

アナコンとローレンツアトラクター

東京理科大学 戸川美郎 (Yoshio TOGAWA)

アナログコンピュータは そのいくつかのメリットにもかかわらず、デジタルコンピュータほどには普及しなかった。それはおそろしく

- (1) 汎用性を持たせにくい
- (2) 精度をあつめるのがむずかしい
- (3) 安定した信頼性が得られない。

ためと思われる。しかし逆に、これら(1), (2), (3)を要求せず目的が限られた用途では、専用のアナコンを作ると、高速性などのメリットが活かされてくる。特に、いくつかのパラメータを持った常微分方程式の族を集中的に調べたい時——
どのような phase portrait か? どのような bifurcation を
示すか? ストレンジアトラクターを持つか? ストレンジ
アトラクターはどんなふるまいをするか—— などでは、最もその強みを発揮する。ただし、あくまでも

- (1) 望む用途専用のアナコン(単能アナコン)を作る

- (2) 精度は 数パーセント程度しか要求
しない。 } デジタルコンピュータ
で追試する。
- (3) 信頼性もあまり要求しない

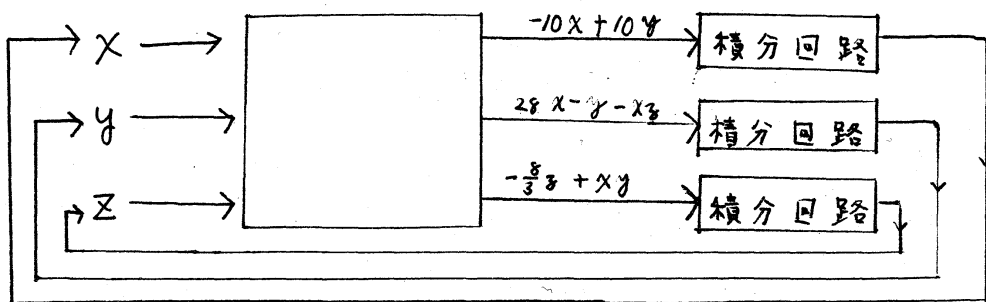
ということにしない限り コストなどで割が合わないだろう。

常微分方程式を与えられて「ほとほとの精度」と「ほとほとの信頼性」をもち、それを実現する回路を作ることは、それほど難くない。以下では、この研究集会で発表したローレンツアトラクター用アナコンの回路について説明する。

ローレンツ方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y \\ \dot{y} = 28x - y - xz \\ \dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy \end{cases} \quad \text{----- ①}$$

とシミュレートする回路を作りたい。回路のあるところの電圧 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ が①に従うようにする。まず x , y , z から①の右辺を作り、それを積分して その結果を x , y , z とする。



λ, γ, z から①の右辺を作るためには,

(i) 電圧 V を λ 倍する $V \longrightarrow \lambda V$

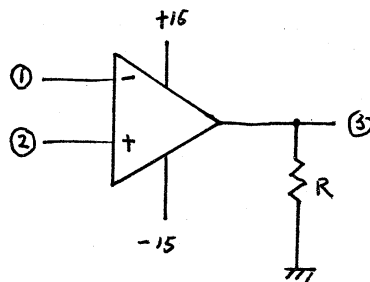
(ii) 電圧 V_1 と V_2 を加える $V_1, V_2 \longrightarrow V_1 + V_2$

(iii) 電圧 V_1 と V_2 の積を作る $V_1, V_2 \longrightarrow V_1 V_2$

ができればならない。

(i), (ii) はオペアンプを使えばすぐできる。オペアンプについて簡単にまとめておく。

オペアンプは $+15V, -15V$ の 2 電源を必要とする。



理想的なオペアンプは

(1) ②と①の電圧差 $(② - ①)$ を ∞ 倍増幅して③に出力する。

(2) ①, ②からオペアンプへは電流は流れ込まない (入力インピダンス無限大)

