数理解析研究所講究録
第506巻 1983年 254-279

非線形方程式の singular points について

徳島大 工　　山本 範夫 (Norio Yamamoto)

§1. 序

非線形方程式の解で，そのJacobian行列が singular になるものを，我々は，「singular point」と呼ぶことにする。我々は，この singular point を正確に求める方法を提案する。我々の方法は，パラメータを導入して，より次元の高い空間で，もとの方程式に，Jacobian行列を含んだ新しい方程式を加えた大きな方程式の解について考えるというものである。[18] そうすれば，この大きな方程式は，もとの方程式の解を含みかつ大きな方程式のJacobian行列を non-singular にする解をもつので，例えば，Newton法を使えば，この解の高精度な近似値を求めることができる。したがって，もとの方程式の解にも，高精度な近似値が得られる。我々は，最初に，パラメータを含まない方程式について考え，次に，パラメータを含む方程式について考える。

§2. 非線形方程式 $F(x)=0$ の場合

我々は，n次元の非線形方程式

(2.1) $$F(x)=0$$

の解 $x=\hat{x}$ で，Jacobian行列 $F_x(x)$ が，$\hat{x}$ でsingularになるものについて考える。ここで，$F(x)$ は，解 $\hat{x}$ を含むある領域Dで定義されており，$F(x)$ はDで x に関して連続微分可能とする。まずはじめに，我々は

(2.2) $$\operatorname{rank} F_x(\hat{x})=n-1$$

の場合について考えるが，話を簡単にするために，

(2.3) $$n-1=\operatorname{rank} F_x(\hat{x})=\operatorname{rank} F_0(\hat{x})$$

と仮定する。ここで，$F_0(\hat{x})$ は，$F_x(\hat{x})$ の第1列をとり除いた $n\times(n-1)$ 行列である。そうすれば，ある自然数 k ($1\leqq k\leqq n$) が存在して

(2.4) $$n=\operatorname{rank}(F_x(\hat{x}),e_k)=\operatorname{rank}(F_0(\hat{x}),e_k)$$

とできる。ただし，$e_k=(0,\cdots,0,\underset{\hat{k}}{1},0,\cdots,0)^T$ なるn次元ベクトルであり，$(\cdots)^T$ は，ベクトル$(\cdots)$の転置をあらわす。仮定(2.3)より，方程式

(2.5) $$\begin{cases} F_x(\hat{x})h=0, \\ h_1-1=0 \end{cases} \qquad \left(\text{ただし，} h=(h_1,\cdots,h_n)^T\right)$$

は，ただ1つの解 $\hat{h}$ をもつから，我々は，方程式(2.1)にパラメータBを導入し，次の大きな方程式について考える：

$$(2.6)\qquad G(\mathfrak{x})=\begin{pmatrix} F(x)-Be_k \\ F_x(x)h \\ h_1-1 \end{pmatrix}=0\ .\quad \left(\begin{array}{r} \text{ここで, } \mathfrak{x}=(x,h,B)^T, \\ x=(x_1,\cdots,x_n)^T, \\ h=(h_1,\cdots,h_n)^T \end{array}\right)$$

そうすれば，方程式(2.6)は，解 $\hat{\mathfrak{x}}=(\hat{x},\hat{h},0)^T$ をもち，この解 $\hat{\mathfrak{x}}$ に対して，我々は，次の定理を得る。

<u>定理 1.</u>

$F(x)$ は D で x に関して2回連続微分可能とする。そうすれば，

$$(2.7)\qquad \det G'(\hat{\mathfrak{x}})\neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}(F_x(\hat{\mathfrak{x}}),\hat{e})=n.$$

ここで，$G'(\mathfrak{x})$ は，$G(\mathfrak{x})$ の $\mathfrak{x}$ に関するJacobian行列であり，$\hat{e}=\{F_{xx}(\hat{x})\hat{h}\}\hat{h}$. ただし，$F_{xx}(x)$ は $F(x)$ の x に関する2階の導関数である。

<u>証明.</u> $F(x)$ は x に関して2回連続微分可能より，$G(\mathfrak{x})$ は $\mathfrak{x}$ に関して連続微分可能となり，

$$(2.8)\qquad G'(\mathfrak{x})=\begin{pmatrix} F_x(x) & O & -e_k \\ F_{xx}(x)h & F_x(x) & 0 \\ 00\cdots0 & 10\cdots0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって，(2.6)の解 $\hat{\mathfrak{x}}$ に対して

$$(2.9)\qquad \det G'(\hat{\mathfrak{x}})=\begin{vmatrix} F_x(\hat{x}) & O & -e_k \\ F_{xx}(\hat{x})\hat{h} & F_x(\hat{x}) & 0 \\ 00\cdots0 & 10\cdots0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & F_0(\hat{x}) & 0 & O & -e_k \\ \hat{l} & F_1(\hat{x},\hat{h}) & 0 & F_0(\hat{x}) & 0 \\ 0 & 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 \end{vmatrix}$$

であるから，条件(2.4)より，結論(2.7)がいえる。ただし，$F_1(\hat{x},\hat{h})$ は $n\times n$ 行列 $F_{xx}(\hat{x})\hat{h}$ の第1列をとり除いた $n\times(n-1)$ 行列である。

注意 1.

定理1より，$F(x)$ が D で x に関して3回連続微分可能で，$\mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}),\hat{l})=n$ のときは，方程式(2.6)のかわりに，次の方程式

$$(2.10)\qquad \tilde{G}(x)=\begin{pmatrix} F(x)-B\{F_{xx}(x)h\}h \\ F_x(x)h \\ h_1-1 \end{pmatrix}=0$$

について考えてもよい。この場合は，$F(x)$の2階の導関数の計算が必要になるが，ベクトル e_k をさがす必要がなくなる。

次に，$\mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}),\hat{l})=n-1$ の場合には，

$$(2.11)\qquad \begin{cases} F_x(\hat{x})p+\hat{l}=0, \\ p_1=0 \end{cases} \qquad \left(p=(p_1,\cdots,p_n)^T\right)$$

が，ただ1つの解 $\hat{p}$ をもつから，我々は，パラメータをもう1つ導入して，次の方程式

$$(2.12)\qquad G_1(x_1)=\begin{pmatrix} F(x)-B_1e_k \\ F_x(x)h_1-B_2e_k \\ F_x(x)h_2+\{F_{xx}(x)h_1\}h_1 \\ h_1^1-1 \\ h_2^1 \end{pmatrix}=0\ . \quad \begin{pmatrix} \text{ただし,} \\ x_1=(x,h_1,h_2,B_1,B_2)^T, \\ x=(x_1,\cdots,x_n)^T, \\ h_i=(h_i^1,h_i^2,\cdots,h_i^n)^T, \\ (i=1,2). \end{pmatrix}$$

そうすれば，方程式(2.12)は，解$\hat{x}_1=(\hat{x},\hat{h}_1,\hat{h}_2,0,0)^T$をもつ。ここで，$\hat{h}_1$は(2.5)の解であり，$\hat{h}_2$は(2.11)の解である。この解$\hat{x}_1$に対して，我々は，次の定理を得る。

定理 2.

