数理解析研究所講究録
第 505 巻 1983 年 17-31

Stunted projective spaces の stable Hurewicz image について.

和歌山大学　森杉　馨　(Kaoru Morisugi)
和歌山大学　今岡光範　(Mitsunori Imaoka)

§1. Introduction

HP^n (resp. CP^n) $(1 \leqq n \leqq \infty)$ を quaternionic (complex) n-dim projective space とし、Q^n $(1 \leqq n \leqq \infty)$ を $(4n-1)$-dim quaternionic quasi-projective space とする。そして KP^n で HP^n 又は ΣQ^n を表わす。(以下、ΣX は X の reduced suspension, $\Sigma^i X = \Sigma \cdots \Sigma X$ (i回) とする。)

本稿では、KP^∞ に対するある stable map $\Sigma^{4n} KP^\infty \longrightarrow KP^\infty$ を定義し、それを用いて、stable homotopy group $\pi_*^S(KP^\infty)$ の free part の生成元が構成できることと、stunted projective space KP^n/KP^l の top cell の attaching map の位数に関するいくつかの結果が得られることを報告する。

我々の結果及び方法は多くが stable category の中で考えるので、space X は同時にその suspension spectrum を表わし、map $f: X \longrightarrow Y$ は X, Y の suspension spectra の間の degree 0 の map を表わす。例えば、$f: \Sigma^m X \longrightarrow Y$ と書けば、degree $-m$ の stable map を

意味する。更に map f の stable homotopy class も同じ f で表わす。

KP^n 及び CP^n の整係数 homology group は次の様に表わす：

$$\tilde{H}_*(HP^n) = Z\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}, \quad \dim \beta_i = 4i.$$

$$\tilde{H}_*(Q^n) = Z\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}, \quad \dim \gamma_i = 4i-1.$$

$$\tilde{H}_*(CP^n) = Z\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}, \quad \dim b_i = 2i.$$

KP^n で HP^n と ΣQ^n を表わすとき、β_i と γ_i を共に β_i で表わすことにする。つまり

$$\tilde{H}_*(KP^n) = Z\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}, \quad \dim \beta_i = 4i.$$

これらの生成元は、次の関係を満たす様に取る。cofiber seq.

(1.1) $\quad CP^\infty \xrightarrow{g} HP^\infty \longrightarrow Q^\infty \xrightarrow{\Delta} \Sigma CP^\infty \qquad$ (cf. [James])

に対して、$g_*(b_{2i}) = \beta_i, \quad \Delta_* \gamma_i = b_{2i-1}$.

§2. Stable self maps of KP^∞

この章では、次の結果を示す。

<u>定理 2.1.</u> $n \geqq 0$, $s \geqq 1$ のとき、homology group の induced homom. が次の形で与えられる stable map

$$f(n,s) : \Sigma^{4n} KP^\infty \longrightarrow KP^\infty$$

が存在する：

$$f(n,s)_*(\beta_k) = \begin{cases} a(n+s-1)\dfrac{(2n+2k)!}{(2k)!}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\binom{2s}{i}(s-i)^{2k}\right)\beta_{n+k}, & (KP^\infty = HP^\infty \text{ のとき}), \\ a(n+s-1)\dfrac{(2n+2k-1)!}{(2k-1)!}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\binom{s}{i}(s-i)^{2k-1}\right)\beta_{n+k} & (KP^\infty = \Sigma Q^\infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで $a(i)=1$ (i;偶数), $=2$ (i;奇数) とする。
そして更に、$\{f(n,s)_*\}_{s\geq 1}$ は $[\Sigma^{4n}HP^\infty, HP^\infty]^S$ から
$\mathrm{Hom}(H_*(HP^\infty), H_{4n+*}(HP^\infty))$ への自然な map の像の基底をなす。
($[X,Y]^S=\{f: X\to Y$ (stable map) の stable homotopy class$\}$) 」

