数理解析研究所講究録
第503巻 1983年 137-153

On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups

東大. 理　加藤 信一 (Shin-ichi Kato)

Kazhdan-Lusztig 多項式(以下. K-L多項式と略す)が、代数群の表現論に色々な形で関わっていることはよく知られている。ここではアフィンWeyl群のK-L多項式のある公式を与え、その表現論への応用としてLusztig予想との関連を述べる。

1° Kazhdan-Lusztig 多項式

ここではK-L多項式の定義を復習する。

まず (W, S) をCoxeter系としよう。つまり W は生成系 S と関係式

$$\begin{cases} s^2 = e & (\forall s \in S) \\ (st)^{m_{st}} = e & (s \neq t \in S,\ m_{st} \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

で与えられる群である。例えば対称群(より一般にWeyl群、又後述のアフィンWeyl群)がその例である。この時、

$$\ell : W \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \text{長さ関数(length fn.)}$$

及び W 上の半順序 $\geqq$ (Bruhat 順序) が標準的に定まる。さて、q を不定元、$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を一変数 Laurent 多項式環とする。(W, S) の Hecke 環 $\mathcal{H}(W)$ とは、$\{T_w\}$ $(w \in W)$ なる自由基底を持ち、i.e.

$$\mathcal{H}(W) \simeq \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \cdot T_w$$

$(\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$- 加群として$)$

で、乗法が

$$\begin{cases} (T_s - q)(T_s + 1) = 0 & (\forall s \in S) \\ T_w \cdot T_{w'} = T_{ww'} & \text{if } \ell(w) + \ell(w') = \ell(ww') \end{cases}$$

で与えられるような $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の多元環である。$q = 1$ と特殊化すると $\mathcal{H}(W) \simeq \mathbb{Z}[W]$ (W の群環) となることに注意しよう。(レス上. [B] 参照.)

<u>定理</u> (Kazhdan-Lusztig [K-L]) 任意の $w \in W$ に対して、次の 2 条件を満たす $C_w \in \mathcal{H}(W)$ が一意的に存在する:

① $\overline{C_w} = q^{-\ell(w)} C_w$; 但し $\overline{}$ は $\overline{q} = q^{-1}$, $\overline{T_w} = (T_{w^{-1}})^{-1}$ で定まる $\mathcal{H}(W)$ の位数 2 の環自己同型。

② $C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q) T_y$ と表示される。

ここで $P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ で

$$\begin{cases} \deg P_{y,w}(q) \leq \frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(y)-1) & \text{if } y \neq w \\ P_{w,w}(q) = 1 \end{cases}$$

なるもの。

<u>定義</u>.1　上の定理における C_w の係数 $P_{y,w}(q)$ を <u>K－L多項式</u> とよぶ。(これを計算する algorithm がある[K-L])

2° <u>Lusztig予想</u>

次に上で定義したK－L多項式（W = アフィン Weyl 群の場合）が正標数の代数的閉体上の半単純代数群の既約有理表現の指標公式を記述する，という Lusztig の予想（[L.1]）を説明する。（このような群の有理表現論については[川渡]，[横沢]で解説を与えてあるので，詳しくはそちらを参照して頂ければ幸いである。）

以下，

k = 標数 $p>0$ の代数的閉体

= 連結，単連結，概単純代数群 / k

B = G の Borel 部分群

T = 極大トーラス $\subset B$

$W = N_G(T)/T$: Weyl 群

$P = \mathrm{Hom}_{alg}(T, k^\times)$ ：ウエイト格子（Tの指標群）

$R = (G, T)$ のルート系 $\subset P$

$R^+ = B$ に対応する正ルート系 $\subset R$

$P^{++} =$ 支配的ウエイトのなす半群 $\subset P$

とおく。Gの既約有理表現（の同値類）全体は P^{++} でパラメトライズされる：任意の $\lambda \in P^{++}$ に対して λを最高ウエイトに持つ既約表現 $L(\lambda)$ が同型を除いて唯一つ存在する。即ち

$$L(\lambda) \ni {}^\exists v_\lambda \ \mathrm{s.t}\ b \cdot v_\lambda = \lambda(b) v_\lambda \quad ({}^\forall b \in B)$$

