

ベクトル場の族の標準化 と 反応拡散系の Hopf 分岐

京大理 國府寛司
(Hiroschi Kokubu)

— Introduction —

はじめに我々がここで扱う問題の枠組みと方法について述べよう。我々はパラメータに依存する微分方程式系

$$(0) \quad \frac{du}{dt} = F(u, \lambda) \quad (u, \lambda) \in E \times \mathbb{R}^r$$

の分岐問題について考察する。ここで E は適当な Banach 空間、 F は E 上の非線型作用素の r -パラメータ族である。このような問題は多岐にわたる分野で頻繁にみられる。Navier-Stokes 方程式、反応拡散方程式、電気回路の方程式等はその例であり、これまでも多くの人々によって研究されている。

(0) の方程式の分岐問題は定常解に限れば比較的よく調べられている。その際中心的な役割を果たすのは Lyapunov-Schmidt の方法である。これは元の(一般には)無限次元の問題を非線型作用素 F の分岐点 (u_0, λ_0) における線型化作用素 $DF(u_0, \lambda_0)$ の kernel

の上に射影して有限次元の問題に帰着させて扱う方法である。例えばSchaeffer-Golubitsky[5]では上のようにして有限次元化された問題を写像の特異点理論を援用して調べることにより Brusselator と呼ばれる、化学反応系を記述するある反応拡散方程式系の二重特異点のまわりでの定常解の分岐を研究している。又、藤井-三村-西浦[2]では生態系を記述する反応拡散系であるMay-三村モデルに対して、このような特異点のまわりでの局所的な分岐構造を、系の対称性や特異擾動法を用いてつなぎあわせ、定常解の大域的な分岐図を得ている。

このLyapunov-Schmidtの方法は、系を有限次元化するという点では有効な方法であるが、有限次元化された問題ですら実際は相当に複雑である場合が多い。そのため上に挙げた研究においても特異点理論などを用いて問題の単純化を図っている。又、Lyapunov-Schmidtの方法は元来、定常解に対する方法であり非定常解に対してはあまり有効でない。

そこで、非定常問題の分岐を調べる際には(0)の形の発展方程式を発展方程式のまま有限次元化することが問題となる。それは中心多様体定理によって解決される。それによれば、系(0)の分岐点 (u_0, λ_0) の近くでの解の挙動は本質的には中心多様体と呼ばれるある有限次元部分多様体 W^c 上の挙動で決定されることがわかる。従って問題は特異点のまわりでの有限次

元のベクトル場の分岐を調べることに帰着される。

しかしながら、この問題は依然として極めて困難である。ベクトル場に対しては写像の特異点理論にあたる理論がまだできていないため、特異点の分類とその開折については最も簡単な場合しかわかっていない。この問題に対するアプローチとしては現在のところ、Poincaréが考案し、Takens[6]等によって整備されたベクトル場の標準形の理論が最も有効であるように思われる。これはベクトル場を特異点のまわりで形式的にTaylor展開し、低次の項から順に簡単な形に変換してゆくアルゴリズムを与えるものである。この方法を用いて、Guckenheimer[4]ではBrusselatorのHopf-zero型特異点のまわりでの振舞いを調べ、chaos的な軌道が存在する可能性を示唆している。最近、宇敷[7]によってこの標準形の理論が改良され、望み得る最も簡単な形にほぼ到達できるような統一的な計算手続きが与えられた。

さて、我々が取り扱うパラメータに依存するベクトル場の分岐問題の場合には、変換としては系のパラメータ依存性を本質的に変えない変換を採用しなければならない。それは写像の場合にGolubitsky-Schaeffer[3]によって研究された接触同値に対応するものである。我々はここではまずパラメータに依存するベクトル場の族のこのような変換による標準形の問題

題を宇敷 [7] の方法と同様の枠組みで論じる。そして、それを用いて上に述べたMay-三村モデルやBrusselatorを含む反応拡散方程式系の拡散係数に対する分岐問題を考察する。その結果、この系の2重に退化した特異点のまわりの分岐ダイアグラムを描くことができ、特に藤井 et al [2] の定常解の分岐ダイアグラムに加えて、ある場合にはHopf分岐がおこることがわかる。このHopf分岐は自明解からの3次分岐として現れるもので、そのための判定条件、及び安定性についての条件も求められる。その具体例として、Brusselatorに安定な時間的周期解が存在することがわかる。

§1 パラメータ付ベクトル場の族の標準形

$E(m)$ を \mathbb{R}^m 上の C^∞ -関数の0での芽の全体のなす環とし、 \mathcal{R}_m を $E(m)$ の(唯一の)極大イデアルとする。

定義1-1

C^∞ -写像芽 $f: (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対し、 f に沿うベクトル場(の芽)とは、 C^∞ -写像芽 $\sigma: (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow T\mathbb{R}^p$ であって、右下の図式を可換にするものとする。

f に沿うベクトル場の全体を $\mathcal{O}(f)$ と書く。特に $m=p$ で $f = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$ のとき $\mathcal{O}(m)$ と略記する。

$$\begin{array}{ccc}
 & & T\mathbb{R}^p \\
 & \nearrow \sigma & \downarrow \text{projection} \\
 (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0)
 \end{array}$$

$\mathcal{O}(t)$ は $E(\mathfrak{m})$ -加群だから、積 $\mathfrak{m}_n \mathcal{O}(t)$ はちゃんと定義される。

