで  $K^d$  (resp.  $K$ ) は  $G^d$  (resp.  $G$ ) の maximal compact subgroup である。)

次に  $\mathcal{Q}_C$  の complex dual を  $\mathcal{Q}_C^*$  で表わす。さらに  $\mathbb{D}(G^d/H^d)$  (resp.  $\mathbb{D}(G/K)$ ) を  $G^d/H^d$  (resp.  $G/K$ ) 上の不変微分作用素環とする。すると、 $\mathbb{D}(G^d/H^d)$  と  $\mathbb{D}(G/K)$  は、 $G_C/H_C$  上の holomorphic な微分作用素を介して、自然に同型になる。

したがって  $\lambda \in \mathbb{Q}\mathbb{C}^*$  に對して Harish-Chandra homomorphism  
 1. による algebra homomorphism

$$\chi_\lambda: \mathbb{D}(G^d/H^d) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を定義できる。

$M$  が  $C^\omega$ -manifold であるとき、次のように定める。

$$A(M) = \{ M \text{ 上の } \mathbb{C}\text{-valued } C^\omega \text{ function} \}$$

$$B(M) = \{ M \text{ 上の hyperfunction} \}$$

ここで  $\lambda \in \mathbb{Q}\mathbb{C}^*$  に對して次のように定める。

$$A_{k^d}(G^d/H^d; M_\lambda) = \{ f \in A(G^d/H^d) \mid f \text{ は } k^d\text{-finite} \cdot \wedge \cdot Df = \chi_\lambda(D)f \\ (D \in \mathbb{D}(G^d/H^d)) \}$$

次に  $m, m', M, M'$  をそれぞれ  $\mathbb{Q}$  の  $E, L, K, L$  における  
 Centerizer を表わす  $\tau = L, \Sigma, \Sigma'$  をそれぞれ  $(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}), (f, \mathbb{Q})$   
 に對応する root system とする。また それらの positive system  
 $\Sigma^+, \Sigma'^+$  を compatible に存在するように固定しておく。また、  
 $\alpha \in \Sigma$  (resp.  $\Sigma'$ ) に對応する  $\mathfrak{g}$  (resp.  $f$ ) の root space を  $\mathfrak{g}_\alpha$   
 (resp.  $f_\alpha$ ) で表わす。  $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$  (resp.  $M'_\alpha = \dim f_\alpha$ ) とおく。  
 次に  $\Sigma^+, -\Sigma^+, \Sigma'^+, -\Sigma'^+$  に對応する nilpotent subalgebra  
 をそれぞれ  $\mathfrak{n}, \bar{\mathfrak{n}}, \mathfrak{n}', \bar{\mathfrak{n}}'$  で表わす。 對応する analytic sub-  
 group を  $N, \bar{N}, N', \bar{N}'$  とする。 また  $\mathbb{Q}$  に對応する analytic  
 subgroup を  $A$  とおく。 また、

$$P = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha, \quad P_C = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma'^+} m'_\alpha \alpha \quad \text{と定める。}$$

4

次に  $\mathcal{L}$  で "L-fixed vector  $\xi$  to  $k^d$  の有限次元表現の highest weight の集合を表わす。 ( $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{Q}_{\mathbb{C}}^*$  とおける。) また  $\lambda \in \mathcal{Q}_{\mathbb{C}}^*$  に對して.

$$\mu_{\lambda} = \lambda + \rho - 2\rho_c \quad \text{とおく。}$$

また  $P = MAN$  とおくと、これは  $G$  の minimal parabolic subgroup になる。  $\xi = \mathcal{L} \{ \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m \}$  を  $G/P$  の closed H-orbit の全体とし.