$F(x)$はDでxに関して3回連続微分可能とする。そうすれば，

$$(2.13)\qquad \det G_1'(\hat{x}_1)\neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}),\hat{l}_2)=n\ .$$

ここで，$G_1'(x_1)$は，$G_1(x_1)$のx_1に関するJacobian行列であり，$\hat{l}_2=\hat{X}^{(2)}\hat{h}_1+2\hat{X}^{(1)}\hat{h}_2$．ただし，$X^{(0)}=F_x(x)$，$X^{(1)}=X_x^{(0)}h_1=F_{xx}(x)h_1$，$X^{(2)}=X_x^{(0)}h_2+X_x^{(1)}h_1=F_{xx}(x)h_2+\{F_{xxx}(x)h_1\}h_1$であり，$\hat{X}^{(1)}$，$\hat{X}^{(2)}$は，それぞれ，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$の$x=\hat{x}$，$h_1=\hat{h}_1$，$h_2=\hat{h}_2$における値をあらわす。

注意 2.

$F(x)$がDでxに関して4回連続微分可能でありかつ$\mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}),\hat{l}_2)=n$ならば，方程式(2.12)のかわりに次の方程式

$$(2.14)\qquad \tilde{G}_1(x_1)=\begin{pmatrix} F(x)-B_1\ell_2 \\ F_x(x)h_1-B_2\ell_2 \\ F_x(x)h_2+\{F_{xx}(x)h_1\}h_1 \\ h_1^1-1 \\ h_2^1 \end{pmatrix}=0$$

について考えてもよい。ただし，$\ell_2=X^{(2)}h_1+2X^{(1)}h_2=[F_{xx}(x)h_2+\{F_{xxx}(x)h_1\}h_1]h_1+2\{F_{xx}(x)h_1\}h_2$.

次に，$\mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}),\hat{\ell}_2)=n-1$ の場合を含むもっと一般的な場合について考察する。$F(x)$ は D で x に関して $(d+2)$ 回連続微分可能とする $(d\geqq 2)$．いま，

$$(2.15)\qquad X^{(i+1)}=\sum_{k=0}^{i} {}_iC_k X_x^{(k)} h_{i+1-k}\qquad (1\leqq i\leqq d)$$

$$(2.16)\qquad \ell_i=\sum_{k=1}^{i} {}_iC_k X^{(k)} h_{i+1-k}\qquad (1\leqq i\leqq d+1)$$

とおく。ここで，$X^{(0)}=F_x(x)$, $X^{(1)}=X_x^{(0)}h_1=F_{xx}(x)h_1$ であり，$X_x^{(j)}$ $(j=0,1,2,\cdots,d)$ は，それぞれ，$X^{(j)}$ の x に関する導関数である。このとき，以下の条件をみたすベクトル $\hat{y}_d=(\hat{x},\hat{h}_1,\cdots,\hat{h}_d)^T$ が存在すると仮定する：

(2.17) $\hat{x}$ は，(2.3), (2.4) をみたす (2.1) の解である。

$$(2.18)\qquad \begin{cases} \hat{X}^{(0)}\hat{h}_1=0, & \hat{h}_1^1-1=0, \\ \hat{X}^{(0)}\hat{h}_{j+1}+\hat{\ell}_j=0, & \hat{h}_{j+1}^1=0 \qquad (j=1,2,\cdots,d-1), \end{cases}$$

$$(2.19)\qquad \mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}),\hat{\ell}_d)=n-1.$$

ただし，$h_i=(h_i^1,h_i^2,\cdots,h_i^n)^T$ $(i=1,2,\cdots,d+1)$ であり，$\hat{X}^{(0)}=F_x(\hat{x})$, $\hat{\ell}_j$ $(j=1,2,\cdots,d)$ は，ℓ_j の $x=\hat{x}$, $h_1=\hat{h}_1,\cdots,h_d=\hat{h}_d$ に

おける値をあらわす。このとき，$(d+1)$ 個のパラメータ $B_1, B_2, \cdots, B_{d+1}$ を導入して，我々は，次の方程式

$$
(2.20)\qquad G_d(x_d)=\begin{pmatrix} F(x)-B_1 e_k \\ X^{(0)}h_1-B_2 e_k \\ X^{(0)}h_2+X^{(1)}h_1-B_3 e_k \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{d-1} {}_{d-1}C_i X^{(i)} h_{d-i}-B_{d+1} e_k \\ \sum_{i=0}^{d} {}_{d}C_i X^{(i)} h_{d+1-i} \\ \psi_d(x_d) \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} F(x)-B_1 e_k \\ X^{(0)}h_1-B_2 e_k \\ X^{(0)}h_2+l_1-B_3 e_k \\ \vdots \\ X^{(0)}h_d+l_{d-1}-B_{d+1} e_k \\ X^{(0)}h_{d+1}+l_d \\ \psi_d(x_d) \end{pmatrix}=0
$$

について考える。ここで，$x_d=(x, h_1, h_2, \cdots, h_{d+1}, B_1, B_2, \cdots, B_{d+1})^T$, $h_i=(h_i^1, h_i^2, \cdots, h_i^n)^T$ $(i=1,2,\cdots,d+1)$, $\psi_d(x_d)=(h_1^1-1, h_2^1, \cdots, h_{d+1}^1)^T$.
そうすれば，条件 (2.17)，(2.18)，(2.19) より，方程式 (2.20) は，解 $\hat{x}_d=(\hat{y}_d, \hat{h}_{d+1}, \mathbf{0})^T$ をもつ．ただし，$\hat{h}_{d+1}$ は，方程式

$$
(2.21)\qquad \begin{cases} \hat{X}^{(0)}h_{d+1}+\hat{l}_d=0, \\ h_{d+1}^1=0 \end{cases}
$$

の解であり，$\mathbf{0}$ は，$(d+1)$ 次元の零ベクトルである。この解

$\hat{x}_d$ に対して，我々は，次の定理を得る。

定理 3.