定義 1-2

$\pi_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ を自然な射影とすると $\mathfrak{m}_{n+r} \mathcal{O}(\pi_n)$ の元を \mathbb{R}^n 上の r -パラメータ付ベクトル場 (の 0 における芽) と呼ぶ。

\mathbb{R}^{n+r} 上のベクトル場 $\mathfrak{m}_{n+r} \mathcal{O}(n+r)$ に自然な Lie 代数の構造が入ることに注意すれば、容易に次を得る。

命題 1-3

- (i) $\mathfrak{m}_{n+r} \mathcal{O}(\pi_n) + \mathfrak{m}_r \mathcal{O}(r)$ は $\mathfrak{m}_{n+r} \mathcal{O}(n+r)$ の部分 Lie 代数である。
 (ii) $\mathfrak{m}_{n+r} \mathcal{O}(\pi_n)$ は $\mathfrak{m}_{n+r} \mathcal{O}(\pi_n) + \mathfrak{m}_r \mathcal{O}(r)$ の Lie イデアルである。

次に我々はパラメータ付ベクトル場の同値を定義する。

定義 1-4

\mathbb{R}^n 上の 2 つの r -パラメータ付ベクトル場 $v, w \in \mathfrak{m}_{n+r} \mathcal{O}(\pi_n)$ が同値であるとは、微分同相写像の組 (Φ, ϕ) で、図式

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \\ \downarrow \text{proj} & \circlearrowleft & \downarrow \text{proj} \\ (\mathbb{R}^r, 0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^r, 0) \end{array}$$

を可換にするものが存在して、

$$(2) \quad \begin{pmatrix} w(\alpha, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = D\Phi(\Phi^{-1}(\alpha, \lambda)) \cdot \begin{pmatrix} v(\Phi^{-1}(\alpha, \lambda)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つこととする。

(1) をみたすような重の全体を $\mathcal{Z}(n, r)$ と書くと、これは \mathbb{R}^{n+r} 上の 0 での微分同相写像芽の全体のなす群 $\text{Diff}(n+r)$ の部分群である。また $\mathcal{Z}(n, r)$ は (2) によって $W_{n+r} \mathcal{O}(\pi_n)$ に作用している。

ここで定義した同値の概念は、定常分岐問題に対する接触同値 (Golubitsky-Schaeffer [3]) にあたるものである。

さて、我々の問題は与えられたパラメータ付ベクトル場の上の同値の意味で変換してできるだけ簡単な形に帰着させることである。ところで、パラメータをもたない単独のベクトル場の通常の座標変換に対する標準形の問題については宇敷 [7] があり、パラメータ付の場合はその応用として得られるので最初に単独のベクトル場の場合の [7] の方法のアイデアを簡単に説明しよう。

\mathfrak{X} を \mathbb{R}^n 上のベクトル場の 0 における芽の全体のなす Lie 代数とする。 \mathfrak{X} は $\mathcal{E}(m)$ -加群ゆえに $W_n \mathfrak{X}$ が定義できる。自然数 k に対し、 $W_n^k \mathfrak{X}$ は \mathfrak{X} の部分 Lie 代数であり $W_n \mathfrak{X}$ の Lie イデアールである。そこで剰余 Lie 代数 H^k を $W_n^k \mathfrak{X} / W_n^{k+1} \mathfrak{X}$ で定める。 H^k は \mathbb{R}^n 上の 0 で消えるベクトル場の k -jet の全体と一致する。 H^k には座標変換として、 \mathbb{R}^n の 0 における微分同相写像芽の k -jet 全体のなす Lie 群 \mathcal{D}^k が作用する。その作用が、jet 空間の自然な射影と可換なことから、軌道空間の射影の列

$$H^1/\mathcal{D}^1 \leftarrow H^2/\mathcal{D}^2 \leftarrow \dots \leftarrow H^R/\mathcal{D}^R \leftarrow \dots$$

を得る. この軌道空間 H^R/\mathcal{D}^R の元 (又はその代表元) を R次の標準形 と呼ぶ. 特に H^1/\mathcal{D}^1 は通常の Jordan 標準形の全体と一致する.

与えられたベクトル場 X の R 次の標準形を求めるには, \mathcal{D}^R の作用による X の軌道 $\mathcal{D}^R(X)$ がわかればよい. Lie 群 \mathcal{D}^R に付随する Lie 代数が H^R であることに注意すれば, 軌道 $\mathcal{D}^R(X)$ は X の無限小変形 $[H^R, X]$ で定まる H^R 上の部分空間場を積分することによって得られる. 言いかえれば $\phi \in \mathcal{D}^R$ によって X を変換することは, ϕ の無限小生成元 $Y \in H^R$ をとり,

$$\dot{X} = [Y, X]$$

なる H^R 上の常微分方程式によって X を Y に沿って変形することである. これが単独のベクトル場の標準形の計算の原理である. 詳しい計算方法については宇敷 [7] を参照せよ.

これをもとにしてパラメータ付ベクトル場の標準形の問題に戻ろう. 命題 1-3 より次の剰余 Lie 代数たちが定義できる.