特に上の定理の stable map のうち、

(2.2) $f=f(2,1): \Sigma^8 KP^\infty \to KP^\infty$, $f'=f(1,1): \Sigma^4 KP^\infty \to KP^\infty$

とおく。そのとき、次の系が上の定理より直接求まる。いま
$x_n\in\pi^S_{4n}(KP^\infty)$ を次の様に定義する。

$$x_n=\begin{cases} f^m\cdot i : S^{8m+4}\xrightarrow{i}\Sigma^{8m}KP^\infty\xrightarrow{f^m}KP^\infty & (n=2m+1\text{のとき}),\\ f^{m-1}\cdot f'\cdot i : S^{8m}\xrightarrow{i}\Sigma^{8m-4}KP^\infty\xrightarrow{f'}\Sigma^{8(m-1)}KP^\infty\xrightarrow{f^{m-1}}KP^\infty & (n=2m\text{のとき}).\end{cases}$$

<u>系 2.2.</u> x_n は $\pi^S_{4n}(KP^\infty)$ の free part の生成元であり、

(2.3) $$h(x_n)=\begin{cases}\dfrac{(2n)!}{a(n)}\beta_n & (KP^\infty=HP^\infty\text{のとき}),\\ a(n-1)((2n-1)!)\beta_n & (KP^\infty=\Sigma Q^\infty\text{のとき}).\end{cases}$$

ここで、$h: \pi^S_{4n}(KP^\infty)\longrightarrow H_{4n}(KP^\infty)$ は stable Hurewicz homom.,
$a(i)$ は定理 2.1 における記号である。」

Im h の Index については、[Segal], [McGibbon] ($KP^\infty=HP^\infty$ のとき), [Walker] ($KP^\infty=\Sigma Q^\infty$ のとき) に示されている。系 2.2 は $\pi^S_{4n}(KP^\infty)$ の具体的な生成元が KP^∞ の stable self map を用いて

構成できることを主張している。尚、CP^∞ に対する系 2.2 の型の結果は classical に知られている。(cf. [Toda 1])

$f(n,s)$ の構成には、Segal-Becker による map

(2.4) $\tau : BSp \longrightarrow \Omega^\infty\Sigma^\infty HP^\infty$, $\tau_c : BU \longrightarrow \Omega^\infty\Sigma^\infty CP^\infty$

を用いる。これらの map は、inclusion $j : HP^\infty \longrightarrow BSp$, $j_c : CP^\infty \longrightarrow BU$ の canonical extension $\bar{j} : \Omega^\infty\Sigma^\infty HP^\infty \longrightarrow BSp$, $\bar{j}_c : \Omega^\infty\Sigma^\infty CP^\infty \longrightarrow BU$ に対して、$\bar{j}\tau = id$, $\bar{j}_c\tau_c = id$ を満たす。いま、$\tilde{\tau} : BSp \longrightarrow HP^\infty$, $\tilde{\tau}_c : BU \longrightarrow CP^\infty$ をそれぞれ τ, τ_c の adjoint map である stable map とする。次は明らか。

補題 2.3. $\tilde{\tau}_*(j_*\beta_n) = \beta_n$, $\tilde{\tau}_*(decomp.) = 0$,

$\tilde{\tau}_{c*}(j_{c*}b_n) = b_n$, $\tilde{\tau}_{c*}(decomp.) = 0$. $\lrcorner$

