数理解析研究所講究録
第 506 巻 1983 年 221-236

ベクトル場の退化特異点の解析とストレンジ・アトラクター

京大教養　宇敷　重広 (Shigehiro Ushiki)
京大理　岡　宏枝 (Hiroe Oka)
京大理　國府　寛司 (Hiroshi Kokubu)

§ Introduction

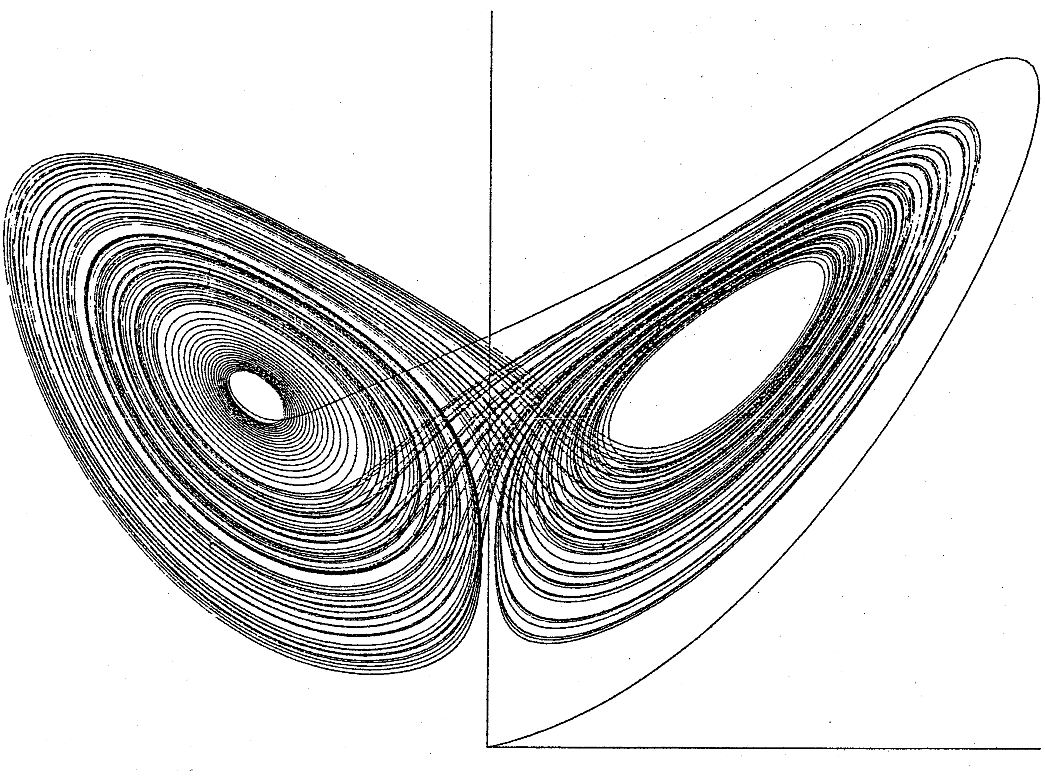

Fig. 1

Lorenz[1]のストレンジ・アトラクターの出現に関する研究以来、非線形力学系によって生じるカオティックな解の挙動について多くの研究がなされ、それによって、いろいろな様相のストレンジ・アトラクターの存在が明らかになってきた。我々はここで，ストレンジ・アトラクターの分岐を理論的、数値的に解析するひとつの方法を報告する。この方法は、ベクトル場の退化特異点の標準形とその開折に関する理論に基づいている。ベクトル場の標準形の理論とは、ベクトル場を特異点のまわりで展開し、低次の項から順に簡単な形にしていく方法を与えるものであり、古典的には、Poincaré に始まり Arnold[4]、Takens らによって発展させられた。最近、宇敷[2]は、彼らの結果を改良した。我々は その方法を用いて、ある$\mathbb{R}^3$のベクトル場の標準形と普遍開折を計算したが，その結果、以下にのべる具体的に興味ある場合について、パラメーターの数を、分岐を調べられる程度に減らすことができた。