定義 1-5

$$P^R = \frac{W_{n+r} \mathcal{O}(\pi_n) + W_r \mathcal{O}(r)}{W_{n+r}^{R+1} \mathcal{O}(n+r) \cap (W_{n+r} \mathcal{O}(\pi_n) + W_r \mathcal{O}(r))}$$

$$K^{\mathbb{R}} = \frac{W_{n+r}^0(\pi_n)}{W_{n+r}^{\mathbb{R}+1}(\pi_{n+r}) \cap W_{n+r}^0(\pi_n)}$$

定義 1-6

パラメータ付ベクトル場の変換全体のなす群 $\mathcal{L}(n, r)$ の $0 \in \mathbb{R}^{n+r}$ における \mathbb{R} -jet 全体のなす Lie 群を $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ とする。

$\mathcal{L}(n, r)$ の $W_{n+r}^0(\pi_n)$ への作用から自然に $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ の $K^{\mathbb{R}}$ への作用が導かれる。

定義 1-7

軌道空間 $K^{\mathbb{R}}/\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ の元 (又はその代表元) を、パラメータ付ベクトル場の \mathbb{R} 次の標準形と呼ぶ。

前と同様にして、軌道空間の自然な射影の列

$$K^1/\mathcal{L}^1 \leftarrow K^2/\mathcal{L}^2 \leftarrow \dots \leftarrow K^{\mathbb{R}}/\mathcal{L}^{\mathbb{R}} \leftarrow \dots$$

が得られる。次の命題はほとんど自明であろう。

命題 1-8

$P^{\mathbb{R}}$ は Lie 群 $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ に付随する Lie 代数である。

これにより、パラメータ付ベクトル場の標準形は

$$X \mapsto [P^{\mathbb{R}}, X] \quad X \in K^{\mathbb{R}}$$

で定まる $K^{\mathbb{R}}$ 上の部分空間場を積分することに帰着され、守数 [7] と同様の方法で計算することができる。

最後に、ベクトル場が何らかの対称性 γ をもっている場合でも、 $K^{\mathbb{R}}$, $P^{\mathbb{R}}$ を γ に同変な空間にそれぞれ制限してやれば、

上と同様に扱えることを注意しておこう。

§2 中心多様体定理

ここでは中心多様体定理を以下に必要な部分に限って紹介する。詳しくは、たとえばCarr [1]を参照されたい。

X を $\|\cdot\|$ をノルムとするBanach空間とし、 C を X 上のある C^0 -半群 $T(t)$ の生成作用素、 N を X から X への滑かな写像とする。このとき、我々は X 上の発展方程式

$$(3) \quad \dot{w} = Cw + N(w)$$

を考察する。これに対し次のような仮定をおこう。

仮定 2-1

(i) N は C^2 級であり、 $N(0) = 0, N'(0) = 0$ をみたす

(ii) [スペクトル条件]

(1) $X = X \oplus Y$ なる直和分解が存在する。但し X は有限次元で、 Y は X の閉部分空間である。

(2) X は C で不変であり、 C の X への制限を A とすると A の固有値の実部はすべて0である。

(3) C の生成する C^0 -半群 $T(t)$ の Y への制限を $U(t)$ とすると、 Y はすべての t に対し $U(t)$ -不変であり、更に正定数 a, b が存在して任意の t に対し次が成り立つ。

$$\|U(t)\| \leq ae^{-bt}$$

P を Z の Y に沿う $X \wedge$ の射影として

$$B = (I - P) \cdot C$$

$$f(x, y) = P \cdot N(x \oplus y), \quad g(x, y) = (I - P) \cdot N(x \oplus y)$$

と定めると、(3)の発展方程式は次のように書き直せる。

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases}$$

定義 2-2

C^1 -級写像 $h: X \rightarrow Y$ に対し、 h のグラフ \mathcal{S} が (4) の中心多様体であるとは、次の2つの条件が成り立つこととする。

- (i) \mathcal{S} は原点で X に接する
- (ii) \mathcal{S} は (4) で不変、即ち \mathcal{S} 上に初期値をとる (4) の解は \mathcal{S} 上にとどまる。

定理 2-3

(4) は原点の近傍において局所的に C^2 -級の中心多様体

$$\mathcal{S} = \{ (x, h(x)) \in X \oplus Y \mid \|x\| < \exists \delta \}$$

をもつ。 N が C^r -級ならば、 h も C^r -級にとれる ($2 \leq r < +\infty$)。

(4) は次のような \mathcal{S} 上の常微分方程式を導く。

$$(5) \quad \dot{u} = Au + f(u, h(u))$$

定理 2-4

- (i) (5) の零解が安定ならば (4) の零解も安定である。
- (ii) (5) の零解が安定のとき、原点に十分近い初期値をもつ

(4)の解を $(x(t), y(t))$ とすると, (5)の解 $u(t)$ が存在して

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ y(t) &= h(u(t)) + O(e^{-\gamma t}) \end{aligned} \quad t \rightarrow +\infty \quad \gamma > 0$$

が成り立つ.

この定理の証明をみれば更に, 元の偏微分方程式(4)の原点のまわりの挙動は中心多様体上の常微分方程式(5)の挙動に帰着されることがわかる. (5)を具体的な例に対して実際に正確に求めることは困難だが, その低次の項は次の定理により比較的容易に計算することができる.