(2.22) $\quad \det G_d'(\hat{x}_d) \neq 0 \rightleftharpoons \mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}), \hat{l}_{d+1}) = n.$

ここで，$G_d'(x_d)$ は，$G_d(x_d)$ の x_d に関する Jacobian 行列であり，$\hat{l}_{d+1}$ は，l_{d+1} の $x=\hat{x}$, $h_1=\hat{h}_1$, ---, $h_{d+1}=\hat{h}_{d+1}$ における値をあらわす。

注意 3.

$F(x)$ が D で x に関して $(d+3)$ 回連続微分可能でかつ $\mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}), \hat{l}_{d+1}) = n$ の場合には，方程式 (2.20) のかわりに

$$(2.23) \qquad \tilde{G}_d(x_d) = \begin{pmatrix} F(x) - B_1 l_{d+1} \\ X^{(0)} h_1 - B_2 l_{d+1} \\ X^{(0)} h_2 + l_1 - B_3 l_{d+1} \\ \vdots \\ X^{(0)} h_d + l_{d-1} - B_{d+1} l_{d+1} \\ X^{(0)} h_{d+1} + l_d \\ \psi_d(x_d) \end{pmatrix} = 0$$

について考えてもよい。

注意 4.

$\mathrm{rank}\, F_x(\hat{x}) = n-1$ のとき，H. Weber and W. Werner [10] は，(2.6) のかわりに，次の大きな方程式について考えた：

$$(2.24)\qquad W(\mathfrak{x})=\begin{pmatrix}F(x)+Bh\\ F_x(x)h\\ h^Th-1\end{pmatrix}=0.\quad \left(\begin{array}{l}\text{ここで, } \mathfrak{x}=(x,h,B)^T,\\ x=(x_1,\cdots,x_n)^T,\\ h=(h_1,\cdots,h_m)^T \text{ であり,}\\ B \text{ はパラメータ.}\end{array}\right)$$

方程式(2.24)は，明らかに，解 $\hat{\mathfrak{x}}=(\hat{x},\hat{h},0)^T$ をもち，この解 $\hat{\mathfrak{x}}$ に対して，$\mathrm{Ker}(F_x(\hat{x}))\cap \mathrm{Im}(F_x(\hat{x}))=\{0\}$ のとき，彼らは定理1と同様な結果（$\det W'(\hat{\mathfrak{x}})\neq 0$ となるための十分条件）を得ているが，この条件が成り立たないときは，$\det W'(\hat{\mathfrak{x}})=0$ となるので，彼らは，(2.24)より複雑な方程式

$$(2.25)\qquad \tilde{W}(\mathfrak{x})=\begin{pmatrix}F_x(x)^TF(x)+Bh\\ F_x(x)h\\ h^Th-1\end{pmatrix}=0$$

について考えている。ところが，我々の場合は，$\mathrm{Ker}(F_x(\hat{x}))\cap \mathrm{Im}(F_x(\hat{x}))=\{0\}$ が成り立つかどうかにかかわらず，方程式(2.6)について考えればよい。また，彼らは，定理2，3に相当する場合については，何も述べていない。

次に，$\mathrm{rank}\,F_x(\hat{x})=n-d$（$1<d\leqslant n$）の場合について考える。我々は，話を簡単にするために，特に，$d=2$ の場合について考え，さらに，

$$(2.26)\qquad n-2=\mathrm{rank}\,F_x(\hat{x})=\mathrm{rank}\,F_{(1,2)}(\hat{x})$$

と仮定する。ここで，$F_{(1,2)}(\hat{x})$ は，$F_x(\hat{x})$ の第1列と第2列をとり除いた $n\times(n-2)$ 行列とする。そうすれば，ある自然

数 j_1, j_2 $(1 \leqq j_1, j_2 \leqq n)$ が存在して

$$(2.27) \qquad \operatorname{rank}\left(F_{(1,2)}(\hat{x}),\, e_{j_1},\, e_{j_2}\right) = n$$

とできる。ただし，$e_{j_i} = (0, \cdots, 0, \underset{\hat{j_i}}{1}, 0, \cdots, 0)^T$ $(i=1,2)$.
また，仮定(2.26)より，方程式

$$(2.28) \qquad \begin{cases} F_x(\hat{x}) h^{(i)} = 0, \\ h_j^{(i)} = \delta_{ij} \ (\text{クロネッカーの}\delta) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2\,;\, h^{(i)} = (h_1^{(i)}, \cdots, h_n^{(i)})^T)$$

は解をもち，それらを，それぞれ $\hat{h}^{(i)}$ $(i=1,2)$ とする。このとき，我々は，次の3つのベクトルを定義する：

$$(2.29) \qquad \hat{p}_{11} = \{F_{xx}(\hat{x})\hat{h}^{(1)}\}\hat{h}^{(1)}, \quad \hat{p}_{12} = \{F_{xx}(\hat{x})\hat{h}^{(1)}\}\hat{h}^{(2)}, \quad \hat{p}_{22} = \{F_{xx}(\hat{x})\hat{h}^{(2)}\}\hat{h}^{(2)}.$$

そして，我々は，

$$(2.30) \qquad \operatorname{rank}\left(F_{(1,2)}(\hat{x}),\, \hat{p}_{11},\, \hat{p}_{12},\, \hat{p}_{22}\right)$$

が，(1) n になる，(2) $n-1$ になる，(3) n になるという3つの場合に分けて考える。

(1)の場合，話を簡単にするために，

$$(2.31) \qquad \operatorname{rank}\left(F_{(1,2)}(\hat{x}),\, \hat{p}_{11},\, \hat{p}_{12}\right) = n$$

になったとすれば，パラメータを2個導入して

$$(2.32) \qquad G(\mathfrak{x}) = \begin{pmatrix} F(x) - B_1 e_{j_1} - B_2 e_{j_2} \\ F_x(x) h \\ h_1 - 1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ここで，} \\ \mathfrak{x} = (x, h, B_1, B_2)^T, \\ x = (x_1, \cdots, x_n)^T, \\ h = (h_1, \cdots, h_n)^T \end{array}\right)$$

について考えればよい。仮定(2.26)より，方程式(2.32)は，解 $\hat{\mathfrak{x}} = (\hat{x}, \hat{h}, 0, 0)^T$ をもち，この解 $\hat{\mathfrak{x}}$ に対して，

(2.33) $\quad \det G'(\hat{x}) \neq 0 \rightleftharpoons \mathrm{rank}\,(F_{(1,2)}(\hat{x}), \hat{p}_{11}, \hat{p}_{12}) = n$