$\hat{\mathcal{O}}_i = \{ x \in G \mid xP \in \mathcal{O}_i \}$  ( $1 \leq i \leq m$ )

と定める。 すると  $1 \leq i \leq m$  に對して、  $x_i \in K$  を、  $\hat{\mathcal{O}}_i = Hx_iP$

および  $\text{Ad}(x_i)\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$  を満たすようにとることにできる。

$\lambda \in \mathcal{Q}_{\mathbb{C}}^*$  に對して、  $\lambda^{\hat{\sigma}} = \lambda \circ \text{Ad}(x_{\hat{\sigma}})^{-1}$ ,  $\Sigma_{\hat{\sigma}}^+ = \Sigma^+ \circ \text{Ad}(x_{\hat{\sigma}})^{-1}$

と定める。

次に  $\lambda \in \mathcal{Q}_{\mathbb{C}}^*$  に對して、次のように定める。

$$\mathcal{B}(G/P, L_{\lambda}) = \{ f \in \mathcal{B}(G) \mid (\forall x \in G)(\forall m \in M)(\forall a \in A) \\ (\forall n \in \mathbb{N}) [ f(xman) = a^{\lambda - \rho} f(x) ] \}$$

さらに  $1 \leq j \leq m$  とし、次のようにおく。

$$\mathcal{B}^{\hat{\sigma}}(G/P, L_{\lambda}) = \{ f \in \mathcal{B}(G/P, L_{\lambda}) \mid \text{supp } f \subseteq \hat{\mathcal{O}}_{\hat{\sigma}} \}$$

またさらに  $\delta \in \hat{H}(k^d)$  とし、次のようにおく。

$$\mathcal{B}_{\delta}^{\hat{\sigma}}(G/P, L_{\lambda}) = \{ f \in \mathcal{B}^{\hat{\sigma}}(G/P, L_{\lambda}) \mid f \text{ は } H \text{ の作用の} \\ \text{もとで } \delta^{\oplus n} \text{ ( } n \text{ は非負整数) に従う} \}$$

$$\mathcal{B}_H^{\hat{\sigma}}(G/P, L_{\lambda}) = \bigoplus_{\delta \in \hat{H}(k^d)} \mathcal{B}_{\delta}^{\hat{\sigma}}(G/P, L_{\lambda})$$

すると次のような結果が知られている。

Theorem (Matsuki Oshima [2])

1°  $\lambda \in \mathfrak{Q}_{\mathbb{C}}^*$  が  $(\forall \alpha \in \Sigma^+) [\operatorname{Re} \langle \lambda, \alpha \rangle > 0]$  を満たすとすれば、次のような  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -isomorphism が存在する。

$$\bigoplus_{j=1}^m \mathcal{B}_{\mathbb{H}}^{\bar{\sigma}}(G/P, L_{\lambda}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\mathbb{H}^d}(G^d/H^d, \mathfrak{m}_{\lambda}) \cap L^2(G^d/H^d)$$

2°  $\mathcal{B}_{\mathbb{H}}^{\bar{\sigma}}(G/H, L_{\lambda}) \neq \{0\}$  なる  $\lambda$  は有限個の既約  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -module の直和になる。

3°  $\lambda$  が  $+$  正 regular なる (i.e.  $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$  for all  $\alpha \in \Sigma^+$ )

$\mathcal{B}_{\mathbb{H}}^{\bar{\sigma}}(G/H, L_{\lambda})$  は既約である。

4°  $\mathcal{B}_{\mathbb{H}}^{\bar{\sigma}}(G/H, L_{\lambda}) \neq \{0\}$  なる  $\lambda$  の①, ②が成り立つ。

①  $\mu_{\lambda}^{\bar{\sigma}}$  は  $\mathfrak{L}$  の生成する  $\mathbb{Q}$  上の Lattice に含まれる。

②  $\alpha \in \Sigma^+$  が  $\Sigma$  の simple root として  $\rho_{\alpha} \subseteq \mathfrak{g}$  を満たすならば、

$$\langle \lambda^{\bar{\sigma}} - \rho^{\bar{\sigma}}, \alpha^{\bar{\sigma}} \rangle \geq 0$$

## §2 hyperfunction の拡張

まず次のように定める。

$$G' = \bar{N}MAN, \quad H' = \bar{N}'M'AN'$$

すると、 $G'$  (resp.  $H'$ ) は  $G$  (resp.  $H$ ) の open dense subset である。

次に  $(\tau_{\nu}, \nu_{\nu})$  によって、 $\nu \in \mathfrak{L}$  での  $-\nu$  が lowest weight になっているような  $H$  の有限次元既約表現を替わすことにする。また同じ記号で対応する  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の表現も替わす。