定理2-5

ϕ を X の原点の近傍から $Y \wedge$ の C^1 -級写像で $\phi(0) = 0, \phi'(0) = 0$ をみたすとする. 写像 M を ϕ に対して

$$(M\phi)(x) = \phi'(x)[Ax + f(x, \phi(x))] - [B\phi(x) + g(x, \phi(x))]$$

と定める. 今, ϕ が $x \rightarrow 0$ のとき

$$(M\phi)(x) = O(\|x\|^\delta) \quad \delta > 1$$

をみたすとする. ϕ は原点の近傍で n と δ 次まで一致する.

即ち

$$\|h(x) - \phi(x)\| = O(\|x\|^\delta)$$

が成り立つ.

以上の結果の証明はCarr[1]を参照せよ.

§3 反応拡散方程式のパラメータ付標準形とその分岐

我々は次のような反応拡散方程式の拡散係数 d_1, d_2 を分岐パラメータとする分岐について調べる.

$$(6) \quad \begin{cases} u_t = D \cdot \Delta u + f(u) & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad [0\text{-Neumann条件}] & x = 0, \pi \end{cases}$$

但し $u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (d_1, d_2 \geq 0)$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^∞ -級

更に藤井-三村-西浦[2]に従って次の仮定をおく.

仮定3-1

(i) $f(\bar{u}) = 0$ なる正の $\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$ が唯一つ存在する.

(ii) f の \bar{u} における Jacobi 行列を $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ とするとき,

(1) $b_{11} > 0$ (2) $\text{trace} B < 0, \det B > 0$

が成り立つ

このことから \bar{u} は空間的に一様な(6)の安定定常解であることがわかる. この解が拡散効果によってどのように分岐するかというのが藤井 et al [2] および本稿の問題である.

仮定3-1のもとで B の符号のとり方には次の2通りがある.

(1) $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$

May-三村モデルは前者の, Brusselator は後者の例である.

我々はまず、上の問題を §2 の結果が使える形に定式化しよう。実 Hilbert 空間 $H_N^2(0, \pi)$ を

$$H_N^2(0, \pi) = \overline{\{\cos nx\}_{n=0,1,2,\dots}}^{H^2} \quad x \in [0, \pi]$$

として、実 Hilbert 空間 \mathcal{H} を

$$\mathcal{H} = H_N^2(0, \pi) \times H_N^2(0, \pi)$$

と定める。同様にして複素 Hilbert 空間 $\tilde{H}_N^2(S^1)$, $\tilde{\mathcal{H}}$ をそれぞれ

$$\tilde{H}_N^2(S^1) = \overline{\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}}^{H^2} \quad x \in S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{H}_N^2(S^1) \times \tilde{H}_N^2(S^1)$$

と定める。すると作用素 $D\Delta + B$ は \mathcal{H} の稠密な部分で定義され、更に \mathcal{H} 上のある C^∞ -半群の生成作用素になっている。そこで $\mathcal{U} = u - \bar{u}$ と座標変換することにより (6) は

$$(7) \quad \mathcal{U}_t = (D\Delta + B)\mathcal{U} + N(\mathcal{U}) \quad \mathcal{U} \in C^0([0, \infty); \mathcal{H})$$

なる \mathcal{H} 上の発展方程式として表せる。但し N は

$$f(u) - f(\bar{u}) = B\mathcal{U} + N(\mathcal{U})$$

により定める。

定義から \mathcal{H} の元 \mathcal{U} は

$$\mathcal{U} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos nx \quad X_n \in \mathbb{R}^2$$

と書けるから

$$(D\Delta + B)\mathcal{U} = \sum_{n=0}^{\infty} (-n^2 D + B) X_n \cos nx$$

従って作用素 $D\Delta + B$ のスペクトル σ はすべて固有値で、それは

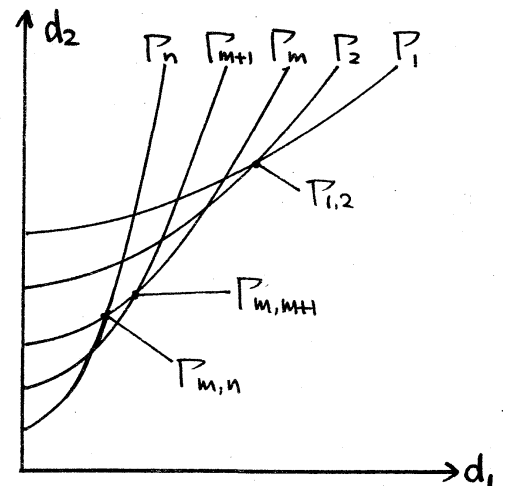
$$(8) \quad -n^2 D + B = \begin{pmatrix} b_{11} - n^2 d_1 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - n^2 d_2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_n$$

なる行列 M_n の固有値と一致する. 仮定 3-1 より $\text{tr} B < 0$ だから行列 M_n は純虚固有値を持たないから M_n が実部零の固有値をもつのは零固有値の場合に限り, (しかもそれは単純である. この零固有値が存在するための d_1, d_2 の条件は

$$(9) \quad \det M_n = (b_{11} - n^2 d_1)(b_{22} - n^2 d_2) - b_{12} b_{21} = 0$$

で与えられ, これは (d_1, d_2) -平面上に 1 つの双曲線 Γ_n を定める.