がいえるから，今の場合，$\det G'(\hat{x}) \neq 0$。ただし，$G'(x)$は，$G(x)$のxに関するJacobian行列である。

(2)の場合，話を簡単にするために，

(2.34) $\quad \mathrm{rank}\,(F_{(1,2)}(\hat{x}), \hat{p}_{11}) = n-1$

となったとする。このとき，方程式(2.32)について考えると，解$\hat{x}$に対して，今の場合，

(2.35) $\quad \mathrm{rank}\, G'(\hat{x}) = 2n$

となり，$\hat{x}$は(2.32)のJacobian行列のrankが1つ落ちたsingular pointになっている。したがって，もう1つパラメータβを導入して，我々は，

(2.36) $\quad H(y) = \begin{pmatrix} G(x) - \beta\tilde{e}_{n+j'} \\ G'(x)k \\ k_2 - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \text{ただし，} y = (x, k, \beta)^T, \\ k = (k, k', k_{2n+1})^T, \\ k = (k_1, \cdots, k_n)^T, \\ k' = (k'_1, \cdots, k'_n)^T \end{pmatrix}$

について考えればよい。ここで，$\tilde{e}_{n+j'} = (0, e_{j'}, 0)^T$（$0$は$n$次元の零ベクトル，$e_{j'}$は，$\mathrm{rank}\,(F_{(1,2)}(\hat{x}), \hat{p}_{11}, e_{j'}) = n$をみたす$e_{j_1}$または$e_{j_2}$のいずれかのベクトルである）。

方程式(2.36)は，もちろん，解$\hat{y} = (\hat{x}, \hat{k}, 0)^T$をもち，この解$\hat{y}$に対して，我々は，定理1から

(2.37) $\quad \det H'(\hat{y}) \neq 0 \rightleftharpoons \mathrm{rank}\,(G'(\hat{x}), \{G''(\hat{x})\hat{k}\}\hat{k}) = 2n+1$.

ここで，$H'(y)$は，$H(y)$のyに関するJacobian行列であり，

$G''(x)$ は，$G(x)$ の x に関する2階の導関数である。

(3) の場合は，方程式 (2.32)（すなわち，$G(x)=0$）をはじめの方程式 $F(x)=0$ と考えて，(2.29) に相当する3つのベクトルを計算し，もう一度，3つの場合に，場合分けをして考えることになる。

注意 5.

(2.2) より，$\det F_x(\hat{x})=0$ であるから，方程式 (2.6) のかわりに，

(2.38) $$K(w)=\begin{pmatrix} F(x)-Be_k \\ g(x) \end{pmatrix}=0$$

について考えてもよい。ここで，$w=(x,B)^T$, $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $g(x)=\det F_x(x)$. 方程式 (2.38) は，明らかに，解 $\hat{w}=(\hat{x},0)^T$ をもち，この解 $\hat{w}$ に対して，我々は，

(2.39) $$\det K'(\hat{w})\neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}(F_0(\hat{x}),\hat{\ell})=n$$

を得る。ただし，$K'(w)$ は，$K(w)$ の w に関する Jacobian 行列であり，$\hat{\ell}$ は，(2.7) でできたベクトルである。

§3. 非線形方程式 $F(x,B)=0$ の場合

$(\hat{x},\hat{B})$ を，n 次元の非線形方程式

(3.1) $$F(x,B)=0$$

をみたし，かつ $\operatorname{rank} F_x(\hat{x},\hat{B})=n-1$ を満足する点とする。ここで，$F(x,B)$ は，(x,B)-空間の $(\hat{x},\hat{B})$ を含むある領

域Ωで定義されており，Ωで(x, B)に関して2回連続微分可能とする。$F_x(x, B)$は，$F(x, B)$のxに関するJacobian行列とし，Bはパラメータで，$B=(B_1, \cdots, B_m)^T$ $(m \geq 1)$．最初は，パラメータBの次元を1，すなわち，$m=1$とし，簡単のため，B_1をBと書くことにする。$F_B(x, B)$を$F(x, B)$のBに関する偏導関数とするとき，次の2つの場合にわけて考える：

(3.2) $$\text{(I)} \quad n-1 = \operatorname{rank} F_x(\hat{x}, \hat{B}) < n = \operatorname{rank}\left(F_x(\hat{x}, \hat{B}), F_B(\hat{x}, \hat{B})\right),$$

(3.3) $$\text{(II)} \quad n-1 = \operatorname{rank} F_x(\hat{x}, \hat{B}) = \operatorname{rank}\left(F_x(\hat{x}, \hat{B}), F_B(\hat{x}, \hat{B})\right).$$

話を簡単にするために，§2と同じように，我々は，

(3.4) $$n-1 = \operatorname{rank} F_x(\hat{x}, \hat{B}) = \operatorname{rank} F_0(\hat{x}, \hat{B})$$

と仮定する。ここで，$F_0(\hat{x}, \hat{B})$は，$F_x(\hat{x}, \hat{B})$の第1列をとり除いた$n \times (n-1)$行列である。また，n次元ベクトル$e_j = (0, \cdots, 0, \underset{\hat{j}}{1}, 0, \cdots, 0)^T$は，

(3.5) $$n = \operatorname{rank}\left(F_x(\hat{x}, \hat{B}), e_j\right) = \operatorname{rank}\left(F_0(\hat{x}, \hat{B}), e_j\right)$$

をみたすベクトルである。

<u>(I)の場合.</u>　この場合は，§2の(2.6)と同様な大きな方程式

(3.6) $$G(\mathfrak{x}) = \begin{pmatrix} F(x, B) \\ F_x(x, B)h \\ h_1 - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ただし，} \mathfrak{x} = (x, h, B)^T, \\ x = (x_1, \cdots, x_n)^T, \\ h = (h_1, \cdots, h_n)^T \end{array}\right)$$

について考えると，仮定(3.4)より，解 $\hat{x}=(\hat{x},\hat{h},\hat{B})^T$ をもち，この解$\hat{x}$に対して，次の結果を得る：

(3.7) $$\det G'(\hat{x})\neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\hat{l})=n.$$

ただし，$G'(x)$は，$G(x)$のxに関するJacobian行列であり，$\hat{l}=\{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}\}\hat{h}$. $F_{xx}(x,B)$は，$F(x,B)$のxに関する2階の導関数である。

$\operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\hat{l})=n-1$ の場合には，方程式

(3.8) $$\begin{cases} F_x(\hat{x},\hat{B})h_2+\hat{l}=0, \\ h_2^1=0 \end{cases} \qquad \left(h_2=(h_2^1,h_2^2,\cdots,h_2^n)^T\right)$$

が，ただ1つの解$\hat{h}_2$をもつから，我々は，パラメータBの次元を2（すなわち，$m=2$）として，次の方程式

(3.9) $$G_1(x_1)=\begin{pmatrix} F(x,B) \\ F_x(x,B)h_1 \\ F_x(x,B)h_2+\{F_{xx}(x,B)h_1\}h_1 \\ h_1^1-1 \\ h_2^1 \end{pmatrix}=0$$

について考えればよい。ただし，$x_1=(x,h_1,h_2,B)^T$, $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $h_i=(h_i^1,h_i^2,\cdots,h_i^n)^T$ $(i=1,2)$，$B=(B_1,B_2)^T$.