さらに  $v \in V$  を好 non-trivial な  $m \oplus n$ -fixed vector  
 かつ).  $H \in \mathfrak{Q}$  に対して  $\tau(H)v = -\nu(H)v$  とする lowest  
 weight vector とする.  $\Rightarrow$  Lie algebra  $\mathfrak{S} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{t}$ .  $U(\mathfrak{S})$   
 をその複素化の universal enveloping algebra とする  
 $\Rightarrow$  として. 次のようにおく.

$B_{\mathfrak{Q}}^{\delta}(G/P, L_{\lambda}) = \{ f \in B^{\delta}(G/P, L_{\lambda}) \mid \dim U(\mathfrak{Q})f < \infty \}$   
 かつ  $\nu \in \mathfrak{L}$  に対して 次のように定める.

$B_{\nu}^{\delta}(G/P, L_{\lambda}) = \{ f \in B_{\mathfrak{Q}}^{\delta}(G/P, L_{\lambda}) \mid U(\mathfrak{g})f \cong V_{\nu} \}$   
 $\Rightarrow$   $U(\mathfrak{g})f$  と  $V_{\nu}$  の間の同型は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -module としての  
 である。

次に. 以下のように定義する.

$$\Upsilon^{\delta}(G', L_{\lambda}) = \{ f \in B(G') \mid (\forall g \in G') (\forall m \in M) \\ (\forall a \in A) (\forall n \in N) [f(gman) = f(g)a^n] \\ \wedge \text{supp } f \subseteq \tilde{G}_{\delta} \cap G' \}$$

$\Upsilon_{\nu}^{\delta}(G', L_{\lambda}) = \{ f \in \Upsilon^{\delta}(G', L_{\lambda}) \mid U(\mathfrak{g})f \cong V_{\nu} \}$   
 $G'$  は  $G$  において open である. 制限にして.

$$p = B^{\delta}(G/P, L_{\lambda}) \rightarrow \Upsilon^{\delta}(G', L_{\lambda})$$

なる map が定義される. これは  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -homomorphism である.

すると 次のような結果が成り立つ。

Proposition 2.1  $\nu \in \mathfrak{L}$  かつ  $1 \leq \delta \leq m$  とすると.

次が成り立つ。

1°  $p|_{\mathcal{B}_\lambda^{\tilde{\sigma}}(G/P, L_\lambda)}$  は one-to-one

2°  $\tilde{p}_\nu = p|_{\mathcal{B}_\nu^{\tilde{\sigma}}(G/P, L_\lambda)}$  とおくと.

$$\tilde{p}_\nu : \mathcal{B}_\nu^{\tilde{\sigma}}(G/P, L_\lambda) \xrightarrow{\sim} \Upsilon_\nu^{\tilde{\sigma}}(G', L_\lambda)$$

は. 1. onto になる.

★ この Proposition の証明には 次の Lemma を使う。

Lemma 2.2  $X$  を  $C^\omega$ -manifold.  $\tilde{G}$  を  $X$  上の Lie group とする.  $\tilde{\mathfrak{g}}$  を  $\tilde{G}$  の Lie algebra とし.  $\tilde{\mathcal{O}}$  を  $\tilde{G}$  の closed orbit とする.  $u \in \mathcal{B}(X)$  が  $\text{Supp } u \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$  かつ  $\dim \cup(\tilde{\mathfrak{g}})u < \infty$  を満たし.  $P$  が  $X$  上の  $C^\omega$ -係数 微分作用素ならば,

$$\text{Supp } Pu \subsetneq \tilde{\mathcal{O}} \quad \longrightarrow \quad Pu = 0$$

★ Proposition 2.1 により. それぞれは  $G'$  上の hyperfunction について考えればよいことがわかる. 特に  $\Upsilon^{\tilde{\sigma}}(G', L_\lambda)$  の元は.  $\bar{N}$  上で考えれば十分であり.  $\bar{N}$  の適当な global な座標により具体的に書き下せることが期待される。

### §3 Some Technical Lemma

$\bar{r} = m' + \mathfrak{q} + \bar{n}' \subseteq \mathfrak{g}$  とおくと. これは  $\mathfrak{g}$  の minimal parabolic subalgebra とする.