各 Γ_n の右では行列 M_n の固有値は共に実部が負であり, Γ_n を右から左に横切る時に 1 つの固有値の実部の符号が正に変わる. 特に Γ_n と Γ_m との交点を $\Gamma_{m,n}$ と書けば $\Gamma_{m,n}$ は $D\Delta + B$ が 2 重の零固有値をもつ (d_1, d_2) を与える.



我々は以下では $\Gamma_{m,m+1}$ についてのみ考之る. その時には $D\Delta + B$ の固有値は 2 つの零固有値以外はすべて負の実部をもつ. $\Gamma_{m,m+1}$ での (d_1, d_2) を (d_1^0, d_2^0) と書き, その時の D を D^0 とする.

ここで我々は系の対称性について考察しよう. 藤井 et al [2] によれば式 (7) には Neumann 条件からくる「隠された対称性」があり, 空間 \mathcal{R} を空間 $\tilde{\mathcal{R}}$ に拡張することで, それをみることができる. 即ち, $\mathcal{U}(\alpha) (\in \mathcal{R})$ は $[0, \pi]$ 上の Neumann 条件をみたす関数であるが, それを左右対称に $[-\pi, \pi]$ 上の関数 $\tilde{\mathcal{U}}(\alpha)$ に拡張すれば

$\tilde{U}(-x) = \tilde{U}(x)$ ゆえ \tilde{U} は $\tilde{\mathcal{H}}$ の元とみなせる. 従って (7) は自然に $\tilde{\mathcal{H}}$ 上の発展方程式

$$(10) \quad \tilde{U}_t = F(\tilde{U}) = (D\Delta + B)\tilde{U} + N(\tilde{U}) \quad \tilde{U} \in C^0([0, \infty); \tilde{\mathcal{H}})$$

に拡張できる. これは次にみるように, S^1 に対する直交群 $O(2)$ の作用から自然に導かれる $\tilde{\mathcal{H}}$ への作用に対して同変である.

$\widehat{H}^2(S^1)$ 上の線型写像 $\gamma(\theta)$ ($\theta \in S^1$), および σ を

$$\gamma(\theta) : u(x) \longmapsto u(x+\theta)$$

$$\sigma : u(x) \longmapsto u(-x)$$

とし, それにより $\tilde{\mathcal{H}}$ 上の線型写像 $\tilde{\gamma}(\theta)$, $\tilde{\sigma}$ を

$$\tilde{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} \gamma(\theta) & 0 \\ 0 & \gamma(\theta) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

と定めると (10) は $\tilde{\gamma}(\theta)$ ($\theta \in S^1$) および $\tilde{\sigma}$ で同変, 即ち

$$(11) \quad \begin{cases} \tilde{\gamma}(\theta) F(\tilde{U}) = F(\tilde{\gamma}(\theta)\tilde{U}) \\ \tilde{\sigma} F(\tilde{U}) = F(\tilde{\sigma}\tilde{U}) \end{cases}$$

が成り立つ.

さて, このように $\tilde{\mathcal{H}}$ 上に拡張された問題 (10) に対して中心多様体定理を適用しよう. (7) の場合と同様に (10) の線型化問題

のスペクトルは, 行列

$$\tilde{M}_l = \begin{pmatrix} b_{11} - l^2 d_1 & b_{12} & & 0 \\ b_{21} & b_{22} - l^2 d_2 & & 0 \\ & & 0 & \\ & & b_{11} - l^2 d_1 & b_{12} \\ & & b_{21} & b_{22} - l^2 d_2 \end{pmatrix} \quad (l \geq 0)$$

たちの固有値全体と一致する. 従って特に $\Gamma_{m,m+1}$ においては (10) は4重の零固有値および実部が負の固有値をもつ. この零固有値に対する固有空間を $\tilde{\mathcal{X}}$ とし, その補空間を $\tilde{\mathcal{Y}}$ とする. 又

$$d_1 = d_1^0 + \sigma_1, \quad d_2 = d_2^0 + \sigma_2 \quad \Gamma_{m,m+1} = (d_1^0, d_2^0)$$

により σ_1, σ_2 を定め, それにより

$$A(\sigma_1, \sigma_2) = D\Delta + B \Big|_{\tilde{\mathcal{X}}}, \quad B(\sigma_1, \sigma_2) = D\Delta + B \Big|_{\tilde{\mathcal{Y}}}$$

とすると, 明らかに $A(0,0) = 0$, 又 $B(0,0)$ の固有値の実部はすべて負である. P を $\tilde{\mathcal{X}}$ の $\tilde{\mathcal{X}}$ への射影とすると (10) は

$$\begin{cases} \dot{X} = & P \cdot N(X \oplus Y) + A(\sigma_1, \sigma_2) X \\ \dot{\sigma}_1 = & 0 \\ \dot{\sigma}_2 = & 0 \\ \dot{Y} = & B(0,0) Y + (I-P) \cdot N(X \oplus Y) + [B(\sigma_1, \sigma_2) - B(0,0)] Y \end{cases}$$

$$\text{但し } X \in \tilde{\mathcal{X}}, Y \in \tilde{\mathcal{Y}}$$

と書ける. これは § 2 の仮定 2-1 をみたし, 従って $\tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}^2$ に原点で接する滑らかな中心多様体がある.

$$h : \tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$$

のグラフとして存在する. この中心多様体は (10) で不変なことにより $\tilde{\mathcal{X}}$ と同じ対称性をもつことに注意しよう. § 2 で述べたように (10) の挙動を調べることは中心多様体上の

$$(12) \quad \dot{z} = A(\sigma_1, \sigma_2) z + P \cdot N(z \oplus h(z, \sigma_1, \sigma_2))$$

なる常微分方程式の挙動を調べることに帰着する.