我々が以下扱うのは、いわゆるローレンツ方程式系及び O.E. Rössler[5]によって与えられたレスラーの第1、第2方程式である。ローレンツ方程式の場合には、ベクトル場は、対称性$S:(x,y,z)\mapsto(-x,-y,z)$をもつ。一般に、対称性をもつベクトル場に対しても、その対称性について同変な標準形及び、普遍開折族を考えることができる。そのとき、$\mathbb{R}^3$の

y級で表わされるタイプの特異点の 上の対称性Sをもつ開析には、ローレンツ方程式とアナリティックに同値な系の族が含まれていることがわかる。同様に レスラーの第2方程式についてもローレンツ方程式と同じ対称性Sをもち，それと同値な系の族が，ローレンツ方程式の時と同じタイプの特異点，y級の開析の族に含まれることが示せる．つまり，ローレンツ方程式とレスラー第2方程式においてみられるストレンジ・アトラクターは，両方とも y級で表わされるタイプの特異点の開析に現れることを意味する。一方，$\mathbb{R}^3$における y級＋z級のタイプの特異点の開析は，レスラーの第1方程式系と同値な系の族を含んでいることがわかる。

それぞれの場合は、ある2次の初等的に積分できる系を limit system としてもつ。すなわち，あるパラメーターにおけるシステムは，それと同値なシステムの one パラメーター ファミリーである退化した積分できる簡単な系と結ぶことができる。Ya. G. Sinai と E. B. Vul [6] による ―― "ローレンツ方程式系において，あるパラメーター値で，カオティックな振舞を示す解が存在する" ―― という結果と合わせると，上でのべた limit system の任意に小さい摂動で ストレンジ・アトラクターが現れることがわかる．このことは，ある意味で，limit system を従って，退化特異点をストレンジ・アトラク

ターのorganizing centerとみなすことができるということを示唆しており興味深いであろう。

§2 ローレンツ方程式系とその標準形

ローレンツ方程式系は

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

で与えられる．ただし σ，r，b はパラメーターとする．Lorenz [1]は，系(1)のあるパラメーターの値 $(\sigma, r, b) = (10, 28, 8/3)$ において，ストレンジ・アトラクターが存在することを数値的に示した。また，すぐわかるように，系(1)において，原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ は，すべてのパラメーター値に対して特異点となっており 原点における線型部分は，

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

で与えられる．これは $(\sigma, r, b) = (-1, 1, 0)$ のとき 最も退化し，そのJordan標準形は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる．そのとき，牛駒[2]の標準形の理論によっ

て、次の定理が導かれる。

定理.

原点を特異点とする $\mathbb{R}^3$ の常微分方程式系で，$S:(x, y, z) \longmapsto (-x, -y, z)$ によって同変な系を考える。さらに、その系の原点での線型化方程式が

$$
(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}
$$

の形をしているとする。このとき、上の対称性 S を保つ座標変換が存在して、もとの常微分方程式系は それによって、次の形に変換される。

$$
(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma yz + \delta xz + O(3) \\ \dfrac{dz}{dt} = \tau x^2 + \eta z^2 + O(3) \end{cases}
$$

ただし $\tau = 0$ or 1, $\delta^2 + \eta^2 + \gamma^2 = 0$ or 1 である。(3) を、特異点 $y\frac{\partial}{\partial x}$ における2次の標準形という。

2次の項をきめると、3次の標準形は同様にきまり、次のようになる：

$$
(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma yz + \delta xz + h(x, y, z) + O(4) \\ \dfrac{dz}{dt} = \tau x^2 + \eta z^2 + k(x, y, z) + O(4) \end{cases}
$$