Lemma 3.1 non-trivial  $\mathfrak{g}$ -module  $W$  が、次の ①-④  
 を満たすような元  $v \in W$  を含むならば

$$\textcircled{1} \quad U(\mathfrak{g}) \cdot v = W$$

$$\textcircled{2} \quad (\forall X \in \mathfrak{m}' + \mathfrak{m}') [ X \cdot v = 0 ]$$

$$\textcircled{3} \quad (\exists \nu \in \mathfrak{L}) (\forall H \in \mathfrak{Q}) [ H \cdot v = -\nu(H)v ]$$

④  $\mathfrak{m}'$  の simple root  $\alpha \in \Sigma'^+$  には  $\alpha \cdot v \neq 0$ .

$$\dim U(\mathfrak{g}_{2\alpha} + \mathfrak{g}_{\alpha}) \cdot v < \infty$$

この時、 $W$  は non-trivial  $\mathfrak{g}$ -fixed vector を持つ  
 有限次元既約  $\mathfrak{g}$ -module になる。つまり  $W$  は  $V_{\nu}$  と  $\mathfrak{g}$ -  
 module として同型になる。この同型において、 $\nu$  は  $\nu v$  の scalar 倍  
 に対応する。

★ この Lemma により  $\nu \in Y^{\delta}(G', L_{\lambda})$  が  $Y_{\nu}^{\delta}(G', L_{\lambda})$   
 に属するかどうかをたしかめることが出来る。

#### §4 The case of $SO_0(m+2, n) / SO(2) \times SO_0(m, n)$ ( $m \geq 3$ )

この場合

$$G/H = SO_0(m+2, n) / SO(2) \times SO_0(m, n)$$

に於いて、

$$G/H = SO_0(m+1, 2) / SO(n) \times SO_0(m, 2)$$

となる。

こゝで Lie algebra を行列に於て以下のように表す。

⑨

$$\mathcal{G} = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{A_1}^{m+n} & \overbrace{B}^z \\ \hline \underbrace{tB}_{2} & \underbrace{A_2}_{2} \end{array} \right) \in M(m+n+2, \mathbb{R}) \mid \left. \begin{array}{l} tA_i = -A_i \\ c_i = (1, 2) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{J} = \left\{ \left( \begin{array}{c|c|c} \overbrace{A_1}^n & \overbrace{0}^m & \overbrace{0}^z \\ \hline \overbrace{0}^n & \overbrace{A_2}^m & \overbrace{B}^z \\ \hline \overbrace{0}^n & \underbrace{tB}_{2} & \underbrace{A_3}_{2} \end{array} \right) \in M(m+n+2, \mathbb{R}) \mid \left. \begin{array}{l} tA_i = -A_i \\ c_i = (1, 2, 3) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{Q} = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} t_2 \\ t_1 \end{matrix} & \end{array} \right) \in M(m+n+2, \mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathcal{M} = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{S}^{m+n-2} & \\ \hline \begin{matrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{matrix} & \begin{matrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{matrix} \end{array} \right) \in GL(m+n+2, \mathbb{R}) \mid \left. \begin{array}{l} S \in SO(m+n-2) \\ \varepsilon = \pm 1 \end{array} \right\}$$

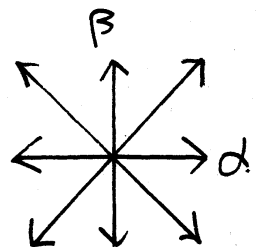
そこで、 $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}_0^*$  を次のように定める。

$$\left( \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} t_2 \\ t_1 \end{matrix} & \end{array} \right) \xrightarrow{\alpha} t_1, \quad \left( \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} & \end{array} \right) \xrightarrow{\beta} t_2$$