方程式(3.9)は，解$\hat{x}_1=(\hat{x},\hat{h}_1,\hat{h}_2,\hat{B})^T$をもち，この解に対して

(3.10) $$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} F_x(\hat{x},\hat{B}) & O & F_{B_1}(\hat{x},\hat{B}) & F_{B_2}(\hat{x},\hat{B}) \\ F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 & F_x(\hat{x},\hat{B}) & F_{xB_1}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 & F_{xB_2}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 \end{pmatrix}=2n$$

が成り立っていれば，§2の定理2と同様にして，

(3.11) $\det G_1'(\hat{x}_1) \neq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\ \hat{l}_2) = n$.

ただし，$G_1'(x_1)$ は，$G_1(x_1)$ の x_1 に関するJacobian行列であり，$\hat{l}_2 = \hat{X}^{(2)}\hat{h}_1 + 2\hat{X}^{(1)}\hat{h}_2$. ここで，$X^{(0)} = F_x(x,B)$，$X^{(1)} = X_x^{(0)}h_1$，$X^{(2)} = X_x^{(0)}h_2 + X_x^{(1)}h_1$ であり，$\hat{X}^{(i)}\ (i=0,1,2)$ は，$X^{(i)}$ の $x=\hat{x}$，$h_1=\hat{h}_1$，$h_2=\hat{h}_2$，$B=\hat{B}$ における値をあらわす。

次に，$\operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\ \hat{l}_2) = n-1$ を含むもっと一般的な場合について考える。パラメータ B の次元を $m\ (\geq 3)$ とし，$F(x,B)$ は，Ω で (x,B) に関して $(m+1)$ 回連続微分可能とする。いま，

(3.12) $$X^{(j+1)} = \sum_{k=0}^{j} {}_jC_k X_x^{(k)} h_{j+1-k} \qquad (1 \leq j \leq m-1)$$

および

(3.13) $$l_j = \sum_{k=1}^{j} {}_jC_k X^{(k)} h_{j+1-k} \qquad (1 \leq j \leq m)$$

とおく。ただし，$X^{(0)} = F_x(x,B)$，$X^{(1)} = X_x^{(0)}h_1 = F_{xx}(x,B)h_1$ であり，$X_x^{(k)}\ (k=0,1,\cdots,m-1)$ は，$X^{(k)}$ の x に関する導関数である。$h_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ は n 次元のベクトルである。このとき，あるベクトル $(\hat{y}_{m-1},\ \hat{B})^T$（ここで，$\hat{y}_{m-1} = (\hat{x},\ \hat{h}_1,\cdots,\hat{h}_{m-1})^T$，$\hat{B} = (\hat{B}_1,\cdots,\hat{B}_m)^T$）が存在して，次の条件をみたすとする：

(3.14) $(\hat{x},\hat{B})$ は，(3.1)をみたし，かつ(3.4)を満足する；

$$(3.15)\qquad \begin{cases} \hat{X}^{(0)}\hat{h}_1 = 0, \quad \hat{h}_1' - 1 = 0, \\ \hat{X}^{(0)}\hat{h}_{j+1} + \hat{l}_j = 0, \quad \hat{h}_{j+1}' = 0 \quad (j=1,2,\cdots,m-2); \end{cases}$$

$$(3.16)\qquad \operatorname{rank}\left(F_0(\hat{x},\hat{B}),\ \hat{l}_{m-1}\right) = n-1;$$

$$(3.17)\qquad \operatorname{rank}\left(\hat{D},\ \hat{U}_1,\ \hat{U}_2,\ \cdots,\ \hat{U}_m\right) = mn.$$

ただし，

$$(3.18)\qquad \hat{D} = \begin{pmatrix} {}_0C_0\hat{X}^{(0)} & & & O \\ {}_1C_0\hat{X}^{(1)} & {}_1C_1\hat{X}^{(0)} & & \\ {}_2C_0\hat{X}^{(2)} & {}_2C_1\hat{X}^{(1)} & {}_2C_2\hat{X}^{(0)} \cdot \cdot & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \cdot \\ {}_{m-1}C_0\hat{X}^{(m-1)} & {}_{m-1}C_1\hat{X}^{(m-2)} & {}_{m-1}C_2\hat{X}^{(m-3)} \cdots & {}_{m-1}C_{m-1}\hat{X}^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$(3.19)\qquad \hat{U}_i = \begin{pmatrix} F_{B_i}(\hat{x},\hat{B}) \\ \hat{X}^{(0)}_{B_i}\hat{h}_1 \\ \hat{X}^{(0)}_{B_i}\hat{h}_2 + \hat{X}^{(1)}_{B_i}\hat{h}_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{m-2} {}_{m-2}C_k \hat{X}^{(k)}_{B_i}\hat{h}_{m-1-k} \end{pmatrix} \qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

ここで，$\hat{X}^{(k)}$, $\hat{X}^{(p)}_{B_i}$, $\hat{l}_j$ は，それぞれ，$X^{(k)}$, $X^{(p)}_{B_i}$, l_j の $x=\hat{x}$, $h_i=\hat{h}_i$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$, $B=\hat{B}$ における値をあらわし，$X^{(p)}_{B_i}$ は，$X^{(p)}$ の B_i に関する偏導関数である．この時，次の方程式

$$(3.20)\qquad G_{m-1}(x_{m-1}) = \begin{pmatrix} F(x,B) \\ X^{(0)}h_1 \\ X^{(0)}h_2 + X^{(1)}h_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{m-1} {}_{m-1}C_k X^{(k)} h_{m-k} \\ \psi_{m-1}(x_{m-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F(x,B) \\ X^{(0)}h_1 \\ X^{(0)}h_2+l_1 \\ \vdots \\ X^{(0)}h_m+l_{m-1} \\ \psi_{m-1}(x_{m-1}) \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \text{ただし,} \\ x_{m-1}=(x,h_1,\cdots,h_m,B)^T, \\ h_j=(h_j^1,h_j^2,\cdots,h_j^n)^T \\ (j=1,2,\cdots,m), \\ \psi_{m-1}(x_{m-1})=(h_1^1-1,h_2^1,\cdots,h_m^1)^T \end{pmatrix}$$

について考えると，方程式 (3.20) は，解 $\hat{x}_{m-1}=(\hat{y}_{m-1},\hat{h}_m,\hat{B})^T$ をもつ。ここで，$\hat{h}_m$ は，方程式