(3) 抵抗 R の値によって③の電圧は変化しない。

しかし実際のオペアンプでは

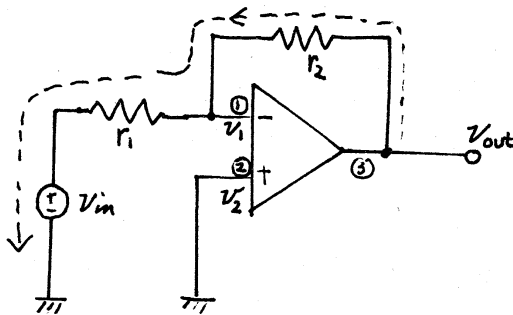
(1)' ∞ 倍ではなく (非常に大きな値) A 倍である。この

値 A は、入力電圧の、②が非常に速く変化するとき
は小さくなってしまふ。このことは回路の動作速度
に上限を与える。

(2) わずかな電流がオペアンプに流れ込む。これは、回
路の精度を制限する。

(3) 抵抗 R の値は、あまり小さくできない ($1\text{k}\Omega$ 以下に
はしない方が無難)

オペアンプはほとんどの場合フィードバックをかりて使用
する。下の回路は電圧のスカラ一倍する回路例である



抵抗 R_2 がフィードバック (無限大のネガティブフィードバッ
ク) を与える。これは ①と③の電圧は互いに逆向きに変化
し、しかも③の変化は大きく、③と①が抵抗で結ばれてい
るため①の電圧と③の電圧が打ち消すように働くことを意味す
る。例之は ①が負の電圧になると V_3 は $V_2 - V_1 = -V_1$ の ∞ 倍
すなわち $+\infty$ volt となり、上図の矢印のような大きな電流
が流れ、抵抗 R_1 での電圧降下により①の電圧は上昇し 結局

0 volt ($=V_2$)となる。結局正常にフィードバックがかかった
 使い方は①と②の電圧は常に等しくなる (増幅度 ∞ である
 以上 ②-①=0でない限り V_2 は有限の電圧にはれない。
 もっとも実際には、どんな使い方としても電源電圧以上は出
 かし得ない)

フィードバックのかかったオペアンアでは

(4) ①と②の電圧は等しい

それでは、上の回路がスカラー倍を与えることをみてみよう。

$V_1 = (V_2 =) 0$ なので、抵抗 r_1 での電圧降下は V_{in} voltであり

$$V_{in}/r_1 \quad (A)$$

の電流が流れる。この電流はすべて抵抗 r_2 に流れる (入力
 インピーダンス無限大)。 r_2 での電圧降下は

$$(V_{in}/r_1) r_2 \quad (V)$$

であり、①の電圧は0 volt なので 出力電圧 V_{out} は

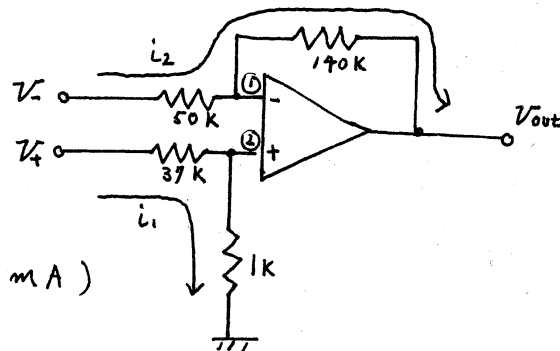
$$V_{out} = 0 - (V_{in}/r_1) r_2 = -\frac{r_1}{r_2} V_{in}$$

となる。この回路では、例えば $V_{out} = -2V_{in}$ としたいとき
 $r_1 = 2\Omega$, $r_2 = 1\Omega$ としても $r_1 = 1M\Omega$, $r_2 = 500k\Omega$ とし
 てもよい。しかし(2)', (3)', ノイズの影響, ストレイキャパシ
 ティーの影響などを考えると、 r_1 とか r_2 は $1k\Omega \sim 500k\Omega$
 ぐらいの間で選ぶのが無難である。

この回路では、入力電圧を0 volt とすれば出力電圧も0に

なるはずである。しかし実際にはわずかな電圧が残ってしま
う(オフセット電圧)。オフセット電圧は回路を複雑にすれ
ば調整して消すことができるが、ここではオフセット電圧は
誤差としてかたがけしてしまう。そのためには、小さな電圧を
扱わないで済むようにしなければならない。±0.1(V) 程度の
信号電圧は、オフセットが10mVのオペアンフで2倍する
と、出力信号は±0.2V程度、オフセットが10mVで5%近
くの誤差を生じてしまう。

