数理解析研究所講究録
第 504 巻 1983 年 157-164

情報伝送についての関数解析的一考察

東理大 理工　渡辺 昇 (Noboru Watanabe)

Introduction

Hilbert 空間上の Gauss 測度の研究と，それを通信理論に適用する試みは Rao-Varadarajan〔6〕, Baker〔1, 2〕, Ihara〔4〕, Yanagi〔8〕等によってなされており，特に Baker〔2〕は Skorohod〔7〕や Rao-Varadarajan らの計算を通し，Gelfand-Yagrom〔3〕の仕事をもとに，入力を Gauss 測度とし，通信路の雑音を Gauss 測度とする通信路（Gauss型通信路）において，相互情報量を定義した。ここでは，この相互情報量が，通常の通信工学的に用いられている微分エントロピーの計算と相いれないことを簡単に述べる。

§1 Hilbert 空間上の Gauss 測度の定義

$\mathcal{H}$ を実可分な Hilbert 空間とし，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{H}$ の Borel σ-field とする。μ を，次を満たす $\mathcal{H}$ 上の Borel 確率測度とする。

任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$$

次に，$\mathcal{H}$ の平均ベクトル m_μ と，$\mathcal{H}$ 上の共分散作用素 R_μ を定義する。任意の Φ_1 ，Φ_2 ，$\Psi \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\langle \Phi_1 , m_\mu \rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle \Phi_1 , \Phi_2 \rangle \mu (d\Phi_2)$$

$$\langle \Phi_1 , R_\mu \Phi_2 \rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle \Phi_1 , \Psi - m_\mu \rangle \langle \Phi_2 , \Psi - m_\mu \rangle \mu (d\Psi)$$

μ の特性関数 $\hat{\mu}$ は，任意の $\Phi \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\hat{\mu}(\Phi) = \int_{\mathcal{H}} e^{i\langle \Phi, \Psi \rangle} \mu (d\Psi), \Psi \in \mathcal{H}$$

と与えられる。 μ が $\mathcal{H}$ 上の Gauss 測度であるとは，次の条件を満たす $\mathcal{H}$ 上の Borel 測度である。各々 $\Phi \in \mathcal{H}$ に対して，次の式を満たす実数 m_Φ，θ_Φ が存在する。

$$\mu \{\Psi \in \mathcal{H} ; \langle \Psi, \Phi \rangle \leqq a\} = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_\Phi}} e^{-\frac{(t-m_\Phi)^2}{2\theta_\Phi}} dt$$

このとき，〔5〕の結果から，平均ベクトルが 0 の Gauss 測度 μ と μ の共分散作用素は，1対1に対応していることがわかる。以下，平均ベクトルが m，共分散作用素が R の Gauss 測度 ν を，$\nu = (m, R)$ と書くことにする。$\mu_1 = (0, \sigma_1)$, $\mu_2 = (0, \sigma_2)$ を2つの Gauss 測度とすると，$\mu_1 \sim \mu_2$ 又は $\mu_1 \perp \mu_2$ となっている。また，$\mu_2 \ll \mu_1$ ならば，

$I(\mu_1 | \mu_2)$

$$= \int_{\mathcal{H}} \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\Phi) \log \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(\Phi)\, d\mu_1(\Phi)$$

$\mu_2 \not\ll \mu_1$ ならば，$I(\mu_1 \mid \mu_2)=\infty$ である。

§2 Gauss 型通信路

$(\mathcal{H}_1, \mathcal{B}_1)$ を入力空間，$(\mathcal{H}_2, \mathcal{B}_2)$ を出力空間とする。ここで変換 λ：$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{B}_2 \longrightarrow [0, 1]$ が Gauss 型通信路であるとは

(1)任意の $x \in \mathcal{H}_1$ に対して，$\lambda(x, \cdot)$ は $\mathcal{H}_2$ 上の Gauss 確率測度；

(2)任意の $Q \in \mathcal{B}_2$ に対して，$\lambda(\cdot, Q)$ は $(\mathcal{H}_1, \mathcal{B}_1)$ 上の可測関数。