さて、$c' : \widetilde{KSp}(\Sigma^{4n}HP^\infty) \longrightarrow \tilde{K}(\Sigma^{4n}HP^\infty)$ を complexification とする。よく知られている様に、c' は単射であり、その像は $\{a(n+s-1)t^{2n}z^s \mid s \geq 1\}$ ($a(i)$ は定理 2.1 の記号) で生成されている。ここで、$t \in \tilde{K}(S^2)$ は generator, $z = c'(\xi - 1)$ (ξ は HP^∞ 上の canonical quaternionic line bundle) である。いま、$f'(n,s) : \Sigma^{4n}HP^\infty \longrightarrow BSp$ は、$a(n+s-1)t^{2n}z^s$ を表わす map とし、合成 $\tau f'(n,s) : \Sigma^{4n}HP^\infty \longrightarrow BSp \longrightarrow \Omega^\infty\Sigma^\infty HP^\infty$ の

adjoint map を $f(n,s)$ と定義する。つまり

(2.5) $\quad f(n,s) : \Sigma^{4n} HP^\infty \longrightarrow HP^\infty$ (stable map)。

一方、$a(n+s-1)\, t^{2n} \tilde{\eta}^s \in \tilde{K}(\Sigma^{4n} CP^\infty)$ ($\tilde{\eta} = \eta - 1$, η は CP^∞ 上の canonical complex line bundle) を考え、それを表わす map を $f'_c(n,s) : \Sigma^{4n} CP^\infty \longrightarrow BU$ とする。合成 $\tau_c f'_c(n,s) : \Sigma^{4n} CP^\infty \longrightarrow BU \longrightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty CP^\infty$ の adjoint map を

(2.6) $\quad f_c(n,s) : \Sigma^{4n} CP^\infty \longrightarrow CP^\infty$ (stable map)

とする。そのとき、natural map $q : CP^\infty \longrightarrow HP^\infty$, $q : BU \longrightarrow BSp$ に関して、$f'(n,s)$ 及び $f'_c(n,s)$ の定義より $q f'_c(n,s) = f'(n,s)(\Sigma^{4n} q) : \Sigma^{4n} CP^\infty \longrightarrow BSp$ が成り立つ。更に、[Kōno] により $(\Omega^\infty \Sigma^\infty q)\tau_c = \tau q : BU \longrightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty HP^\infty$ が成り立ち、それ故 $q f_c(n,s) = f(n,s)(\Sigma^{4n} q)$ が成り立つ。(1.1) の cofibering とこの等式により、

(2.7) $\quad g(n,s) : \Sigma^{4n} Q^\infty \longrightarrow Q^\infty$ (stable map)

が、次の stable diagram を可換にする様に定義できる：

(2.8)
$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{4n} HP^\infty \arrow[r] \arrow[d, "f(n,s)"] & \Sigma^{4n} Q^\infty \arrow[r] \arrow[d, "g(n,s)"] & \Sigma^{4n+1} CP^\infty \arrow[d, "\Sigma f_c(n,s)"] \\
HP^\infty \arrow[r] & Q^\infty \arrow[r] & \Sigma CP^\infty .
\end{tikzcd}$$

いま、$f(n,s) : \Sigma^{4n} KP^\infty \longrightarrow KP^\infty$ を、$KP^\infty = HP^\infty$ のとき (2.5) の $f(n,s)$, $KP^\infty = \Sigma Q^\infty$ のとき、(2.7) の $g(n,s)$ として定義する。

定理 2.1 は、これらの定義と補題 2.3 及び特性類に関する基本的な計算によって証明出来る。

§3. Stable Hurewicz image of KP^n/KP^i $(i=1,2)$

Atiyah - Hirzebruch spectral sequence

$$(3.1) \quad E^2_{p,q} = \tilde{H}_p(KP^\infty;\ \pi^S_q(S^0)) \Longrightarrow \pi^S_{p+q}(KP^\infty)$$

を考える。 §2 の系 2.2 は、次のことを示している：

$$t\beta_n \in E^\infty_{4n,0} \iff \begin{cases} \dfrac{(2n)!}{a(n)} \mid t & (KP^\infty = HP^\infty \text{のとき}), \\ a(n-1)(2n-1)! \mid t & (KP^\infty = \Sigma Q^\infty \text{のとき}). \end{cases}$$