ここで，$h(x,y,z)$，$k(x,y,z)$は，3次の同次式で，τ，δ，η，γの値によって次のように与えられる．

(i) $\tau=1$，$\delta\neq0$ のとき

$$h(x,y,z)=\alpha x^2y+\beta yz^2+\varepsilon x^3,\quad k(x,y,z)=\xi z^3$$

(ii) $\tau=1$，$\eta^2+\gamma^2=1$のとき

$$h(x,y,z)=\alpha x^2y+kxz^2+\varepsilon x^2,\quad k(x,y,z)=\xi z^3$$

（その他の場合は一般的でないので省略するが，同様に求めることができる．）　□

最も一般的におこる場合(i)について普遍開折を求めると次のようになる．

命題

前定理の(i)について，対称性Sを保つベクトル場の3次の普遍開折は，

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=Ax+By+\gamma yz+\delta xz+\alpha x^2y+\beta yz^2+\varepsilon x^3 \\ \dfrac{dz}{dt}=Cz+x^2+\eta z^2+\xi z^3 \end{cases}$$

で与えられる．A，B，C，γ，α，β，ε，η，ξはパラメーターで，δは固定する．　□

さて，ローレンツ方程式(1)を(5)の形に変換することを考えよう．系(1)は，$(\sigma,r,b)=(-1,1,0)$で定理の条件をみたす．従って，パラメーターを，$(-1,1,0)$のまわりで考えると，

上の命題により，座標変換が存在し，系(5)の形にすることができる．座標変換は，局所的には，標準形の理論で求めることができるが，系(1)の場合は，大域的に解析的な変換をとることができる．

まず，線型変換 $X=x,\ Y=\sigma(y-x),\ Z=z$ により，系(1)は，

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}=Y \\ \frac{dY}{dt}=\sigma(r-1)X-(1+\sigma)Y-\sigma XZ \\ \frac{dZ}{dt}=\qquad -bZ+X^2+XY/\sigma \end{cases}$$

となる．$A=\sigma(r-1)$，$B=-(1+\sigma)$ $C=-b$ とおき，非線型な座標変換 $X'=X$，$Y'=Y$，$Z'=Z-X^2/2\sigma$ を施すと上式は，

$$\begin{cases} \frac{dX'}{dt}=Y' \\ \frac{dY'}{dt}=AX'+BY'-\sigma X'Z'-X'^3/2 \\ \frac{dZ'}{dt}=\qquad CZ'+EX'^2 \end{cases}$$

となる．ただし，$E=1+C/2\sigma$．さらに $x=\sqrt{2}X'$，$y=\sqrt{2}Y'$，$z=2E\sigma Z'$ とすると，上式は，

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt}=y \\ \frac{dy}{dt}=Ax+By-Sxz-x^3 \\ \frac{dz}{dt}=\qquad Cz+x^2 \end{cases},\quad S=2E\sigma$$

となる．これは，系(5)の形をしており，従って，ローレンツ

方程式系(1)は、y表の普遍開折族(5)の部分族に埋めこまれたことになる。以上の変換は $\sigma \neq 0$, $b \neq 2\sigma$ のとき、大域的に逆が存在し、analyticである。

§3. 時間スケールの変換

系(6)について考える。以下にみるように時間座標と空間座標の変換により、系(6)は、ある初等的に積分できる系

$$
(7) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^3 \\ \dfrac{dz}{dt} = x^2 \end{cases}
$$

と結ぶことができる。いいかえると、系(6)と相図が同じになる系たちの中で、系(6)は系(7)の任意に小さい摂動に、時間・空間の座標変換で変換することができる。

pを正とし、時間座標tを、$t \longrightarrow t/p$ とスケール変換すると、系(6)は

$$
(8) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = py \\ \dfrac{dy}{dt} = pAx + pBy - pSxz - px^3 \\ \dfrac{dz}{dt} = \qquad pCz + px^2 \end{cases}
$$

となる。さらに、系(8)を系(6)の形になるように空間座標のスケールを、$X = px$, $Y = p^2y$, $Z = pz$ と変えると、

$$
(9) \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = Y \\ \dfrac{dY}{dt} = p^2AX + pBY - pSXZ \\ \dfrac{dZ}{dt} = \qquad pCZ + X^2 \end{cases}
$$

を得る。明らかに、すべての正なる p に対して、系(6)と系(9)は、同じ相図をもっている。また、系(9)で $p=0$ とすると、系(7)になるので、p を 0 に近づけるとき、系(7)は系(9)の limit system と考えることができる。