ところで式(10)は式(7)の拡張として得られたものだから、(10)の解のうちで(7)の解に帰着できるもののみに興味がある。そのような解は、(10)の解 $\hat{U}(x)$ であって、左右対称かつ実、即ち

$$(13) \quad \hat{U}(-x) = \hat{U}(x) \quad \text{および} \quad \overline{\hat{U}(x)} = \hat{U}(x)$$

をみたすものである。従って(12)についても同様のことを考えなければならぬ。(12)を(13)の条件によって(7)の中心多様体上の方程式に帰着させると、実2次元の常微分方程式系

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \sigma_1, \sigma_2) \\ \dot{y} = g(x, y, \sigma_1, \sigma_2) \end{cases}$$

を得る。但し(12)の持つ対称性から(14)の f, g は次のような対称性をもつ。即ち

$\Gamma_{m, m+1}$ のまわりでは(14)の Taylor 展開の各項には、

$$m(r-r'-1) + (m+1)(s-s') = 0$$

又は

$$m(r-r') + (m+1)(s-s'-1) = 0$$

をみたす非負整数の組 (r, r', s, s') に対し $x^{r+r'} y^{s+s'}$ なる項のみが許される。

具体的に4次までの許される項を各場合に挙げてみよう。

< $m=1$ の場合, 即ち $\Gamma_{1,2}$ の場合 >

$$\begin{array}{l} f: \quad x \quad | \quad xy \quad | \quad x^3, xy^2 \quad | \quad x^3y, xy^3 \quad | \quad \dots \\ g: \quad y \quad | \quad x^2 \quad | \quad xy, y^3 \quad | \quad x^4, x^2y^2 \quad | \quad \dots \end{array}$$

< $m=2$ の場合, 即ち $P_{2,3}$ の場合 >

$$\begin{array}{l} f: x \quad | \quad - \quad | \quad x^3, xy^2 \quad | \quad xy^3 \quad | \quad \dots \\ g: y \quad | \quad - \quad | \quad x^2y, y^3 \quad | \quad x^2y^2 \quad | \quad \dots \end{array}$$

< $m \geq 3$ の場合 >

$$\begin{array}{l} f: x \quad | \quad - \quad | \quad x^3, xy^2 \quad | \quad - \quad | \quad \dots \\ g: y \quad | \quad - \quad | \quad x^2y, y^3 \quad | \quad - \quad | \quad \dots \end{array}$$

いずれの場合も, f には x の奇数中, g には x の偶数中しかあらわれない.

さて, この対称性に注意して系(4)の, §1で述べたパラメータ付標準形を n 次まで計算すると次のようになる.

< $m=1$ の場合, 即ち $P_{1,2}$ の場合 >

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{x} = x [\sigma_1 + s_1 y + (\alpha + a\sigma_1) y^2 + b x^2 y + c y^3 + \varphi(x^2, y, \sigma_1, \sigma_2)] \\ \dot{y} = \sigma_2 y + s_2 x^2 + (\beta + d\sigma_2) x^2 y + (r + e\sigma_1) y^3 + f x^2 y^2 + \psi(x^2, y, \sigma_1, \sigma_2) \end{cases}$$

< $m=2$ の場合, 即ち $P_{2,3}$ の場合 >

$$\begin{cases} \dot{x} = x [\sigma_1 + s_1 x^2 + (\alpha + a\sigma_1) y^2 + p y^3 + \varphi(x^2, y, \sigma_1, \sigma_2)] \\ \dot{y} = y [\sigma_2 + (\beta + b\sigma_2) x^2 + s_2 y^2 + q x^2 y + \psi(x^2, y, \sigma_1, \sigma_2)] \end{cases}$$

< $m \geq 3$ の場合 >

$$\begin{cases} \dot{x} = x [\sigma_1 + s_1 x^2 + (\alpha + a\sigma_1) y^2 + \varphi(x^2, y, \sigma_1, \sigma_2)] \\ \dot{y} = y [\sigma_2 + (\beta + b\sigma_2) x^2 + s_2 y^2 + \psi(x^2, y, \sigma_1, \sigma_2)] \end{cases}$$