すなわち、 $\Sigma = \{\pm\alpha \pm \beta\}$  である。

そこで  $\Sigma^+ = \{\alpha, \beta, \beta - \alpha, \alpha + \beta\}$  と。

おいて、次のように定める。



$$\overline{N}_{-\alpha}^{(1)} = \left( \begin{array}{c|c|c} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & & & & \\ \hline 0 & & & & \\ \hline 0 & & & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \vdots & & & & \end{array} \right)_{c_i}$$

$$\overline{N}_{\beta}^{(1)} = \left( \begin{array}{c|c|c} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & & & & \\ \hline 0 & & & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \vdots & & & & \end{array} \right)_{c_i}$$

$$\bar{N}_{-\alpha-\beta} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \hline & & \\ \hline & 1 & 1 \\ & -1 & -1 \\ \hline & & \\ & 1 & -1 \\ & -1 & -1 \\ \hline \end{pmatrix}, \quad \bar{N}_{\alpha-\beta} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \hline & & \\ \hline & -1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ \hline & & \\ & -1 & -1 \\ & -1 & -1 \\ \hline \end{pmatrix}$$

である。

$$\sigma_{-\alpha} = \sum_{i=1}^{n+m-2} \mathbb{R} \bar{N}_{-\alpha}^{(i)}, \quad \sigma_{-\beta} = \sum_{i=1}^{n+m-2} \mathbb{R} \bar{N}_{-\beta}^{(i)}$$

$$\sigma_{\alpha-\beta} = \mathbb{R} \bar{N}_{\alpha-\beta}, \quad \sigma_{\alpha-\beta} = \mathbb{R} \bar{N}_{\alpha-\beta}$$

とある。また

$$\rho = \frac{n+m-2}{2} \alpha + \frac{n+m}{2} \beta, \quad \rho_c = \frac{m-2}{2} \alpha + \frac{m}{2} \beta$$

$$\mathcal{L} = \{ l\alpha + h\beta \mid l=0,1,2,\dots, h-l=0,2,4,\dots \}$$

とある。またこの場合  $G/P$  の closed orbit は  $\mathcal{L}$  であり

$x_1 = \text{identity element}$  とある。

$$z = z'' \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+m-2}) \in \mathbb{R}^{n+m-2}, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n+m-2}) \in \mathbb{R}^{n+m-2}$$

,  $z, u \in \mathbb{R}$  に對して、次のように  $\bar{N}$  の第1種標準座標系を。

定める。

$$\bar{N}(\xi, \eta, z, u) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n+m-2} (\xi_i \bar{N}_{-\alpha}^{(i)} + \eta_i \bar{N}_{-\beta}^{(i)}) + z \bar{N}_{\alpha-\beta} + u \bar{N}_{-\alpha-\beta}\right)$$

次に  $A$  の global coordinate を以下の式に定める。

$t_1, t_2 > 0$  に對して、 $\theta_i = \log t_i$  とおき。

$$A(t_1, t_2) = \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 \\ \text{ch } \theta_1 \\ \text{ch } \theta_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{sh } \theta_1 \\ \text{sh } \theta_2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \text{sh } \theta_1 \\ \text{sh } \theta_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{ch } \theta_1 \\ \text{ch } \theta_2 \end{matrix} \end{array} \right) \begin{matrix} \} 2 \\ \} 2 \end{matrix} \quad \text{とある}$$

ここで、 $\text{ch}$ ,  $\text{sh}$  は 各々 hyperbolic cosine, sine である。

⇔  $h > l > 0$  字自然数  $h, l = 1$  に対して.

$$F_{l,h} \in Y^1(G', L_{l+h\beta})$$

と. 次によって定める ( $\delta$  は delta function)

$$F_{l,h}(\bar{N}(0, \eta, z, u) \bar{N}(\xi, 0, 0, 0) m A(\epsilon, t_2) n) \\ = \delta(\xi_1) \cdots \delta(\xi_n) \delta(\eta_1) \cdots \delta(\eta_n) t_1^{l - \frac{n+n-2}{2}} t_2^{h - \frac{n+n}{2}}$$

$$c m \in M, n \in N$$

⇔  $\bar{N}(0, \eta, z, u) \bar{N}(\xi, 0, 0, 0)$  は  $\bar{N}$  の global coordinate を与えている。