以上のことから、ローレンツ方程式系(1)において現れるストレンジ・アトラクターと同じアトラクターを、系(9)は、任意の $p>0$ に対して持つことがわかる。系(9)は、p を小さくとることによって、初等的に積分できる系(7)の任意に小さい摂動とみなせるから、系(9)のいくらでも近くに、しかも、原点の近くに、ローレンツ方程式系でみられるカオティックなアトラクターが存在することがわかる。[次頁・Fig.2 参照。]

§4. レスラー方程式系の場合

同様のことを、O. E. Rössler[5]により研究された方程式系(レスラーの第1方程式)

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y-z \\ \dfrac{dy}{dt} = x+ay \\ \dfrac{dz}{dt} = bx-cz+xz \end{cases} \qquad a.\ b.\ c \text{ はパラメーター}$$

及び(レスラーの第2方程式)

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x-z-xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -ay+x^2 \\ \dfrac{dz}{dt} = bcx-bz \end{cases} \qquad a.\ b.\ c \text{ はパラメーター}$$

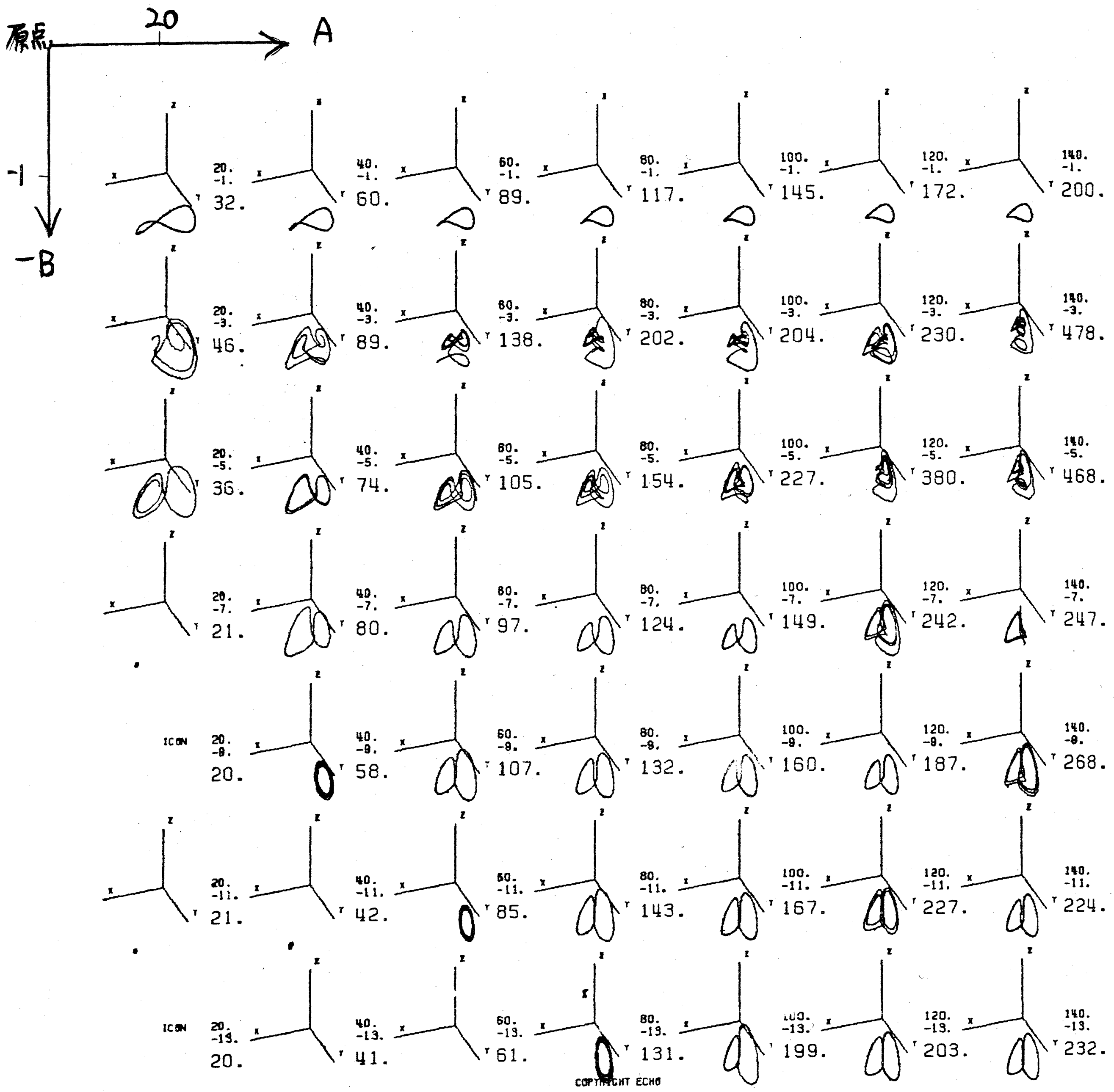

Fig. 2

系(6)において. $S=1$, $C=-1$. とし. A. Bを動かして. 解をシミュレーションした. 図に書きこまれた数値は. 上から A, B, 軌道の原点からの距離の絶対値である. $(r, p, b)=(28, 10, 8/3)$ は $A=270$. $B=-11$. $C\sim -2.7$ にあたる.