(3.21) $$\begin{cases} F_x(\hat{x},\hat{B})h_m+\hat{l}_{m-1}=0, \\ h_m^1=0 \end{cases} \quad \left(h_m=(h_m^1,h_m^2,\cdots,h_m^n)^T\right)$$

の解である。この解 $\hat{x}_{m-1}$ に対して，§2の定理3と同様に，我々は，

(3.22) $$\det G'_{m-1}(\hat{x}_{m-1})\neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\hat{l}_m)=n$$

を得る。ただし，$G'_{m-1}(x_{m-1})$ は，$G_{m-1}(x_{m-1})$ の x_{m-1} に関するJacobian行列であり，$\hat{l}_m$ は，l_m の $x=\hat{x}$, $h_i=\hat{h}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$, $B=\hat{B}$ における値をあらわす。

$\operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\hat{l})=n-1$ のとき，パラメータBの次元を1に固定して，§2で述べた外からパラメータを入れる方法を使って singularity を解消することもできる。この場合は，方程式 (3.8) が解をもつことを利用して，方程式 (3.9) のかわりに，次の方程式

$$(3.23)\qquad \tilde{G}_1(z_1)=\begin{pmatrix} F(x,B) \\ F_x(x,B)k_1-\beta F_B(x,B) \\ F_x(x,B)k_2+\{F_{xx}(x,B)k_1\}k_1 \\ k_1^1-1 \\ k_2^1 \end{pmatrix}=0$$

について考える。ただし，$z_1=(x,k_1,k_2,B,\beta)^T$，$k_i=(k_i^1,k_i^2,\cdots,k_i^n)^T$ $(i=1,2)$ であり，Bの次元は1，βはパラメータである。我々は，方程式(3.23)において，§2で使ったベクトルe_kのかわりに，(3.2)より，$\mathrm{rank}(F_x(\hat{x},\hat{B}),F_B(\hat{x},\hat{B}))=n$であるから，$F_B(x,B)$をとった。そうすれば，方程式(3.23)は，解$\hat{z}_1=(\hat{x},\hat{k}_1,\hat{k}_2,\hat{B},0)^T$をもつ。ここで，$(\hat{x},\hat{k}_1,\hat{B})^T$は，方程式(3.6)の解であり，$\hat{k}_2$は，方程式(3.8)の解である。この解$\hat{z}_1$に対して，§2の定理2より，我々は，

$$(3.24)\qquad \det\tilde{G}_1'(\hat{z}_1)\neq 0 \rightleftarrows \mathrm{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\hat{l}_2)=n$$

を得る。ただし，$\tilde{G}_1'(z_1)$は，$\tilde{G}_1(z_1)$のz_1に関するJacobian行列であり，$\hat{l}_2=\hat{\tilde{X}}^{(2)}\hat{k}_1+2\hat{\tilde{X}}^{(1)}\hat{k}_2$．ここで，$\tilde{X}^{(0)}=F_x(x,B)$（Bは1次元），$\tilde{X}^{(1)}=\tilde{X}_x^{(0)}k_1$，$\tilde{X}^{(2)}=\tilde{X}_x^{(0)}k_2+\tilde{X}_x^{(1)}k_1$であり，$\hat{\tilde{X}}^{(i)}$ $(i=0,1,2)$は，$\tilde{X}^{(i)}$の$x=\hat{x}$，$k_1=\hat{k}_1$，$k=\hat{k}_2$，$B=\hat{B}$における値をあらわす。

次に，§2と同様に，$\mathrm{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\hat{l}_2)=n-1$を含むもっと一般的な場合について考察する。$F(x,B)$は，Ωで$(x,B)$（Bは1次元）に関して$(d+2)$回連続微分可

能とする($d \geqq 2$)。このとき,

(3.25) $$\tilde{X}^{(i+1)} = \sum_{j=0}^{i} {}_iC_j \tilde{X}_x^{(j)} k_{i+1-j} \qquad (1 \leqq i \leqq d)$$

(3.26) $$\tilde{l}_i = \sum_{j=1}^{i} {}_iC_j \tilde{X}^{(j)} k_{i+1-j} \qquad (1 \leqq i \leqq d+1)$$

とおく。ただし,$\tilde{X}^{(0)} = F_x(x, B)$ (B は1次元), $\tilde{X}^{(1)} = \tilde{X}_x^{(0)} k_1 = F_{xx}(x, B) k_1$ であり,$\tilde{X}_x^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, \cdots, d$) は,それぞれ,$\tilde{X}^{(j)}$ の x に関する導関数である。いま,以下の条件をみたすベクトル $(\hat{w}_d, \hat{B})^T$ (ただし,$\hat{w}_d = (\hat{x}, \hat{k}_1, \cdots, \hat{k}_d)^T$) が存在すると仮定する:

(3.27) $(\hat{x}, \hat{B})$ は,(3.1)をみたしかつ(3.4)を満足する;

(3.28) $$\begin{cases} \hat{\tilde{X}}^{(0)} \hat{k}_1 = 0, \ \hat{k}_1^1 - 1 = 0, \\ \hat{\tilde{X}}^{(0)} \hat{k}_{j+1} + \hat{\tilde{l}}_j = 0, \ \hat{k}_{j+1}^1 = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, d-1); \end{cases}$$

(3.29) $$\mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}, \hat{B}), \hat{\tilde{l}}_d) = n - 1.$$

ここで,$k_i = (k_i^1, k_i^2, \cdots, k_i^n)^T$ ($i = 1, 2, \cdots, d+1$) であり,$\hat{\tilde{X}}^{(0)} = F_x(\hat{x}, \hat{B})$, $\hat{\tilde{l}}_j$ ($j = 1, 2, \cdots, d$) は,$\tilde{l}_j$ の $x = \hat{x}$, $k_1 = \hat{k}_1$, $\cdots$, $k_d = \hat{k}_d$, $B = \hat{B}$ における値をあらわす。このとき,我々は,d 個のパラメータ $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d$ を導入して,次の方程式

(3.30) $$\tilde{G}_d(z_d) = \begin{pmatrix} F(x, B) \\ \tilde{X}^{(0)} k_1 - \beta_1 F_B(x, B) \\ \tilde{X}^{(0)} k_2 + \tilde{X}^{(1)} k_1 - \beta_2 F_B(x, B) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{d-1} {}_{d-1}C_i \tilde{X}^{(i)} k_{d-i} - \beta_d F_B(x, B) \\ \sum_{i=0}^{d} {}_dC_i \tilde{X}^{(i)} k_{d+1-i} \\ \psi_d(z_d) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F(x,B) \\ \tilde{X}^{(0)}k_1 - \beta_1 F_B(x,B) \\ \tilde{X}^{(0)}k_2 + \tilde{l}_1 - \beta_2 F_B(x,B) \\ \vdots \\ \tilde{X}^{(0)}k_d + \tilde{l}_{d-1} - \beta_d F_B(x,B) \\ \tilde{X}^{(0)}k_{d+1} + \tilde{l}_d \\ \psi_d(z_d) \end{pmatrix} = 0$$