ここで、$a(i) = 1$ (i; 偶数), $= 2$ (i; 奇数) であり、この記号は以後断わりなく用いる。$k \mid l$ は整数 k が整数 l の約数であることを示す。

この章ではまず、§2 の stable map $f : \Sigma^8 KP^\infty \longrightarrow KP^\infty$ を用いて、(3.1) の spectral sequence の transgressive element に関して、次の結果を示す。いま、

$$t_n = \begin{cases} \dfrac{(2n)!}{60} & (n;\text{奇数}) \\ \dfrac{(2n)!}{24} & (n;\text{偶数}) \end{cases} (KP^\infty = HP^\infty \text{のとき}), \quad = \begin{cases} \dfrac{(2n-1)!}{15} & (n;\text{奇数}) \\ \dfrac{(2n-1)!}{6} & (n;\text{偶数}) \end{cases} (KP^\infty = \Sigma Q^\infty \text{のとき})$$

とする。

<u>定理 3.1.</u> $n \geqq 2$ のとき、$t_n\beta_n \in E^{4n-4}_{4n,0}$ で、$d^{4n-4}(t_n\beta_n)$

$= \beta_1 \otimes \alpha(n)$ である。($\alpha(n)$ は (3.4) で定義する。)」

次の記号を用いる。

(1) $KP^n_\ell = KP^n/KP^{\ell-1}$ $(n \geq \ell \geq 1)$; stunted projective space, $p_{k,\ell} : KP^n_k \longrightarrow KP^n_\ell$; collapsing map, $i_{k,\ell} : KP^k_m \longrightarrow KP^\ell_m$; inclusion map, そして、$\partial_k : KP^n_{k+1} \longrightarrow \Sigma KP^k$ は cofiber sequence $KP^k \xrightarrow{i_{k,n}} KP^n \xrightarrow{p_{1,k+1}} KP^n_{k+1} \xrightarrow{\partial_k} \Sigma KP^k$ で与えられる map.

(2) $M_t = S^0 \cup_t e^1$ $(t \in \mathbb{Z})$; mod t Moore spectrum, $i_0 : S^0 \longrightarrow M_t$; inclusion map, $p_1 : M_t \longrightarrow S^1$; projection.

(3) $J_\ell : \pi_\ell(SO) \longrightarrow \pi^S_\ell(S^0)$; stable J-homom., $j_{4k-1} \in \pi^S_{4k-1}(S^0)$; $\mathrm{Im}\, J_{4k-1}$ の生成元。

さて、§2 で定義した stable map $f : \Sigma^8 KP^\infty \longrightarrow KP^\infty$ を、$\Sigma^8 KP^n$ に制限すれば、cellular approximation により、stable maps $f : \Sigma^8 KP^n \longrightarrow KP^{n+2}$ 及び $f : \Sigma^8 KP^n_\ell \longrightarrow KP^{n+2}_{\ell+2}$ が与えられる。これらの homology induced map は、定理 2.1 により

$$(3.2) \qquad f_*(\beta_n) = \begin{cases} \dfrac{(2n+4)!}{(2n)!}\beta_{n+2} & (KP^m_\ell = HP^m_\ell \text{ のとき}), \\ \dfrac{(2n+3)!}{(2n-1)!}\beta_{n+2} & (KP^m_\ell = \Sigma Q^m_\ell \text{ のとき}). \end{cases}$$

を満たす。特に $\Sigma^8 KP^1 = S^{12}$ に制限した stable map f を $f_1 : S^{12} \longrightarrow KP^3$ で表わす。そのとき、KP^3 の cell-structure により、cofiber sequences の間の次の可換図が成り立つ:

$$(3.3)\qquad \begin{tikzcd} \Sigma^{11}M_t \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "h(1)"] & S^{12} \arrow[r, "t\ \cancel{30}"] \arrow[d, "f_1"] & S^{12} \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "g'"] & \Sigma^{12}M_t \arrow[d, "h(1)"] \\ S^4 \arrow[r, "i_{1,3}"] & KP^3 \arrow[r, "p_{1,2}"] & KP^3_2 \arrow[r, "\partial_1"] & S^5 . \end{tikzcd}$$