（但し $B \to T \to k^\times$ により $\lambda \in P^{++}$ を Bの指標と見た。）$L(\lambda)$ は例えば次の様に"実現"される。B^-を $B \cap B^- = T$ となる G の Borel 部分群（Bの opposite），$\lambda \in P^{++}$ を上と同様に B^- の指標と見て，

$$M(\lambda) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ind}_{B^-}^{G}(\lambda) \quad \text{（有理表現の圏での誘導表現）}$$

とおこう。別の言い方をすれば，

$$M(\lambda) = \Gamma(G/B^-, \mathcal{L}(\lambda)),$$

ここで $\mathcal{L}(\lambda)$ は λの定める G/B^- 上の直線束の切断の層である。$M(\lambda)$ は G の有限次有理表現を与えるが，$\mathrm{Soc}\, M(\lambda) = L(\lambda)$，つまり $M(\lambda)$ は唯一つ既約部分加群を持ち，それが $L(\lambda)$ に等しいことが知られているのである。

さて、表現の最も大切な不変量は、その指標である：
有限次有理表現 M を極大トーラス T に制限して

$$M|_T \simeq \bigoplus_{\lambda \in P} M^\lambda$$

$$M^\lambda = \{v \in M \mid t \cdot v = \lambda(t) v \ (\forall t \in T)\}$$

と分解される時、M の指標、$\mathrm{ch}\, M$ を

$$\mathrm{ch}\, M \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\lambda \in P} \dim M^\lambda \cdot e^\lambda \quad \in \mathbb{Z}[P]$$

（P の群環）

で定義する。（但し e^λ は $\mathbb{Z}[P]$ の $\lambda \in P$ に対応する標準的な基底，$e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}$.）例えば $\lambda \in P^{++}$ に対し，

$$(1) \quad \mathrm{ch}\, M(\lambda) = \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)} e^{x(\lambda+\rho)-\rho} \Big/ \prod_{\alpha \in R^+} (1 - e^{-\alpha})$$

（Weyl の指標公式）

である。ここで $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha \ \in P^{++}$.

問題. $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ を記述せよ。

Lusztig 予想（以下，L予想）は以下に述べるようにこの問題に対する解答を与える。

Weyl群 W はウエイト格子 P，及びルート格子 Q（Rで生成されるPの部分加群）に自然に作用するので，

半直積，$\widetilde{W} = W \ltimes P \supset W_a = W \ltimes Q$ を構成することができる。W_a は通常 $R^\vee$（R のコルート系）$\subset Q^\vee = \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Z})$ に対応するアフィンWeyl群とよばれるもので，Coxeter群であることが知られている。但しわれわれは W_a の生成系 S_a として次のような鏡映の集合をとる：

$$S_a = \{ w_\alpha \mid \alpha : \text{単純ルート} \} \cup \{ w_{\alpha_0} t_{\alpha_0} \}.$$

ここで α_0 は対応するコルート $\alpha_0^\vee$ が $R^\vee$ の最大コルートとなるようなルート，w_α は $\alpha \in R$ に対応する鏡映，また $\widetilde{W} \supset P$ の元を P 自身と区別するため，$\lambda \in P$ に対して t_λ と書いた。一方 $\widetilde{W}$ は次の理由で"殆ど" Coxeter群である。$\Omega = N_{\widetilde{W}}(S_a)$ とおくと $\widetilde{W} = \Omega \ltimes W_a$（半直積）。そこで W_a 上の長さ関数 l，Bruhat順序 $\leq$ を $\widetilde{W}$ 上に

$$l(\gamma \cdot w) \overset{\mathrm{def}}{=} l(w) \qquad (\gamma \in \Omega,\ w \in W_a)$$

$$\gamma \cdot y \leq \gamma' \cdot w \overset{\mathrm{def}}{\iff} \gamma = \gamma',\ y \leq w$$

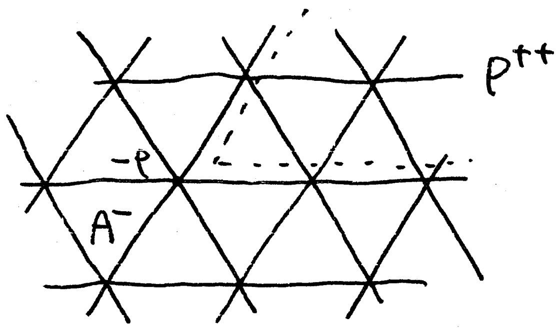
$$(\gamma, \gamma' \in \Omega,\ y, w \in W_a)$$