について考える。ここで，$z_d = (x, k_1, k_2, \cdots, k_{d+1}, B, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d)^T$，$k_i = (k_i^1, k_i^2, \cdots, k_i^n)^T$ $(i=1,2,\cdots,d+1)$，$\psi_d(z_d) = (k_1^1 - 1, k_2^1, \cdots, k_{d+1}^1)^T$．そうすれば，方程式(3.30)は，解 $\hat{z}_d = (\hat{w}_d, \hat{k}_{d+1}, \hat{B}, 0, 0, \cdots, 0)^T$ をもち，この解 $\hat{z}_d$ に対して，§2の定理3より，我々は，

(3.31) $\qquad \det \tilde{G}_d'(\hat{z}_d) \neq 0 \rightleftarrows \mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x}, \hat{B}), \hat{\tilde{l}}_{d+1}) = n$

を得る。ただし，$\tilde{G}_d'(z_d)$ は，$\tilde{G}_d(z_d)$ の z_d に関するJacobian行列であり，$\hat{\tilde{l}}_{d+1}$ は，$\tilde{l}_{d+1}$ の $x = \hat{x}$, $k_1 = \hat{k}_1, \cdots, k_{d+1} = \hat{k}_{d+1}$, $B = \hat{B}$ における値をあらわす。

注意 6.

条件(3.2)が成り立つ場合，J. P. Abbott[2] および H. Kawakami[15] は，$\det F_x(\hat{x}, \hat{B}) = 0$ であるから，方程式(3.6)のかわりに，次の方程式

(3.32) $\qquad A(w) = \begin{pmatrix} F(x,B) \\ g(x,B) \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \text{ただし，} w = (x,B)^T, \\ x = (x_1, \cdots, x_n)^T \end{pmatrix}$

について考えている。ここで，$g(x,B) = \det F_x(x,B)$．

方程式(3.32)は，解 $\hat{w}=(\hat{x},\hat{B})^T$ をもち，この解 $\hat{w}$ に対して，§2の注意5の(2.39)と同様にして

(3.33) $$\det A'(\hat{w}) \neq 0 \rightleftarrows \mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x},\hat{B}),\ \hat{e}\ )=n$$

を得る。ただし，$A'(w)$ は，$A(w)$ の w に関するJacobian行列であり，$\hat{e}$ は，(3.7)ででてくるベクトルである．

<u>(II)の場合.</u>　この場合，仮定(3.3)，(3.4)より，方程式

(3.34) $$\begin{cases} F_x(\hat{x},\hat{B})h_2+F_B(\hat{x},\hat{B})=0, \\ h_2^1=0 \end{cases} \qquad \left(h_2=(h_2^1,h_2^2,\cdots,h_2^n)^T\right)$$

が，ただ1つの解 $\hat{h}_2$ をもつから，パラメータ β を導入して

(3.35) $$W(z)=\begin{pmatrix} F(x,B)-\beta e_j \\ F_x(x,B)h_1 \\ F_x(x,B)h_2+F_B(x,B) \\ h_1^1-1 \\ h_2^1 \end{pmatrix}=0 \qquad \left(\begin{array}{l} \text{ここで，} \\ z=(x,h_1,h_2,B,\beta)^T, \\ x=(x_1,\cdots,x_n)^T, \\ h_i=(h_i^1,h_i^2,\cdots,h_i^n)^T \\ \quad (i=1,2). \end{array}\right)$$

について考える。明らかに，方程式(3.35)は，解 $\hat{z}=(\hat{x},\hat{h}_1,\hat{h}_2,\hat{B},0)^T$ をもつ。仮定より，$F(x,B)$ は，Ω で (x,B) に関して2回連続微分可能より，$W(z)$ は，z に関して連続微分可能となり，$W'(z)$ を，$W(z)$ の z に関するJacobian行列とすれば，解 $\hat{z}$ に対して

(3.36) $$\det W'(\hat{z})$$

$$= \begin{vmatrix} F_x(\hat{x},\hat{B}) & O & O & F_B(\hat{x},\hat{B}) & -e_j \\ F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 & F_x(\hat{x},\hat{B}) & O & F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 & 0 \\ F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2+F_{Bx}(\hat{x},\hat{B}) & O & F_x(\hat{x},\hat{B}) & F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2+F_{BB}(\hat{x},\hat{B}) & 0 \\ 0\,0\cdots 0 & 1\,0\cdots 0 & 0\,0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0\,0\cdots 0 & 0\,0\cdots 0 & 1\,0\cdots 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & F_0(\hat{x},\hat{B}) & 0 & O & 0 & O & 0 & -e_j \\ \widehat{(\#)} & G_0(\hat{x},\hat{h}_1,\hat{B}) & 0 & F_0(\hat{x},\hat{B}) & 0 & O & \widehat{(\star)} & 0 \\ \widehat{(\#\#)} & H_0(\hat{x},\hat{h}_2,\hat{B}) & 0 & O & 0 & F_0(\hat{x},\hat{B}) & \widehat{(\star\star)} & 0 \\ 0 & 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

ただし，

(3.37) $$\begin{cases} \widehat{(\#)} = \{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1\}\hat{h}_1, \\ \widehat{(\#\#)} = \{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2+F_{Bx}(\hat{x},\hat{B})\}\hat{h}_1, \\ \widehat{(\star)} = F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1+\{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1\}\hat{h}_2, \\ \widehat{(\star\star)} = F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2+F_{BB}(\hat{x},\hat{B})+\{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2+F_{Bx}(\hat{x},\hat{B})\}\hat{h}_2 \end{cases}$$

であり，$G_0(\hat{x},\hat{h}_1,\hat{B})$ および $H_0(\hat{x},\hat{h}_2,\hat{B})$ は，それぞれ，$F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1$ および $F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_2+F_{Bx}(\hat{x},\hat{B})$ の第1列をとり除いた $n\times(n-1)$ 行列である。(3.37) より，$\widehat{(\#\#)}=\widehat{(\star)}$。

まずはじめに，

(3.38) $$\operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\widehat{(\#)}) = n-1$$

の場合から考える。この場合は，(3.36) より，

(3.39) $$\det W'(\hat{z}) = \begin{vmatrix} 0 & F_0 & 0 & O & 0 & O & 0 & -e_j \\ 0 & G_0 & 0 & F_0 & 0 & O & \widehat{(\star)} & 0 \\ \widehat{(\star)} & H_0 & 0 & O & 0 & F_0 & \widehat{(\star\star)} & 0 \\ 0 & 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

となるから,

(3.40) $\qquad \det W'(\hat{z}) \neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}\,(F_0(\hat{x},\hat{B}),\ \widehat{(\star)}) = n$.