但し、この図において、$KP^3 = HP^3$ (resp ΣQ^3) の場合に、$t = 30$ (resp. 15), g' は生成元 $\iota_{12} \in H_{12}(S^{12})$ に対し $g'_*(\iota_{12}) = 12\beta_3$ (resp. $8\beta_3$) をみたす map, $h(1)$ は $8\sigma_7$ (resp. $16\sigma_7$) のある extension である。更に、$A(1) : \Sigma^8 M_t \to M_t$ を $h(1)$ の任意の coextension とする。

他方、$KP^\infty = HP^\infty$ (resp. ΣQ^∞) の場合に、$s = 24$ (resp. 12), $h(2) : \Sigma^3 M_s \longrightarrow S^0$ は ν_3 (resp. $2\nu_3$) の任意の extension, $A(2)$: $\Sigma^8 M_s \longrightarrow M_s$ を $p_1 A(2) i_0 = 10\sigma_7$ (resp. $20\sigma_7$) をみたす map とする。

<u>定理 3.2.</u> $\varepsilon = 1$ (resp. 2), $k(\varepsilon) = 7$ (resp. 3), $M(\varepsilon) = M_t$ (resp. M_s) とする。そのとき、次の図は可換である。

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{12+k(\varepsilon)} M(\varepsilon) \arrow[r, "h(\varepsilon)"] \arrow[d, "A(\varepsilon)"] & S^{12} \arrow[r, "f_1"] & KP^3 \\ \Sigma^{4+k(\varepsilon)} M(\varepsilon) \arrow[rr, "h(\varepsilon)"] & & S^4 \arrow[u, "i_{1,3}"] \end{tikzcd}$$

(証明の概略)

$\varepsilon = 1$ のときは、(3.3) と $A(1)$ の定義により、

$$f_1 h(1) = f_1 p_1 A(1) = i_{1,3} h(1) A(1)$$

となり、定理が成りたつ。

$\varepsilon = 2$ の場合。 KP^3 の cell-structure と球面の homotopy group の結果 (cf. [Toda 2]) を用いて、map $\varphi : \Sigma^{15}M(2) \longrightarrow S^4$ s.t. $i_{1,3}\varphi = f_1 h(2)$ が存在することがわかる。 $\pi_{12}^S(S^0) = 0$ であることから、 $\varphi = h(2)A(2)$ であるための必要十分条件は $\varphi i_0 = h(2)A(2)i_0 \in \pi_{11}^S(S^0)$ であるが、 $\pi_{11}^S(S^0) = \mathrm{Im}\, J_{11}$ であることから、[Adams] により、それは $e_R'(\varphi i_0) = e_R'(h(2)A(2)i_0)$ であることに必要十分である。 $h(2)$, $A(2)$ の定義により、 $h(2)A(2)i_0 \in \langle \nu_3, 24, 10\nu_7 \rangle = 21\nu_{11}$ ($KP^3 = HP^3$ のとき), $\in \langle 2\nu_3, 12, 20\nu_7 \rangle = 42\nu_{11}$ ($KP^3 = \Sigma Q^3$ のとき) ($\langle\ ,\ ,\ \rangle$ は Toda-bracket) であり、 $e_R'(\varphi i_0)$ の方は functional Pontrjagin character を計算することによって、上記の等号が成り立つ。 (証明終)

定理 3.1 の $\alpha(n) \in \pi_{4n-5}^S(S^0)$ $(n \geq 2)$ は次の様に定義する:

$$\alpha(n) = \begin{cases} h(1)A(1)^{m-1}i_0 & (n = 2m+1 \text{ のとき}), \\ h(2)A(2)^{m-1}i_0 & (n = 2m \text{ のとき}). \end{cases}$$