で拡張するとこれらはwell-definedとなり，Hecke環 $\mathcal{H}(\widetilde{W})$，K−L多項式等も W_a と同様に定義される。（実は，直ちに $P_{\gamma y, \gamma w}(q) = P_{y, w}(q)$ $(\gamma \in \Omega,\ y, w \in W_a)$ がわかり，結局アフィンWeyl群のK−L多項式が

わかればよいことになる。)

$\widetilde{W}$ 及び W_a は $P\otimes\mathbb{R}$ にアフィン変換として次の様に作用する (dot action) : $w = t_\lambda x$ ($\lambda\in P$, $x\in W$) とすると, $v \longmapsto w\cdot v \overset{\text{def}}{=} x(v+\rho)-\rho + p\lambda$ ($v\in P\otimes\mathbb{R}$, $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$, $p = \mathrm{char}.k$)。また, $P\otimes\mathbb{R} \setminus \bigcup H$ (H は W_a の全ての鏡映の鏡映面 — dot action に関する — をわたる) の任意の連結成分 (alcove) は W_a の作用に関する基本領域となる。勿論 alcoves の集合は $\widetilde{W}$ で保たれる。特に

$A^- =$ S_a に対応する鏡映面で囲まれた alcove



とおこう (右図. 参照)。

<u>定義</u> 7 $w\in\widetilde{W}$ が <u>支配的</u> (dominant)

$\iff$ $w(A^-)$ の閉包 $\cap\, P^{++} \neq \phi$

これは, p (標数) $\geqq h$ (ルート系 R の Coxeter 数)

($\iff$ $A^-\cap P \neq \phi$ がすぐにわかる)

ならば, $w\cdot\lambda \in P^{++}$ ($\lambda\in A^-\cap P$) と同値である (標数 p のとり方によらぬ)。

例. 1 w_0 を W の長さ最大の元，$\mu \in P^{++}$ とすると $w_\mu := t_\mu w_0$ は支配的。実際 $p \geq h$ ならば，$-2\rho \in A^-$ で，

$$w_\mu \cdot (-2\rho) = w_0(-\rho) - \rho + p\mu = p\mu \in P^{++}$$

である。

さて，$p \geq h$ を仮定して，$\lambda \in A^- \cap P$ を固定しよう。$\langle\ ,\ \rangle$ を $P \times Q^\vee$ 上の自然な pairing とする。

予想 (Lusztig [L.1]) 支配的な元，$w \in \widetilde{W}$ が Jantzen 条件

(2) $$\langle w\cdot\lambda + \rho, \alpha_0^\vee \rangle \leq p(p-h+2)$$

を満足するならば，

(3) $$\mathrm{ch}\, L(w\cdot\lambda) = \sum_{\substack{y \in \widetilde{W},\ \text{支配的} \\ y \leq w}} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\, \mathrm{ch}\, M(y\cdot\lambda)$$

(3) の右辺は全て計算可能であることに注意（K-L多項式の $q=1$ での値，Weylの指標公式 (1)）。

この予想（以下 L 予想）が正しければ，

(a) translation principle (Jantzen [J])

(b) テンソル積定理 (Steinberg [S])

によって $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ が全ての $\lambda \in P^{++}$ について計算される ($p \geq h$ の場合に) ことになる: 実際.

(i) 公式 (3) は, alcove の内点である $\lambda \in P^{++}$ についてのみ $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ の公式を与えているが, (a) によれば, "translation" することによって, alcove の境界上のウエイトについても指標公式が得られる。

(ii) L予想は Jantzen 条件 (2) を満たす最高ウエイトについて指標公式を与えている。一方

$$D = \{\lambda \in P^{++} \mid 0 \leq \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < p \ (\forall \alpha\text{. 単純ルート})\}$$

(制限ウエイト)

とおくと, (b)(テンソル積定理) は.

$$(4) \quad \mathrm{ch}\, L(\lambda + p\mu) = \mathrm{ch}\, L(\lambda) \cdot \mathrm{ch}\, L(\mu)^{(p)} \quad (\lambda \in D,\ \mu \in P^{++})$$