オペアンフを用いた回路の例をもうひとつみてみよう。



$$i_1 = \frac{V_+}{38} \quad (\text{mA})$$

$$\text{②の電圧} = \frac{V_+}{38}$$

$$\text{①の電圧} = \text{②の電圧}$$

$$i_2 = \frac{1}{50} \left(V_- - \frac{V_+}{38} \right) \quad (\text{mA})$$

$$V_{out} = \frac{V_+}{38} - \frac{140}{50} \left(V_- - \frac{V_+}{38} \right) = -2.8 V_- + 0.1 V_+$$

このように、オペアンフを用いれば線形演算は自由に実現
できる。

次に掛け算だが、これはI.C.が市販されている(アナログ

デバイス AD533JH, インターシム, ICL8013CC, など)。これらはいずれも入力 x と入力 y に対し $\frac{x+y}{10}$ を出力する。

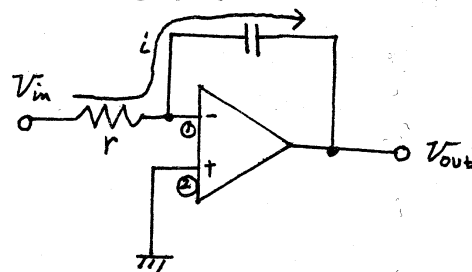
以上により、電圧 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ を入力すると方程式の右辺を出力する回路を作ることが出来る。

次に右辺を積分しなければならぬ。

積分回路もオペアンプで作ることが出来る。

$$\textcircled{1} \text{ の電圧} = \textcircled{2} \text{ の電圧} = 0$$

$$i = \frac{V_{in}}{r} \quad (\text{mA})$$



$$V_{out} = -V_c = -\int_0^t \frac{1}{rc} V_{in}(t) dt$$

ここで V_c は コンデンサーの両端の電圧

この積分回路もまた、正確には動作しない。例えば V_{in} を 0 volt に保ち、それでも $\textcircled{1}$ からオペアンプに流れ込む電流、コンデンサーのリーク、その他のために V_{out} は変化してしまう。しかし 微分方程式のシミュレーションとしての回路ではこういった影響は方程式の perturbation として考えることができ、それほど気にすることは無い。

以上で回路についての準備は終る。次にローレンツ方程式の方を オペアンプで実現しやすいように処理しておく。

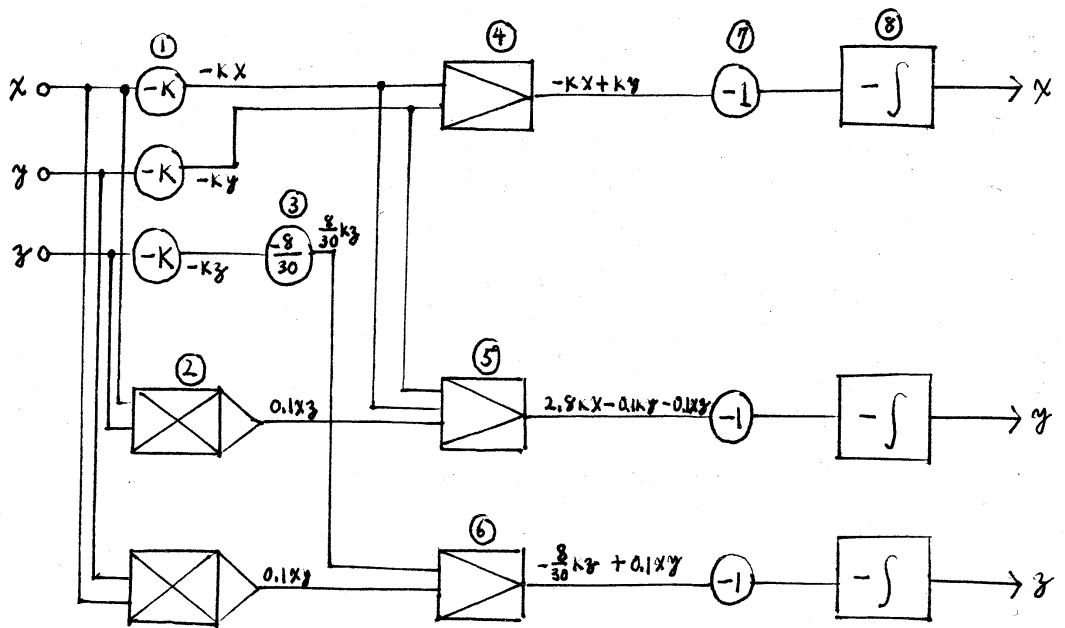
X, Y, Z は $\pm 15V$ の範囲におさまるように、しかもあまり小さくならないようにしなければならない。まず、方程式の右辺を 0.1 倍しておく。これはアトラクターのサイズは変えない。しかし X, Y とか X, Z とかの大きすぎる電圧 ($X = Y = 10(V)$ なら $X, Y = 100(V)$) はさけられる。次に X, Y, Z に適当なスカラーをかけて アトラクターを適当な大きさにする。しかし アトラクターの大きさがわからないので (文献をみればすぐわかることだが) 「適当なスカラー」は後からディブスイッチで設定するようにした。