(定理 3.1 の証明) n が奇数の場合と偶数の場合に分け、それぞれの場合に帰納法で示す。 $n=2$ の場合は、 HP^2 が ν_3 の mapping cone, Q^2 が $2\nu_3$ の mapping cone であることより、 $n=3$ の場合は、(3.3) より定理は成り立つ。

次の可換図を考える:

$$
\begin{tikzcd}
S^{4n+8}=\Sigma^8 KP_n^n \arrow[rr, "f"] & & KP_{n+2}^{n+2}=S^{4n+8} & \\
 & KP_2^{n+2} \arrow[ur, "p_{2,n+2}"] \arrow[dr, "p_{2,4}"] \arrow[ddd, "\partial_1"] & & \\
\Sigma^8 KP_2^n \arrow[uu, "p_{2,n}"] \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\partial_1"] & & KP_4^{n+2} \arrow[uu, "p_{4,n+2}"'] \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "\partial_3"] & \Sigma KP_2^3 \\
S^{13}=\Sigma^9 KP^1 \arrow[rr, "f_1"] & & \Sigma KP^3 \arrow[ur, "p_{1,2}"] & \\
 & S^5=\Sigma KP^1 \arrow[ur, "i_{1,3}"] & &
\end{tikzcd}
\tag{3.5}
$$

定理が n の場合に成り立つための必要十分条件は、ある map $X(n) : S^{4n} \longrightarrow KP_2^n$ で、$\deg\, p_{2,n} X(n) = t_n$ かつ $\partial_1 X(n) = \alpha(n)$ をみたすものが存在することである。

いま、定理3.2 と $\alpha(n)$ の定義により

$$f_1\, \alpha(n) = i_{1,3}\, \alpha(n+2) \tag{3.6}$$

が成り立つ。このことは、(3.5) を用いて、$\partial' f X(n) = 0$ を導く。故に、ある map $X' : S^{8n+4} \longrightarrow KP_2^{n+2}$ s.t. $p_{2,4} X' = f \cdot X(n)$ が存在し、(3.5) と (3.2) により、$\deg\, p_{2,n+2} X' = t_{n+2}$ が成り立つ。更に、ある map $y' : S^{4n+8} \longrightarrow KP_2^3$ が存在し、$\partial_1 (X' + i_{3,n+2}\, y') = \alpha(n+2)$ をみたす。そこで、$X(n+2) = X' + i_{3,n+2}\, y'$ とすれば、$\deg\, p_{2,n+2} X(n+2) = \deg\, p_{2,n+2} X' = t_{n+2}$ かつ、$\partial_1 X(n+2) = \alpha(n+2)$ が成り立ち、定理が $n+2$ の場合に成り立つ。　　　　(証明終)

さて、$h_{n,k}: \pi_{4n}^S(KP_k^\infty) \longrightarrow H_{4n}(KP_k^\infty)$ を stable Hurewicz homomorphism とし、その cokernel の位数を（つまり、$\mathrm{Im}\, h_{n,k}$ の index）を $|h_{n,k}|$ で表わす。そして、$|h_{n,k}|$ の素因数分解における2の指数 $\nu_2(|h_{n,k}|)$ を $|h_{n,k}|_2$ と表わす。系 2.1 より、$|h_{n,1}| = \frac{(2n)!}{a(n)}$ ($KP^\infty = HP^\infty$ のとき), $= a(n-1)\,(2n-1)!$ ($KP^\infty = \Sigma Q^\infty$ のとき) である。

定理 3.1 により次の定理を得る。

<u>定理 3.3.</u>　$n \geqq 2$ のとき、

$$|h_{n,2}|_2 = \begin{cases} \nu_2\left(\frac{a(n)\,(2n)!}{8}\right) & (KP_2^\infty = HP_2^\infty \text{ のとき}), \\ \nu_2\left(\frac{(2n-1)!}{a(n+1)}\right) & (KP_2^\infty = \Sigma Q_2^\infty \text{ のとき}). \end{cases}$$