について考察しよう。あるパラメーター値において、系(10)はレスラー・アトラクターと呼ばれるストレンジ・アトラクター，系(11)は、ローレンツ・アトラクターとよく似た形のアトラクター(Lorenzian chaos [5])が現れることが知られている。(Fig. 3. 4. Fig. 5 参照)

§2. §3 と類似の方法で、系(10), (11)もある退化特異点の普遍開折に埋めこまれることがわかる。

まず、系(11)についてこのことをみてみよう。$(x.y.z) \longrightarrow (x.z.y)$ とかきかえると、系(11)はローレンツ方程式系(1)と同じ対称性 S をもつ。また、原点は特異点になっており、そこでの線型部分は

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ bc & -b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で表わされる。この行列は $(a.b.c) = (0.1.\ )$ のとき、3重に退化した固有値をもち、その Jordan 標準形は、

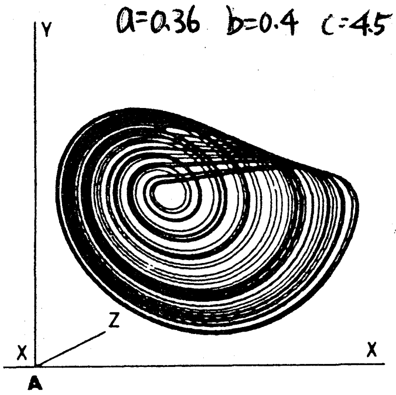

Fig. 3 系(10)

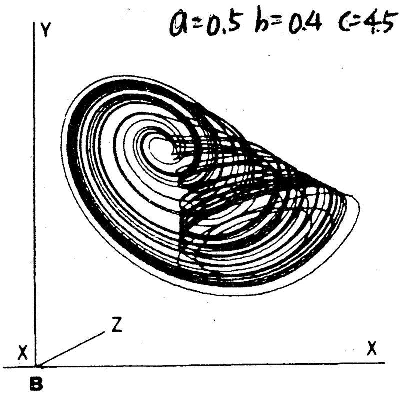

Fig. 4 系(10)

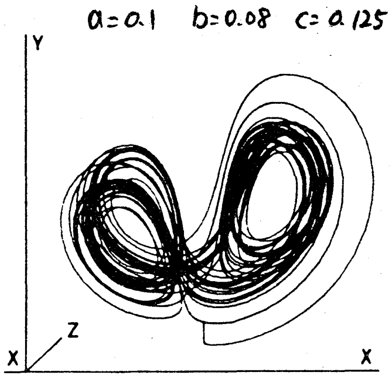

Fig. 5 系(11)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となる、従って 系(11)は $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ の近くで、y 軸 の普遍開折族の形(5)に(局所的に)変換できるが、この場合も、ローレンツ方程式の時と同様に、大域的に、