方程式の右辺は次のようになる。

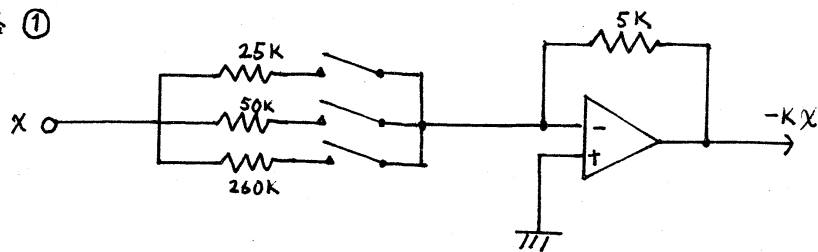
$$\begin{cases} X = -kX + kY \\ Y = 2.8kX - 0.1kY - 0.1XZ \\ Z = -\frac{8}{30}kZ + 0.1XY \end{cases}$$

ここで k の値を変えることにより アトラクターのサイズが変わる。

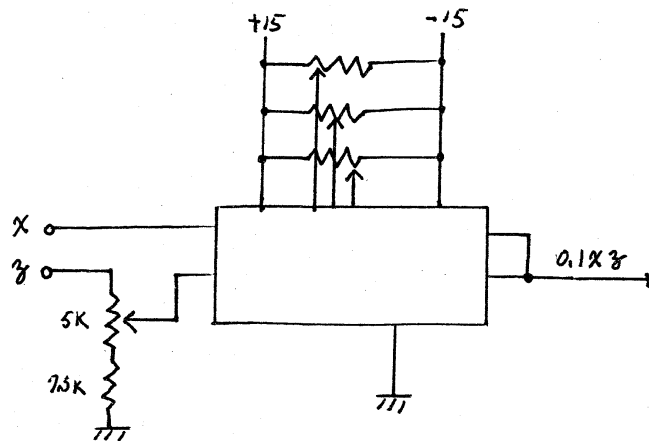
次に積分の時定数 RC だが、これはロータリースイッチにより C の値を選ぶようにした。

