数理解析研究所講究録
第 506 巻 1983 年 129-138

Weierstrass の連続関数の周辺

京大理　山口　昌武 (Masaya Yamaguti)
京大理　畑　政義 (Masayoshi Hata)

いたるところ微分不可能な連続関数の例として、歴史的に最初に登場したのは、おそらく、次の Weierstrass の関数と呼ばれている Fourier 級数であろう。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \quad , 0<a<1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Weierstrass は、b は奇数かつ $ab > 1+\frac{3}{2}\pi$ という条件のもとに、いたるところ有限な微係数を持たないことを示したのであるが、その後 1916 年になって、G.H. Hardy が、$ab \geq 1$ という条件さえあれば、いたるところ微分不可能であることを証明した。もし、$|ab|<1$ であれば、上の級数を形式的に項別微分した級数が、一様収束することから、$ab=1$ というのが、critical な場合になっていることが、わかる。

さて一方で，単位区間上の一次元力学系；

$$\varphi(x) = 4x(1-x)$$

を考えよう。　この写像は，次の写像と位相共役であり，

$$\psi(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-2x & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

また，絶対連続な不変測度；$d\mu = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$　を持つことが知られている。　さて φ による n 回 iteration を φ^n と書くことにしよう。　すなわち，$\varphi^n(x) = \varphi(\varphi^{n-1}(x))$，$\varphi^0(x) \equiv x$ とする。　このとき，次の事実に注目しよう。

$$\varphi^n(x) = \sin^2(2^n \sin^{-1}\sqrt{x}) \quad , \quad x \in [0,1]$$

すると，この φ^n を用いて上述の Weierstrass 関数，特に，$b=2$ の場合が，次の様に書けることがわかる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2^n \pi x) = \frac{1}{1-a} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a^n \varphi^n \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} x\right).$$

したがって，級数；

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \varphi^n(x)$$

は，$a \in [\frac{1}{2}, 1)$ に対して，x に関して，いたるところ微分不可能であることがわかる。

連続で、いたるところ微分できない関数の他の例としては、1903 年に、高木貞治が発表した次のものが有名であろう。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi^n(x) , \quad x \in [0,1]$$

ここで、$\psi(x)$ は前述した、区分的に linear な関数である。高木の関数は、2進展開と関連しているが、2進のかわりに10進を用いれば、1928年に van der Waerden が再発見したものとなる。 もっと一般に、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \psi^n(x)$$

に関しては、$a \in [\frac{1}{2}, 1)$ に対して、x に関していたるところ微分不可能となることが、Faber の結果より従う。

以上の例からわかるように、いたるところ微分できない連続関数のいくつかは、ある一次元力学系を用いた母関数の形で表わされるのである。“微分できない” ということと、“力学系が初期値に関して十分 sensitive であること” とが密接にかかわっている様に思われる。

話を一般的にしよう。 閉区間 J 上の一次元力学系 φ と、J 上の関数 g とが与えられたとして、次の二変数関数

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n g(\varphi^n(x))$$

を考えよう。 Weierstrass の関数も、高木の関数も、この特別の場合として含まれている。 また、Weierstrass の関数の方は、もっと直接的に $g(x) = \cos \pi x$, $\varphi = \psi$ として与えられることに注意しておく。 特に、$t=0$ を代入すれば

$$F(0, x) = g(x)$$

であるから、g のことを初期関数と呼ぶことにしよう。

$F(t, x)$ は次の関数方程式を満たすことがわかる。

$$F(t, x) = t F(t, \varphi(x)) + g(x).$$

逆に、この関数方程式の解 $F(t, x)$ は、φ を用いた母関数で表わされることがわかる。

E を J 上の複素数値有界関数全体の、一様ノルムによる Banach 空間とする。 このとき、与えられた J 上の、一次元力学系 φ に対し、次のように、有界線形作用素 T_φ を定めよう。

$$T_\varphi(u) = u(\varphi(x)) \quad , \quad x \in J.$$

これはまた、algebra 上の Boulet 作用素とみることができ

る。　T_φ の固有値問題；

$$u(\varphi(x)) = \lambda\, u(x)$$

は、有名な Schröder の関数方程式である。また、T_φ の dual operator が、Perron-Frobenius 作用素である。
簡単な計算から、T_φ のスペクトル半径は1以下であることがわかり、したがって、$|\lambda| > 1$ に対し、T_φ の resolvent 作用素；

$$(\lambda \mathrm{Id} - T_\varphi)^{-1}$$

が存在する。　$F(t, x)$ に関する先の関数方程式は、この T_φ を用いて書き直せば、

$$F(t, x) = t\, T_\varphi\big(F(t, x)\big) + g(x)$$

したがって、

$$F(t, x) = \left(\mathrm{Id} - t\, T_\varphi\right)^{-1} g(x).$$

すなわち、大写像；　$g(x) \longrightarrow F(t, x)$　は、実は T_φ の resolvent 作用素であったのである。

高木の関数族；

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \psi^n(x)$$

を考えよう。すでに見ている様に、$t \in [\frac{1}{2}, 1)$ に対しては x に関していたるところ微分できない関数となる。これに反して、例えば、$t = \frac{1}{4}$ のときは、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \psi^n(x) = x(1-x).$$