但し いずれも $s_1, s_2 = \pm 1$, φ, ψ はより高次の項

我々はこの標準形を用いて $P_{m,m+1}$ のまわりでの σ_1, σ_2 について

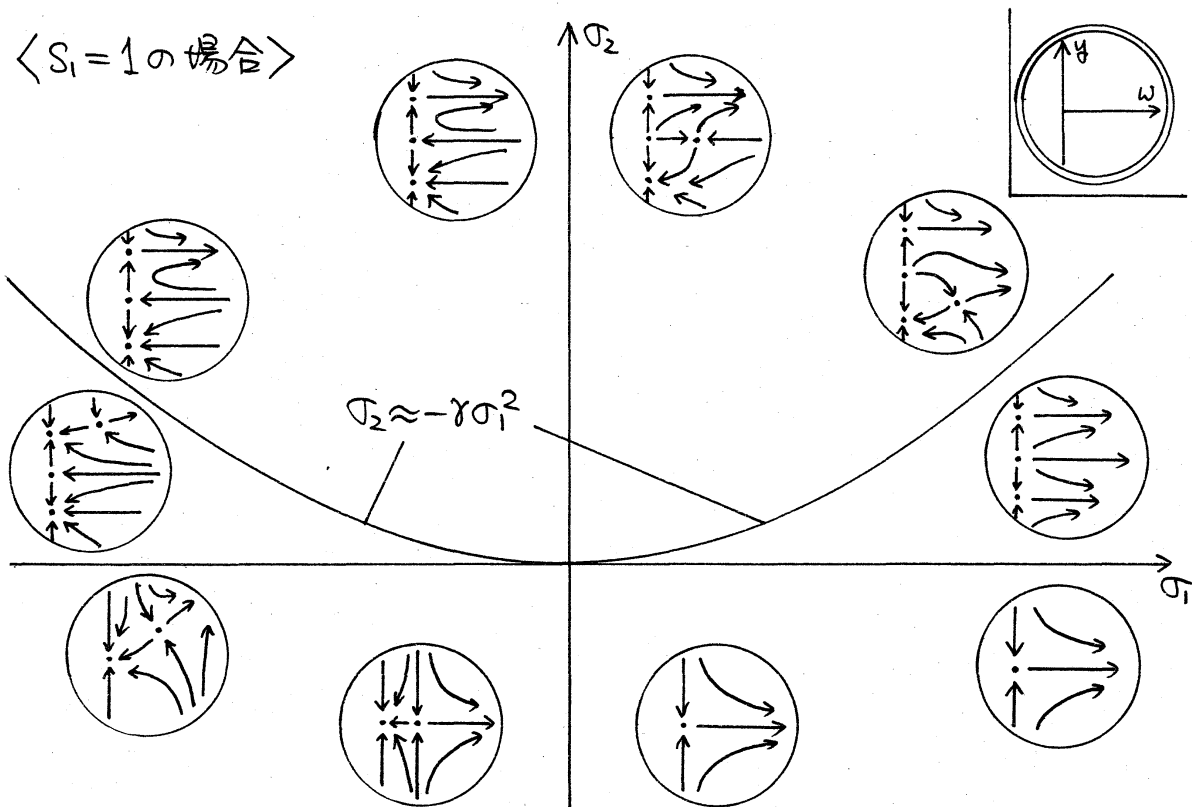
の分岐を調べる. 以下簡単のため $P_{1,2}$ の場合に限ろう. このとき、必要ならば変換 $y \rightarrow -y$ を施すことにより最初から $S_2=1$ としてよい. 又、 $\tau, \sigma_1, \sigma_2, y$ の符号を同時に変えることにより $\gamma < 0$ としてよい. 更に(15)は変換 $x \rightarrow -x$ で同変ゆ之相空間としては $x \geq 0$ で考之れば十分である. 従って $w = x^2$ として (w, y) -空間で考之ても相図の定性的様子は変わらない. かくて(15)から (w, y) についての方程式

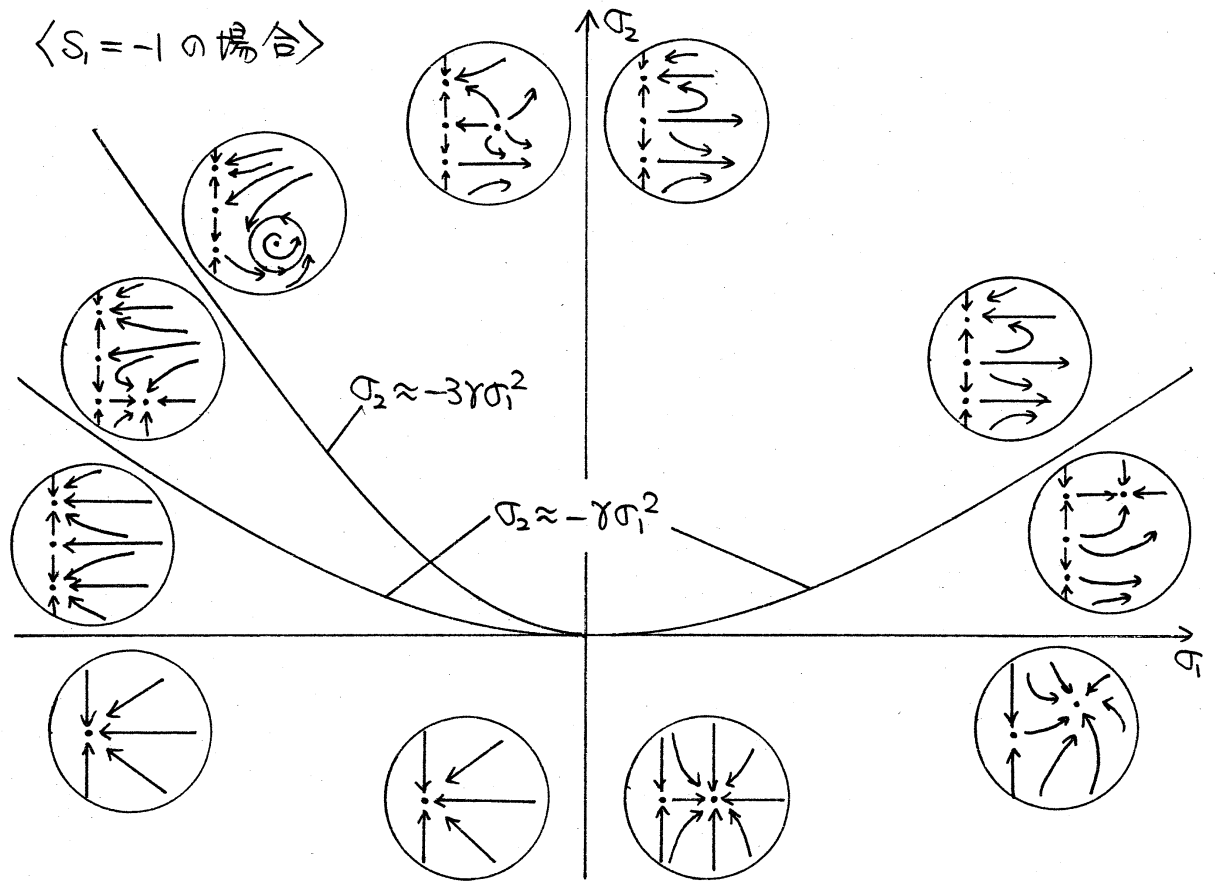
$$(16) \begin{cases} \dot{w} = 2w[\sigma_1 + s_1 y + (a + a\sigma_1)y^2 + bwy + cy^3 + \varphi(w, y, \sigma_1, \sigma_2)] \\ \dot{y} = \sigma_2 y + w + (\beta + d\sigma_2)wy + (\gamma + e\sigma_1)y^3 + fy^2 + \psi(w, y, \sigma_1, \sigma_2) \end{cases}$$