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = Ax + By + Dxz - yz - x^3 \\ \dfrac{dz}{dt} = \qquad Cz + x^2 \end{cases}$$

と変換される。ここで、$A = b(1-c)$, $B = 1-b$, $C = -a$, $D = B - C - 1$ である。これは、A, B, C, D をパラメーターとして、系(5)の部分族をなしている。§3と同じように、時間スケールの変換を施すことによって、系(12)は、各 $p > 0$ に対して、

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = p^2Ax + pBy + pDxz - yz - x^3 \\ \dfrac{dz}{dt} = \qquad pCz + x^2 \end{cases}$$

と同じ相図をもち、$p \to 0$ とした limit system は

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -yz - x^3 \\ \dfrac{dz}{dt} = x^2 \end{cases}$$

の形をしていることがわかる。以上のことから、ローレンツ

方程式系(1)とレスラーの第2方程式(11)は、ともに、同じタイプの特異点 $y\frac{\partial}{\partial x}$ の普遍開折族(5)に部分族として埋めこまれていることがわかった。

さて、レスラーの第1方程式(10)について、同様の解析を行なおう。この方程式は、上の2つの方程式とは異なるタイプの特異点 $y\frac{\partial}{\partial x}+z\frac{\partial}{\partial y}$ の普遍開折族の中に埋めこまれる。実際、この場合も、原点は、すべてのパラメーターについて、特異点になっていて、そこでの線型部分は、

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -c \end{pmatrix}$$

である。$(a, b, c)=(0, -1, 0)$ のとき、この行列は、3重に退化した零固有値をもち、その時のJordan標準形は、

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。標準形の理論によると、線型部分が、左記のタイプである特異点の2次の標準形は、

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = \alpha x^2+\beta xy+\gamma xz+\delta y^2+O(3) \end{cases}$$

で与えられる。方程式系(10)は、$X=y-ax$, $Y=x$, $Z=-x+ay-z$ なる変換を施すと、

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Y \\ \dfrac{dY}{dt} = Z \\ \dfrac{dZ}{dt} = AX + BY + CZ - aX^2 + (a^2+1)XY - aXZ - aY^2 + YZ \end{cases}$$

となる。ただし、$A = ab - c$，$B = ac - b - 1$，$C = a - c$ である。3番目の方程式の YZ の項は、2次の座標変換で消すことができるが、そうすると、高次の項がつけ加わるため、かえって複雑な形となるため、YZ のままで残しておくことにする。系(16)は、

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = xy + yz \end{cases}$$

の2次の普遍開折族

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = Ax + By + Cz + DX^2 + (1+E)XY + FXZ + GY^2 + YZ \end{cases}$$

の部分族に埋めこまれていることがわかる。A, B, C, D, E, F, G はパラメーターである。さて、系(16)を、時間スケール $t \longmapsto t/p$ $(p>0)$ で変換し、さらに、座標変換で、系(18)の形になおすと、

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = p^3Ax + p^2By + pCz + p^3DX^2 + p^2(1+E)XY + pFXZ + pGY^2 + YZ \end{cases}$$

となり、その limit system は、

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = yz \end{cases}$$

となる。

REFERENCES

[1] E.N. Lorenz : Deterministic nonperiodic flows. J. Atmos. Sci., 20 (1963), 130-141.

[2] S. Ushiki : Normal forms for singularities of vector fields. (submitted to Japan Journal of Applied Mathematics)

[3] H. Poincaré : Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Oeuvres, t. I, Gauthier-Villars, Paris (1929)

[4] V. I. Arnold : Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. Springer-Verlag (1982)

[5] O.E. Rössler : Continuous chaos — four prototype equations. Ann. New York Acad. Sci., 316 (1979), 376-392

[6] Ya. G. Sinai and E.B. Vul : Hyperbolicity conditions for the Lorenz model. Physica 2D (1981) 3-7