証明は、左辺 ≧ 右辺に関しては、KO-theory を用いた standard な代数的計算によって保証される。（詳細は省略するが、例えば $KP_2^\infty = \Sigma Q_2^\infty$ の場合には [Walker] 参照。）故に、本質的なのは左辺 ≦ 右辺 を示すことにあるが、それが 定理 3.1 によって保証されている。

以上の方法を更に押し進めて KP_3^∞ の場合に次の定理を得る。（証明は省略する。）

<u>定理 3.4.</u>　$n \geqq 1$ のとき、次をみたす $X_n \in {}_2\pi_{8n+4}^S(KP_3^{2n+1})$

が存在する：

$$ {}_2h_{2n+1,3}(X_n) = \begin{cases} \dfrac{(4n+2)!}{16}\beta_{2n+1} & (KP_3^{2n+1} = HP_3^{2n+1} \text{ のとき})、\\ \dfrac{(4n+1)!}{8}\beta_{2n+1} & (KP_3^{2n+1} = \Sigma Q_3^{2n+1} \text{ のとき}). \end{cases} $$

ここで、${}_2\pi_*^S(X)$ は $\pi_*^S(X)$ の 2-part を表わし、$h: {}_2\pi_*^S(X) \longrightarrow H_*(X; Z_{(2)})$ は Hurewicz homom. である。」

§4. Complex James number

stunted complex projective space $CP_\ell^m = CP^m/CP^{\ell-1}$ に対して、$q_*: \pi_{2n-2}^S(CP_{n-k}^{n-1}) \longrightarrow \pi_{2n-2}^S(CP_{n-1}^{n-1}) = \pi_{2n-2}^S(S^{2n-2})$ の cokernel の位数を $U(n,k)$ で表わし、stable complex James number と呼ぶ。classical な結果として $U(n, n-1) = n!$ であることが知られている。$k\ (\geq 0)$ が小さな値に対して、[Ōshima] による $U(n,k)$ の計算がある。

$U_2(n,k)$ で $U(n,k)$ の素因数分解における 2 の指数 $\nu_2(U(n,k))$ を表わすとき、§2 及び §3 の結果を用いて次を得る。

<u>定理4.1.</u> (i) $U_2(2m, 2m-2) = \nu_2\left(\frac{(2m-1)!}{2}\right)$, $U_2(4m+1, 4m-1) = \nu_2((4m)!)$, $U_2(4m+3, 4m+1) = \nu_2\left(\frac{(4m+2)!}{2}\right)$.

(ii) $U_2(2m, 2m-3) = \nu_2\left(\frac{(2m-1)!}{2}\right)$, $U_2(2m+1, 2m-2) = \nu_2\left(\frac{(2m)!}{4}\right)$.

(iii) $U_2(4m+2, 4m-2) = \nu_2\left(\frac{(4m+1)!}{8}\right)$, $U_2(4m+3, 4m-1) = \nu_2\left(\frac{(4m+2)!}{4}\right)$.

(iv) $U_2(4m+2, 4m-3) = \nu_2\left(\frac{(4m+1)!}{8}\right)$, $U_2(4m+3, 4m-2) = \nu_2\left(\frac{(4m+2)!}{8}\right)$.