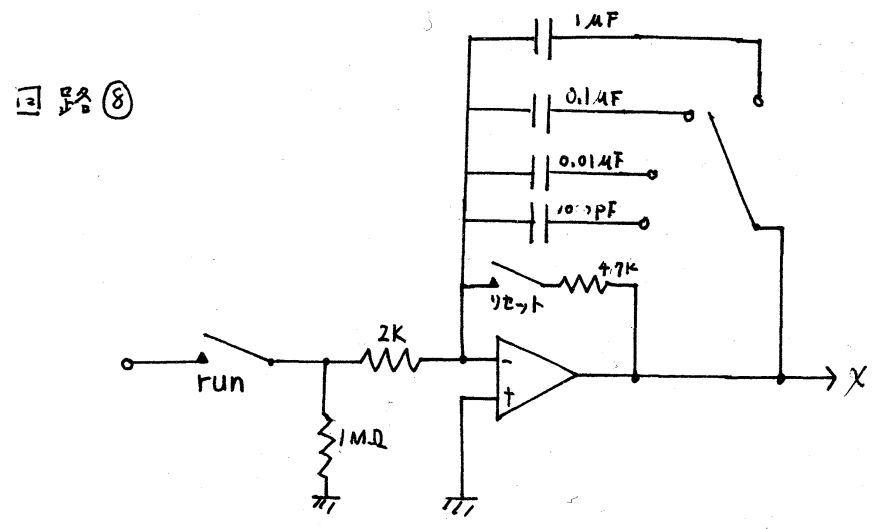
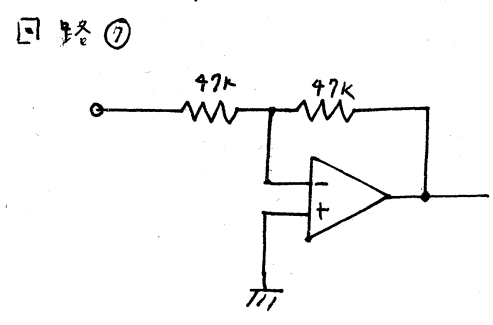
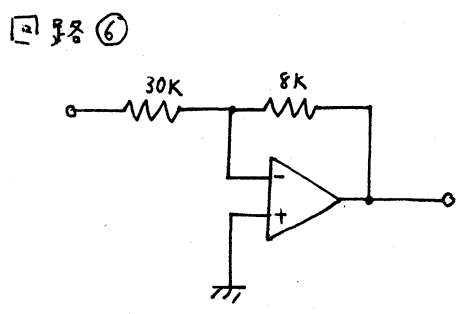
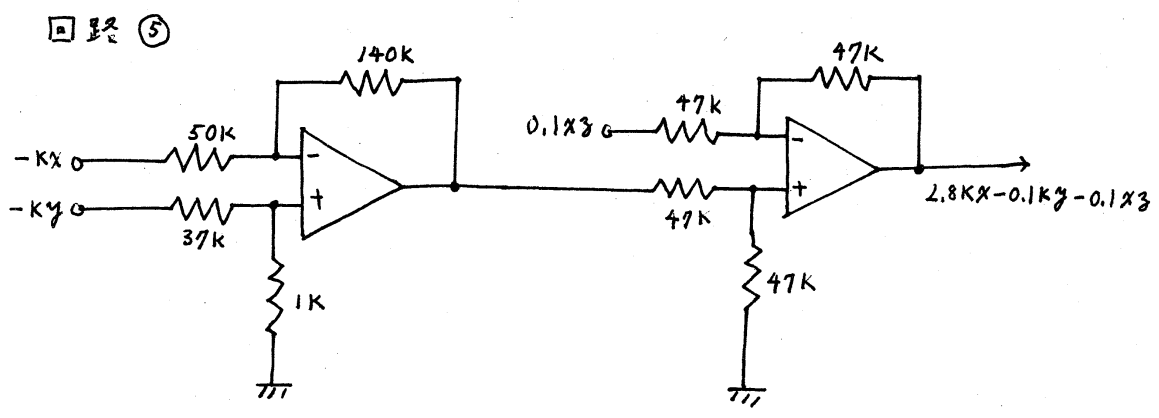
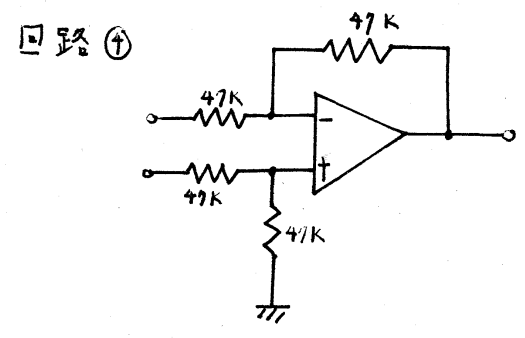
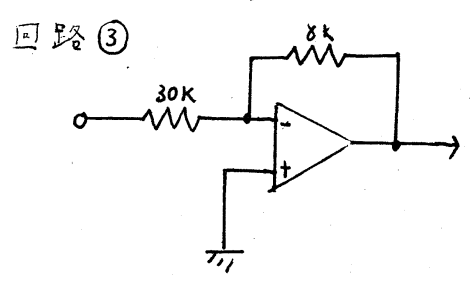


回路①



回路②





オペアンプは、T. I. TL071 と TL072

抵抗は $\frac{1}{4}W$ 1%級

コンデンサーは 1MF は $\pm 10\%$ のフィルムコンを 選別

その他は 1% スチコン

を用いた。全体としての精度は $\pm 5\%$ ぐらいのものだと思う。

この回路ではパラメータを変えることは考えていない。

後から 回路の入れやすい部分にボリュームをそう入してパラメータを変えられるようにした。しかし それは数学的に意味のある変え方ではない。

子は正の電圧しかとりないが、これは $\pm 15V$ の範囲で大きく動かす、という意味では非効率なので、後で子を $-7V$ 平行移動する回路を付加させた。