μ_1 を入力の Gauss 確率測度とし，μ_0 を通信路の雑音を表わす Gauss 測度とすると，出力の Gauss 確率測度 μ_2 は，通信路 λ を用いて次のように表わせる。任意の $Q \in \mathcal{B}_2$ に対して，

$$\mu_2(Q) = \int_{\mathcal{H}_1} \lambda(x, Q)\, \mu_1(dx)$$

ここで，$\lambda(x, Q) \equiv \mu_0(Q^x)$ であり，

$$Q^x = \{y \in \mathcal{H}_2 ; Ax + y \in Q\}$$

である。μ_1 と μ_2 の合成測度 μ_{12} は，任意の $Q_1 \in \mathcal{B}_1$，任意の $Q_2 \in \mathcal{B}_2$ に対して，

$$\mu_{12}(Q_1 \times Q_2) = \int_{Q_1} \lambda(x, Q_2)\, \mu(dx)$$

と書ける。

〈考察１〉 簡単のために $\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_2=\mathbb{R}^2$ とする。 μ_1 と μ_0 を次のように定める。 任意の $x\in\mathcal{H}_1$ に対して，

$$\mu_1\{x_i\in\mathcal{H}_1;\langle x_i,x\rangle\leqq a\}$$
$$=\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{1ii}}}e^{-\frac{t^2}{2\theta_{1ii}}}dt$$

任意の $y\in\mathcal{H}_2$ に対して，

$$\mu_0\{y_j\in\mathcal{H}_2;\langle y_j,y\rangle\leqq b\}$$
$$=\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_{2jj}}}e^{-\frac{\tau^2}{2\theta_{2jj}}}d\tau$$

ここで，$\theta_{1ij}=\lambda_i\ \delta_{ij}$，$\theta_{2ij}=\beta_i\ \delta_{ij}$ とする。 μ_1 の共分散作用素 ρ_1 と μ_0 の共分散作用素 ρ_0 は，

$$\rho_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\qquad \rho_2=\begin{pmatrix}\beta_1 & 0\\ 0 & \beta_2\end{pmatrix}$$

となる。 更に，$\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への線形変換 A を次のように定める。

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{\pi e\beta_1}{\lambda_1}} & 0\\ 0 & \sqrt{\dfrac{\pi e\beta_2}{\lambda_2}}\end{pmatrix}$$

これらの仮定より，出力測度 μ_2 の共分散作用素 ρ_2 は，

$$\rho_2=\begin{pmatrix}(\pi e+1)\beta_1 & 0\\ 0 & (\pi e+1)\beta_2\end{pmatrix}$$

となる。 〔1〕の定理２（B）より $R_{12}=\rho_1^{1/2}V\rho_2^{1/2}$ と置くと，

$$V=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{\pi e}{\pi e+1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi e}{\pi e+1}}\end{pmatrix}$$

を得る。 更に，〔2〕の命題2より，

$$I(\mu_{12}\mid\mu_1\otimes\mu_2)=\log(\pi e+1)$$

となる。 ところで，Ｇａｕｓｓ 型入力の情報量として，通常の通信工学において，

よく用いられている微分エントロピー〔10〕を用いてみると，

$$\begin{aligned}S(\mu_1)&=-\int_{\mathbb{R}^2}\frac{d\mu_1}{dm}\log\frac{d\mu_1}{dm}dm\\&=\log(2\pi e)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\\&\leqq\log(\pi e)\quad\left(\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

ここで，ｍ は $\mathbb{R}^2$ 上の Ｌｅｂｅｓｇｕｅ 測度である。 従って，伝送容量 Ｃ

は，

$$\begin{aligned}C&=\sup_{\mu_{12}}\{I(\mu_{12}\mid\mu_1\otimes\mu_2)\,;\,\mu_{12}\sim\mu_1\otimes\mu_2\}\\&\geqq I(\mu_{12}\mid\mu_1\otimes\mu_2)=\log(\pi e+1)\\&>\log(\pi e)\geqq S(\mu_1)\end{aligned}$$

となり，この $S(\mu_1)$ は Ｓｈａｎｎｏｎ の通信理論〔9〕を考えた場合に，

Ｂａｋｅｒ 流の伝送容量の定義と矛盾する。 Ｇａｕｓｓ 型入力の情報量

$S(\mu_1)$ を

$$S(\mu_1)=\sup_{\tilde{A}}\{-\sum_{A\in\tilde{A}}\nu_1(A)\log\nu_1(A)\,;\,\tilde{A}\in\mathcal{P}(\mathcal{B}_2)\}$$