を主張する。但し

$$\mathrm{ch}\, M = \sum_\lambda m_\lambda \cdot e^\lambda$$

の時,

$$\mathrm{ch}\, M^{(p)} = \sum_\lambda m_\lambda \cdot e^{p\lambda}$$

とおいた。これより, 制限ウエイトについて指標公式がわかれば, (4) を順次適用することにより全ての指標公式がわ

かることになる。Jantzen条件をみたすウエイトの範囲は

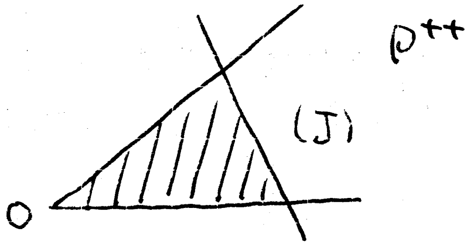


図.(I)

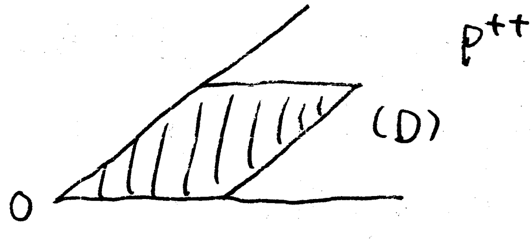
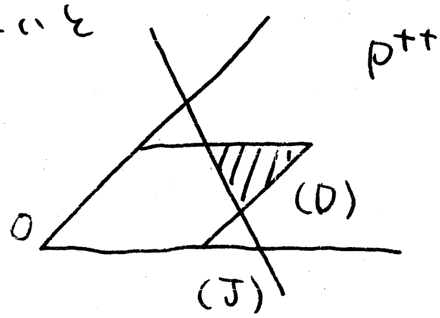


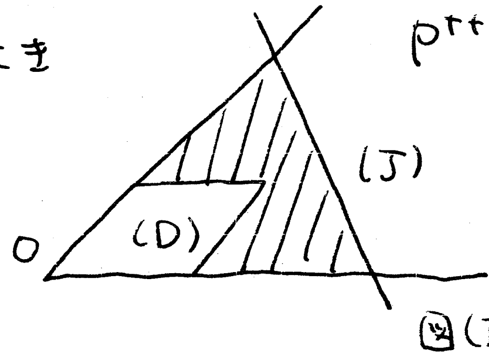
図.(II)

図(I)、制限ウエイトは図(II)のようになっている。標数pがhに対してあまり大きくないと図(III)の様になって、斜線部の指標公式はL予想からはわからない。(これは元のL予想の少しおかしい所：3節の予想′,注意,参照.)



図(III)

が、標数pがhに対して十分大きければ、図(IV)の様になって制限ウエイトに関する指標が得られ、よって全ての指標公式が得られることになる。



図(IV)

ちなみに、斜線部の指標公式は2通りのやり方で、即ち

① L予想から直接、

② L予想を(D)に適用した後、テンソル積定理を用いて

得られることに注意しよう。もしもL予想が正しければ、これら①,②は一致しなければならないのである。

3°. 結果. 前節最後の注意に関して次がわかる。

定理. 1. L予想はテンソル積定理と両立する。つまり①, ②の指標公式は一致する。

これによって, L予想に1つ evidence が与えられたことになる。さて, 定理1は次の定理2から導かれる:
$A^- \cap P \ni \lambda$ に対して ($p \geq h$ は仮定している) $w \in \widetilde{W}$ が $w \cdot \lambda \in D$ を満たす時, w を制限的とよぼう。これは p や λ によらない。一般に支配的な $w \in \widetilde{W}$ に対して, 制限的な $z \in \widetilde{W}$ と $\lambda \in P^{++}$ の組が一意的に存在して, $w = t_\lambda z$ となる。

例.2. w_0 (W の長さ最大元) は. $w_0 \cdot (-2\rho) = 0 \in D$ より制限的。$\lambda \in P^{++}$ に対し $w_\lambda = t_\lambda w_0$ はちょうど上記の分解を与えている. (例1 参照)

定理.2. $w \in \widetilde{W}$ を制限的な元, $\mu \in P^{++}$ とする。(よって $t_\mu w$ は支配的.) この時. 次の等式が $\widetilde{W}$ の群環 $\mathbb{Z}[\widetilde{W}]$ 内で成立する。

$$\begin{aligned} &\sum_{y \le t_\mu w} P_{y,\, t_\mu w}(1)\cdot y \\ (5) \qquad &= \prod_{\alpha>0}(1-t_{-\alpha})^{-1}\Big(\sum_{x\in W}(-1)^{\ell(x)}\, t_{x(\mu+\rho)-\rho}\Big) \\ &\qquad \times \Big(\sum_{z\le w} P_{z,\,w}(1)\cdot z\Big) \end{aligned}$$