$$\text{但し } s_1 = \pm 1, \gamma < 0$$

を得る. この分岐は容易に解析できて次の図が得られる.

< $s_1 = 1$ の場合 >





$S_1 = \pm 1$ に応じて 2 つの場合があり、いずれの場合も $\sigma_1 = 0$ および $\sigma_2 = 0$ で、零解は pitchfork 分岐をおこす。又、 $\sigma_2 = 0$ における pitchfork 分岐で生じた定常解は $\sigma_2 \approx -\gamma\sigma_1^2$ において 2 次の pitchfork 分岐をおこす。更に $S_1 = -1$ の場合にはこれによって生じた定常解が $\sigma_2 \approx -3\gamma\sigma_1^2$ において Hopf 分岐をおこし、しかもその Hopf 分岐は $\gamma < 0$ の時は super-critical である。この結果、 $S_1 = -1$, $\gamma < 0$ の場合には (b) には、従って元の方程式系 (7) には安定な (空間的に非一様な) 時間的周期解が自明解からの 3 次分岐として生ずることがわかる。

以上のような解析は $P_{1,2}$ 以外の特異点についても行なえる

が煩雑になるのでここでは述べない。

最後に具体的な例についての計算結果を与えておこう。

例: May-三村モデル

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + \frac{1}{q}(35 + 16u - u^2)u - uv \\ v_t = d_2 v_{xx} - (1 + \frac{2}{5}v)v + uv \end{cases}$$

これは自明解 $(\bar{u}, \bar{v}) = (5, 10)$ をもち、特異点 $P_{1,2} = (d_1^0, d_2^0)$ は

$$d_1^0 = 0.631827 \dots \quad d_2^0 = 14.508192 \dots$$

となる。これについて(16)の係数を計算すると $S_1 = 1$ となり、

Hopf分岐はおこらない。

例: Brusselator

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + u^2 v - (B+1)u + A \\ v_t = d_2 v_{xx} + Bu - u^2 v \end{cases}$$

これは自明解 $(\bar{u}, \bar{v}) = (A, B/A)$ をもつ。たとえ $A = B = 3$

のときには

$$S_1 = -1, \quad \gamma = -15.539975 \dots$$

となり、この場合には安定周期解が存在する。

謝辞

この問題に関して御教示いただいた藤井宏先生、および、様々な助言をいただいた宇敷重広先生、岡宏枝氏、穴倉光広氏に感謝いたします。

文献表

- [1] Carr, J. : Applications of Centre Manifold Theory
Appl. Math. Soc. vol. 35 (1981) Springer-Verlag
- [2] Fujii, H., Mimura, M. and Nishiura, Y. : A Picture of
the Global Bifurcation Diagram in Ecological Interacting
and Diffusing Systems. Physica 5D (1981) 1-42
- [3] Golubitsky, M. and Schaeffer, D. : A Theory for Imperfect
Bifurcation via Singularity Theory. Commun. Pure Appl. Math.
32 (1979) 21-98
- [4] Guckenheimer, J. : On a Codimension Two Bifurcation
Lect. Note in Math vol 898 (1981) 99-142 Springer
- [5] Schaeffer, D. and Golubitsky, M. : Bifurcation Analysis
near a Double Eigenvalue of a Model Chemical Reaction.
Arch. Rat. Mech. Anal. 75 (1981) 315-347
- [6] Takens, F. : Singularities of Vector Fields. Publ. Math.
I.H.E.S. 43 (1974) 47-100
- [7] Ushiki, S. : Normal Form for Singularities of Vector Fields.
(submitted to Japan Journal of Applied Mathematics)