とする。 ここで $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2)$ は，$\mathcal{B}_2$－分割の全体を表わす。 このように定めると，

$S(\mu_1)$ は発散してしまうことがわかる。 故に，伝送容量は，$S(\mu_1)$ より小さ

くなるが，通信工学的な情報伝送を考える場合において，入力の情報量が無限大というのは意味をもたない。

＜考察２＞ $\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$を上記と同じとする。 入力の Ｇａｕｓｓ 測度 μ_1 の共分散作用素 ρ_1 と通信路の雑音 μ_0 の共分散作用素 ρ_0 を次のように定める。

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \rho_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

ここで，$\lambda\ +\lambda\ =1$ とする。 また，　→　への線形変換 A を，

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2\beta_1}{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2\beta_2}{\lambda_2}} \end{pmatrix}$$

と取る。すると，出力の Ｇａｕｓｓ 測度 μ の共分散作用素 ρ は，

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 3\beta_1 & 0 \\ 0 & 3\beta_2 \end{pmatrix}$$

となり，更に V は，

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

となる。 従って，$I(\mu_{12} \mid \mu_1 \otimes \mu_2) = \log 3$ を得る。 ところで，ρ_1 は，$\mathcal{H}_1$ の力学系の状態とみることができるので，入力の情報量として，状態 ρ_1 の持つ ｖｏｎ Ｎｅｕｍａｎｎ エントロピー〔11〕$S(\rho_1)$を採用する。 この値は，

$$\begin{aligned} S(\rho_1) &= -\mathrm{tr}(\rho_1 \log \rho_1) \\ &= -\sum_{n=1}^{2} \lambda_n \log \lambda_n \\ &\leqq \log 2 \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

この通信路の伝送容量　C　は，

$$C=\sup_{\mu}\{I(\mu\,|\,\mu_{\Delta})\,;\,\mu\ \text{が合成 Gauss 測度で}\ \mu\sim\mu_{\Delta}\}$$

$$\geqq I(\mu_{12}\,|\,\mu_{1}\times\mu_{2})=\log 3$$

$$>\log 2\geqq S(\rho_{1})$$

となり，Ｓｈａｎｎｏｎ　の通信理論の伝送容量の定義と矛盾する。

これらの考察より，共分散作用素を　Ｇａｕｓｓ　測度で近似してやる方法は良い近似ではないことがわかり，また，Ｇａｕｓｓ　測度から　Ｋｕｌｌｂａｃｋ－Ｌｅｉｂｌｅｒ　の方法で伝送容量を計算するという方法は，工学的な通信を考えた場合に妥当でないこともわかった。 詳しい考察は後の論文に書く予定である。

参考文献

1. C.R. Baker, Joint measures and cross-covariance operators, Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973),273-289.
2. __________, Capacity of the Gaussian channel without feedback, Infor. and Control 37 (1978),70-89.
3. I.M. Gelfand and A.M. Yaglom, Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function, Uspehi Mat. Nauk 12 (1957),3-52.
4. S. Ihara, Onthe capacity of the discrete time Gaussian channel with feedback, Trans. Prague Conf. Vol. C, Czecho. Academy Sci. (1979),175-186.
5. H.H. Kuo, Gaussian Measures in Banach Spaces, Springer, Berlin (1975).
6. C.R. Rao and V.S. Varadarajan, Discrimination of Gaussian processes, Sankhyā, Ser. A, 25 (1963),303-330.
7. A.V. Skorohod, Integration in Hilbert Space, Springer -Verlag Berlin, New York, (1974).

8. K. Yanagi, On some properties of Gaussian channels, J. Math. Anal. Appl. 88 (1982),364-377.

9. 国沢清典，情報理論I，共立出版(情報科学講座)，(1983).

10. 梅垣寿春・大矢雅則，確率論的エントロピー，共立出版(情報科学講座)，(1983).

11. 梅垣寿春・大矢雅則，量子論的エントロピー，共立出版(情報科学講座)，(1984).