<u>定理2 ⇒ 定理1の略証.</u> まず $t_\mu w$ ($\mu\in P^{++}$, $w\in\widetilde{W}$ 制限的) が Jantzen 条件 (2) を満たすならば,

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch}\, L(t_\mu w\cdot\lambda) \quad (= \mathrm{ch}\, L(w\cdot\lambda + p\mu)) \\ (6) \qquad &\qquad = \mathrm{ch}\, L(w\cdot\lambda)\cdot \mathrm{ch}\, M(\mu)^{(p)} \end{aligned}$$

であることが, テンソル積定理(4) と linkage principle [A] より簡単にわかる。さて $\mathrm{ch}\, L(w\cdot\lambda)$ に対して L予想が成立しているとすると, (6) と Weylの指標公式(1) より,

$$\begin{aligned} &\prod_{\alpha>0}(1-e^{-\alpha})\cdot \mathrm{ch}\, L(t_\mu w\cdot\lambda) \\ &= \Big(\sum_{\substack{y\in\widetilde{W},\ \text{制限的} \\ y\le w}} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,\,w}(1) \sum_{z\in W}(-1)^{\ell(z)} e^{zy\cdot\lambda}\Big) \\ &\times \Big(\sum_{x\in W}(-1)^{\ell(x)} e^{x(p\mu+p\rho)-p\rho}\Big) \prod_{\alpha>0}(1-e^{-p\alpha})^{-1}. \end{aligned}$$

ここで定理2の公式(5)(を $\mathbb{Z}[\tilde{W}]$ の自己同型 $y \longmapsto (-1)^{\ell(y)} y$ でひねったもの)，及びK−L多項式の性質[K−L; (2.3.9)]を前式に適用すると，

$$\prod_{\alpha>0}(1-e^{-\alpha})\cdot \mathrm{ch}\, L(t_\mu w\cdot\lambda)$$

$$= \sum_{\substack{y\in\tilde{W},\ \text{支配的} \\ y\leq t_\mu w}} (-1)^{\ell(t_\mu w)-\ell(y)} P_{y,\,t_\mu w}(1) \sum_{z\in W} (-1)^{\ell(z)} e^{zy\cdot\lambda},$$

つまり，L予想が $\mathrm{ch}\, L(t_\mu w\cdot\lambda)$ に対しても成立していることがわかる。（証明終）

結局，L予想は，

<u>予想'</u>. 制限的な $w\in\tilde{W}$ に対し

$$(7)\quad \mathrm{ch}\, L(w\cdot\lambda) = \sum_{\substack{y\in\tilde{W},\ \text{支配的} \\ y\leq w}} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\, \mathrm{ch}\, M(y\cdot\lambda)$$

に帰着されることになる。（この予想'の形ならば，任意の $p\geq h$ に対して，2節の最後で述べた"おかしな"事態は起らない。）

注意. Lusztig が [L.1] で彼の予想を(より自然な形の)予想′よりも"強い"形で提出した理由として [L.2] が挙げられる。彼は [L.2] で"一般の位置"にある $\lambda \in P^{++}$ に対して $M(\lambda)$ の既約分解のパターンを与える予想 (generic decomposition pattern 予想) を与えた後に、L予想 $\Rightarrow$ g.d.p. 予想を示している。しかしわれわれの結果(定理2)を用いると、逆に g.d.p. 予想 $\Rightarrow$ 予想′ (但し標数十分大で)を証明することができる。([Ka.2; Theorem 5.6] 参照)

さて、定理2は、支配的な $w \in \widetilde{W}$ の K-L 多項式の $q=1$ での値 $P_{y,w}(1)$ が制限的な $w' \in \widetilde{W}$ の $P_{y',w'}(1)$ より得られることを示しているが、実は q の多項式として、$P_{y,w}(q)$ が $P_{y',w'}(q)$ より計算されることがわかる。([Ka.2; Theorem 4.2])。しかしこの結果を述べるにはいささか煩わしい準備が必要なので、詳細は [Ka.2] にゆずり、ここではその特別な場合として、$w = w_\lambda$ ($\overset{\mathrm{def}}{=} t_\lambda w_0$, $\lambda \in P^{++}$) の場合 (Kostant 重複度公式の q-類似 [Ka.1]) を説明する。定理2で $w = w_0$ とおく。

$$P_{z,w_0}(q) = 1 \quad (\forall z \le w_0,\ \text{i.e. } z \in W)$$

であること([K-L])より、Weyl の指標公式(1)を

用いて

(Lusztig [L. 3]) $\nu, \mu \in P^{++}$ に対し

(7) $$P_{w_\nu, w_\mu}(1) = \dim M(\mu)^\nu$$

($M(\mu)$ でのウエイト μ の重複度)