次に  $\Psi$  を. 定係数微分作用素

$$P = \sum_{p, q} C_{p, q} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^{p_n} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)^{q_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \eta_n}\right)^{q_n}$$

$$(C_{p, q} \in \mathbb{C}, p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n))$$

で次の 1° ~ 5° を満たすもの全体の  $\subset$  集合とする。

$$1^\circ (\exists p_\xi, p_\eta \in \{0, 1, 2, \dots\})$$

$$[C_{p, q} \neq 0 \rightarrow p_1 + \dots + p_n = p_\xi, q_1 + \dots + q_n = p_\eta]$$

2°  $A \in O(n)$  に対して.  $P$  は座標変換

$$(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) \mapsto ((\xi_1, \dots, \xi_n)A, (\eta_1, \dots, \eta_n)A)$$

に対して不変

$$3^\circ l + \frac{h-n+2}{2} + p_\xi \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$4^\circ h - l - 1 + q_\xi - p_\xi \in \{0, 2, 4, \dots\}$$

$$5^0 \quad (ZZ)^{h-l-1} \sum_{p, q} C_{p, q} \prod_{i=1}^n \left[ \sum_{k_i=0}^{p_i} \sum_{r_i=0}^{q_i+k_i} \binom{p_i}{k_i} \binom{q_i+k_i}{r_i} \right. \\ \left. \times (-)^{k_i+r_i+q_i} \delta_{(p_i-k_i+r_i)}^{(\eta_i)} \delta_{(q_i+k_i-r_i)}^{(\xi_i)} (ZZ)^{k_i-r_i} \right]$$

は、 $z$  に関して多項式になる。

★この場合についての結果は次のようになる。

Theorem  $h > l > 0$  かつ  $\mu_{l, d+h\beta} \in \mathcal{L}$   
 $(\Leftrightarrow l + \frac{h+m+2}{2} \in \mathbb{Z} \wedge h-l-1 \in 2\mathbb{Z})$  とする。

このとき、 $\Upsilon'(G', L_{l, d+h\beta})$  の spherical  $K^d$ -type の lowest weight vectors の全体は、

$$\{ P \cdot F_{l, h} \mid P \in \Psi \}$$

に一致する。さらに  $P \in \Psi$  には  $z \neq 1, z$

$$P F_{l, h} \in \Upsilon_{(l + \frac{h+m+2}{2} + p_{\frac{1}{2}})d + (h + \frac{n-m}{2} + q_{\frac{1}{2}})\beta}^1(G', L_{\lambda})$$

とされる。

★ Proposition 2.1 に応じて、 $P F_{l, h}$  は、 $\mathcal{B}_H^1(G/P, L_{\lambda})$  の spherical  $K^d$ -type の lowest weight vector  $1 = z \neq 1, z$  になる。

★  $m=1$  のとき、つまり

$$G^d/H^d = SO_0(m+2, 1)/SO(2) \times SO_0(m, 1)$$

のときは、

$$\Psi = \left\{ C \left( \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^p \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \right)^q \mid C \in \mathbb{C}, h-l-1 \geq p \geq -l - \frac{h-m+2}{2}, p+q = \text{even} \right\}$$

とされる。

★  $\Delta_{\eta} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2$  と定めると  $\Psi \cdot \Delta_{\eta} \subseteq \Psi$   
 ★ もし  $\mathbf{1} \in \Psi$  ならば  $\cup(\log) F_{\mathbb{R}, n}$  は, Flansted-Jensen  
 が [1] で構成した表現になる。

### - Acknowledgements -

この場を借して、いろいろ重要な助言をいただいた大島・松本両先生に  
 感謝の意を表わしていただきます。

### References

- [1] M. Flansted-Jensen : Discrete series for  
 semisimple symmetric spaces. Ann of Math III  
 (1980) 253-311
- [2] T. Oshima and T. Matsuki : A complete  
 description of discrete series for semisimple  
 symmetric spaces (1983) preprint