すなわち、x の整関数となるのである。左辺は、三角形のギザギザの重ね合わせであることに注意しておく。さて、$C[0,1]$ の部分空間 E_0 を次のように定めよう。

$$E_0 = \left\{ f \in C[0,1] ;\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi^n(x) \right\}$$

すなわち、$\psi, \psi^2, \cdots$ の一次結合で表わされる連続関数全体を E_0 とするのである。このとき、E_0 は $C[0,1]$ の閉部分空間であり、また次の定理を示すことができる。

定理. $\{c_n\} \in l^1$.

この定理において、一次元力学系 ψ の軌道の複雑さがまさに反映していることを注意しておく。E_0 の元 f は、また次の様にも特徴付けられる。

定理. $f \in C[0,1]$ が E_0 に属することと、次の差分方程式系を満たすこととは、同値である。

$$\begin{cases} f\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left\{ f\left(\frac{i}{2^n}\right) + f\left(\frac{i+1}{2^n}\right)\right\} + c_{n+1} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

ただし, $0 \le i \le 2^n - 1$, $n \ge 0$ である。

この差分方程式系は. *central difference* の項を含んでいるが, そこのところを. parameter $\alpha \in (0,1)$ を入れて. 次の様に一般化できる.

$$\begin{cases} f\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = (1-\alpha) f\left(\frac{i}{2^n}\right) + \alpha f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + c_{n+1} \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \end{cases}$$

特に. $c_n \equiv 0$ の場合を考えよう。

$$\begin{cases} f\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = (1-\alpha) f\left(\frac{i}{2^n}\right) + \alpha f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \end{cases}$$

この場合は, f の連続性を考えると. 次の関数方程式と同値であることがわかる。

$$\begin{cases} f(x) = \alpha f(2x), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(x) = (1-\alpha) f(2x-1) + \alpha, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

この関数方程式は，確率の問題とからんで．De Rham によって考えられたものである。 $\omega_1, \omega_2, \cdots$ を次の様な i.i.d. random variables とする．

$$P(\omega_i = 0) = \alpha, \quad P(\omega_i = 1) = 1 - \alpha.$$

このとき．上述の関数方程式の解 $f_\alpha(x)$ は次の確率と一致する。

$$P\left[\ \omega = (\omega_1, \omega_2 \cdots)\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^n} < x\ \right]$$

また De Rham は，f_α に関する次の性質を示した。すなわち．f_α は狭義単調増加連続関数で．$\alpha \neq \frac{1}{2}$ ならば．$f_\alpha'(x) \equiv 0$ a.e. すなわち．f_α は Lebesgue の特異関数である。 また α を．$|\alpha| < 1$ かつ $|1-\alpha| < 1$ なる複素数にすることによって．De Rham の解は．複素平面上の．フラクタル曲線を与えるようである。 特に．$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ としたものは．P. Lévy によって調べられたものであるし．α を $\bar{\alpha}$ でおきかえれば．Koch 曲線や．Polya 曲線が．得られる。

さて．f_α に関する差分方程式系；

$$\begin{cases} f_\alpha\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = (1-\alpha)\, f_\alpha\left(\frac{i}{2^n}\right) + \alpha\, f_\alpha\left(\frac{i+1}{2^n}\right) \\ f_\alpha(0) = 0\ ,\quad f_\alpha(1) = 1 \end{cases}$$

を、αに関して偏微分してみよう。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha\left(\dfrac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = -f_\alpha\left(\dfrac{i}{2^n}\right) + (1-\alpha)\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha\left(\dfrac{i}{2^n}\right) \\
\qquad\qquad + f_\alpha\left(\dfrac{i+1}{2^n}\right) + \alpha\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha\left(\dfrac{i+1}{2^n}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha(0) = 0 \ , \quad \dfrac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha(1) = 0
\end{cases}
$$

ここで、 $f_{\frac{1}{2}}(x) \equiv x$ であることを用いて、簡単のために、

$$
F(x) = \left.\frac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha(x)\right|_{\alpha=\frac{1}{2}}
$$

とおけば、

$$
\begin{cases}
F\left(\dfrac{2i+1}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\left\{F\left(\dfrac{i}{2^n}\right) + F\left(\dfrac{i+1}{2^n}\right)\right\} + \dfrac{1}{2^n} \\
F(0) = F(1) = 0
\end{cases}
$$

すなわち、$F \in E_0$ であり、

$$
F(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi^n(x).
$$

ゆえに、F は、高木の関数であることがわかった。

[参考文献]

[1] M. Yamaguti and M. Hata ; Weierstrass's Function and Chaos. to appear in Hokkaido Math. J.

[2] M. Hata and M. Yamaguti ; On Takagi's nowhere differentiable function. to appear