がわかる。(7) 式の右辺はよく知られた Kostant による重複度公式で記述されるが、ここでこれの q-類似を考えてみよう。$\wp : P \longrightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ (Kostant 分割関数の q-類似) を、$R^+ = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\}$ として

$$\wp(\kappa) = \sum_{\substack{(n_1, \cdots, n_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \\ \kappa = n_1\alpha_1 + \cdots + n_N\alpha_N}} q^{-n_1 - \cdots - n_N}$$

で定義し、$ht : P \longrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ を

$$ht(\kappa) = \langle \kappa, \rho^\vee \rangle, \quad \rho^\vee = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha^\vee$$

とおけば、

定理 3 $\mu, \nu \in P^{++}$ に対し

$$P_{w_\nu, w_\mu}(q) = q^{ht(\mu-\nu)} \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)} \wp(x(\mu+\rho) - (\nu+\rho)).$$

この定理で $q \to 1$ とすると、右辺は Kostant 重複度公式になる。

また，$\mathfrak{g}$ をルート系 R に対応する単純リー環$/\mathbb{C}$，$\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の巾零元全体の作る，$\mathfrak{g}$ の閉部分代数多様体，$\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ を $\mathfrak{n}$ の座標環 とおく。 $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ は自然な次数付け，
$\mathbb{C}[\mathfrak{n}] = \bigoplus_{i \geq 0} \mathbb{C}[\mathfrak{n}]_i$ を持ち，$\mathfrak{g}$ は各斉次部分に作用している。 ここで，$\lambda \in P^{++}$ に対し

$$d_\lambda(q) = \sum_{i \geq 0} q^i \cdot (\,\mathbb{C}[\mathfrak{n}]_i \text{ 中での } \lambda \text{ を最高ウエイトに持つ } \mathfrak{g} \text{ の既約表現の重複度}\,)$$

とおくと，Hesselink, Peterson ([H]) によれば，

$$d_\lambda(q^{-1}) = \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)} \mathcal{P}(x(\lambda+\rho) - \rho).$$

よって，定理3 より，

$$d_\lambda(q^{-1}) = q^{-\mathrm{ht}(\lambda)} P_{w_0, w_\lambda}(q)$$

がわかることになる。 但しこの式の"意味"はわかっていない。

References

[A] H. H. Andersen, The strong linkage principle, J. Reine. Angew. Math. 315 (1980), 53-59.

[B] N. Bourbaki, "Groupes et algebres de Lie", Chaps. IV-VI, Hermann, Paris 1968.

[H] W. H. Hesselink, Characters of the nullcone, Math. Ann.

252 (1980), 179-182.

[J] J.C. Jantzen, Zur Charakterformel gewisser Darstellungen halbeinfacher Gruppen und Lie-Algebren, Math. Z. 140 (1974), 127-149.

[Ka.1] S. Kato, Spherical functions and a q-analogue of Kostant's weight multiplicity formula, Invent. Math. 66 (1980), 461-468.

[Ka.2] S. Kato, On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups, Preprint.

[K-L] D. Kazhdan and G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979), 165-184.

[L.1] G. Lusztig, Some problems in the theory of finite Chevalley groups, Proc. Symp. Pure Math. 37 (1980), 313-317.

[L.2] G. Lusztig, Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition pattern, Adv. in Math. 37 (1980), 121-164.

[L.3] G. Lusztig, Singularities, character formulas, and a q-analog of weight multiplicities, Asterisque, to appear.

[S] R. Steinberg, Representations of algebraic groups, Nagoya Math. J. 22 (1963), 33-56.

[川渡] 加藤, Chevalley群のモジュラー表現入門.
「川渡セミナー」(代数群)報告集, 1980, 1-44.

[横浜] 加藤, Chevalley群のモジュラー表現入門'.
「群および環の表現とその応用」シンポジウム報告集(横浜), 1981, 128-159.