この証明には次の様な方法を用いる。natural projection $q: CP^\infty \longrightarrow HP^\infty$ に対する [Becker-Gottlieb] の transfer $t: HP^\infty_+ \longrightarrow CP^\infty_+$ を考えれば、HP^∞ に対する $|h_{n,k}|$ によって $U(2n+1, 2n-2k)$ は上から評価される。又、(1.1) の $\Delta: Q^\infty \longrightarrow \Sigma CP^\infty$ を考えれば、Q^∞ に対する $|h_{n,k}|$ によって、$U(2n, 2n-2k)$ は上から評価される。下からの評価は K-theory を用いる standard な方法による。(cf. [Walker].) それらの上下の評価が §2, §3 の方法を用いて一致する様にできるというのが定理の証明法である。

定理の (ii) を例にとって説明する。定理 3.1 によって、ある $X(n) \in \pi^S_{4n}(HP^n_2)$ s.t. $h_{n,2}(X(n)) = t_n \beta_n$ かつ、$\partial_1 X(n) = \alpha(n)$ が存在する。Transfer $t: HP^\infty_+ \longrightarrow CP^\infty_+$ について、$t_*(X(n))$ を考えれば $h_{2n,3}(t_* X(n)) = 2 t_n b_{2n}$ を満たす。ここで、$h_{2n,3}: \pi^S_{4n}(CP^{2n}_3) \longrightarrow H_{4n}(CP^{2n}_3)$ は stable Hurewicz homom. である。このことから、$U_2(2n+1, 2n-2) \leqq \nu_2\left(\frac{a(n)(2n)!}{4}\right)$ となる。$n(\geqq 2)$ が偶数のとき、この上からの評価は代数的な下からの評価と一致し、求める解になる。n が奇数のときはこのままでは代数的な下からの評価と 2 の指数が 1 だけの差がある。この場合を解決するために、次の方法を用いる。[Toda 1] より、stable map $F: \Sigma^2 CP^\infty \longrightarrow CP^\infty$ s.t. $F_*(b_n) = (n+1) b_{n+1}$ が存在する。cellular approximation により stable map

$F : \Sigma^2 CP_\ell^k \longrightarrow CP_{\ell+2}^{k+2}$ が考えられる。合成 $F\circ F\circ t\circ X(2m)$ $: S^{8m+4} \longrightarrow CP_5^{4m+2}$ を考える。$\partial_1(X(2m)) = \alpha(2m)$ であることを用いて、ある stable map $Y_{2m+1} : S^{8m+4} \longrightarrow CP_3^{4m+2}$ s.t. $p_{3,5}\, Y_{2m+1} = F\circ F\circ t\circ X(2m)$ が存在することが証明出来る。

F 及び t の homology induced map の形から、$h_{4m+2,3}(Y_{2m+1}) = \frac{(4m+2)!}{12} b_{2m+1}$ であることがわかる。このことより、$U_2(4m+2,\ 4m-1) \leqq \nu_2\left(\frac{(4m+2)!}{4}\right)$ が得られ、代数的な下からの評価と一致し解を得る。$U_2(2n, 2n-3)$ の方は、Q^∞ から Δ を用いて得られるが、説明を省略する。

尚、p が odd prime のとき、定理4.1 に対応する $U_p(n, k)$ に関しては、[Knapp] によって調べられている。

References

[Adams], On the groups J(X) - IV, Topology, 5 (1966), 21-71.

[Becker-Gottlieb], The transfer map and fiber bundles, Topology, 14 (1975), 1-12.

[James], The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc. Lecture note series, 24 (1976).

[Knapp], Some applications of K-theory to framed bordism: E-invariant and transfer, Habilitationsshrift, Bonn, 1979.

[Kōno], A note on the Segal-Becker type splittings, to appear in J. Math. Kyoto University.

[McGibbon], Self maps of projective spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 271 (1982), 326-346.

[Ōshima], On James numbers of stunted complex or quaternionic projective spaces, Osaka J. Math., 16 (1979), 479-504.

[Segal], On the stable homotopy of quaternionic and complex projective spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 25 (1970), 838-841.

[Toda 1], A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups, Memoire Coll. Sci. Kyoto Univ., 32 (1959), 103-119.

[Toda 2], Composition methods in homotopy groups of spheres, Annals of Math. Studies, no. 49.

[Walker], Estimates for the complex and quaternionic James numbers, Quart. J. Math. Oxford (2), 32 (1981), 467-489.