次に,

(3.41) $\quad \operatorname{rank}\,(F_0(\hat{x},\hat{B}),\widehat{(\star)}) = n-1 < n = \operatorname{rank}\,(F_0(\hat{x},\hat{B}),\widehat{(\sharp)})$

の場合には,

(3.42) $$\det W'(\hat{z}) = \begin{vmatrix} 0 & F_0 & 0 & O & 0 & O & 0 & -e_j \\ \widehat{(\sharp)} & G_0 & 0 & F_0 & 0 & O & 0 & 0 \\ 0 & H_0 & 0 & O & 0 & F_0 & \widehat{(\star\star)} & O \\ 0 & 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0 \\ 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

となるから,

(3.43) $\qquad \det W'(\hat{z}) \neq 0 \rightleftarrows \operatorname{rank}\,(F_0(\hat{x},\hat{B}),\ \widehat{(\star\star)}) = n$.

最後に,

(3.44) $\qquad n = \operatorname{rank}\,(F_0(\hat{x},\hat{B}),\widehat{(\sharp)}) = \operatorname{rank}\,(F_0(\hat{x},\hat{B}),\ \widehat{(\star)})$

の場合について考える。(3.44)が成り立つ場合,方程式

(3.45) $$\begin{cases} F_x(\hat{x},\hat{B})k + F_B(\hat{x},\hat{B}) = 0, \\ F_x(\hat{x},\hat{B})k' + \{F_{xx}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1\}k + F_{xB}(\hat{x},\hat{B})\hat{h}_1 = 0, \\ k_1' = 0 \end{cases}$$

は,ただ1組の解 $(\hat{k},\hat{k}')^T$ をもつ。ただし,$k = (k_1,\cdots,k_m)^T$,$k' = (k_1',\cdots,k_m')^T$. 実は,

(3.46) $\qquad \hat{k} = \hat{h}_2 + a\hat{h}_1 \qquad (a \neq 0)$

となっているから,(3.45)の2番目の式は,

(3.47) $\qquad F_x(\hat{x},\hat{B})\hat{k}' + a\widehat{(\sharp)} + \widehat{(\star)} = 0$

となる。したがって，この場合，

$$(3.48)\qquad \det W'(\hat{z}) = \begin{vmatrix} 0 & F_0 & 0 & O & 0 & O & 0 & -e_j \\ (\hat{\#}) & G_0 & 0 & F_0 & 0 & O & 0 & 0 \\ (\hat{\#\#}) & H_0 & 0 & O & 0 & F_0 & \hat{\delta} & 0 \\ 0 & 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0 \\ 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

となるから，

$$(3.49)\qquad \det W'(\hat{z}) \neq 0 \rightleftarrows \mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x},\hat{\beta}),\ \hat{\delta}) = n.$$

ただし，

$$(3.50)\qquad \hat{\delta} = F_{x\beta}(\hat{x},\hat{\beta})\hat{h}_2 + F_{\beta\beta}(\hat{x},\hat{\beta}) + \{F_{xx}(\hat{x},\hat{\beta})\hat{h}_2 + F_{\beta x}(\hat{x},\hat{\beta})\}\hat{k}.$$

<u>注意　7.</u>

条件 (3.44) が成り立つ場合には，次の方程式

$$(3.51)\qquad H(y) = \begin{pmatrix} G(x) - \beta\tilde{e}_{n+j} \\ G'(x)\boldsymbol{k} \\ k_{2n+1} - 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \text{ただし，} y = (x, \boldsymbol{k}, \beta)^T, \\ \boldsymbol{k} = (k, k', k_{2n+1})^T, \\ k = (k_1, \cdots, k_n)^T,\ k' = (k'_1, \cdots, k'_n)^T \end{pmatrix}$$

について考えてもよい。ただし，$G(x)$ は，(3.6) で定義される関数であり，$G'(x)$ は，$G(x)$ の x に関する Jacobian 行列，$\tilde{e}_{n+j} = (\mathbb{0}, e_j, 0)^T$（$\mathbb{0}$ は n 次元の零ベクトル）。方程式 (3.51) は，解 $\hat{y} = (\hat{x}, \hat{\boldsymbol{k}}, 0)^T$ をもち，この解 $\hat{y}$ に対して，

$$(3.52)\qquad \det H'(\hat{y}) \neq 0 \rightleftarrows \mathrm{rank}\,(G'(\hat{x}), \{G''(\hat{x})\hat{\boldsymbol{k}}\}\hat{\boldsymbol{k}}) = 2n+1$$

を得る。ただし，$H'(y)$ は，$H(y)$ の y に関する Jacobian 行列であり，$G''(x)$ は，$G(x)$ の x に関する 2 階の導関数である。ところが，この場合，

$$(3.53)\qquad \mathrm{rank}\,(G'(\hat{x}), \{G''(\hat{x})\hat{\boldsymbol{k}}\}\hat{\boldsymbol{k}}) = 2n+1 \rightleftarrows \mathrm{rank}\,(F_0(\hat{x},\hat{\beta}),\ \hat{\delta}) = n$$

がいえるので，

(3.54) $\det H'(\hat{y}) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(F_0(\hat{x},\hat{B}),\ \hat{\delta}) = n.$

注意 8.

条件(3.41)または条件(3.44)が成り立つ場合には，方程式(3.35)のかわりに，次の方程式

(3.55) $$\tilde{W}(z) = \begin{pmatrix} F(x,B) - \beta\{F_{xx}(x,B)h_1\}h_1 \\ F_x(x,B)h_1 \\ F_x(x,B)h_2 + F_B(x,B) \\ h_1^1 - 1 \\ h_2^1 \end{pmatrix} = 0$$

について考えてもよい。一方，条件(3.44)が成り立つ場合には，

(3.56) $$\tilde{\tilde{W}}(z) = \begin{pmatrix} F(x,B) - \beta(\star) \\ F_x(x,B)h_1 \\ F_x(x,B)h_2 + F_B(x,B) \\ h_1^1 - 1 \\ h_2^1 \end{pmatrix} = 0$$

について考えてもよい。ただし，$(\star) = F_{xB}(x,B)h_1 + \{F_{xx}(x,B)h_1\}h_2$.

注意 9.

H. Weber[11] は，(3.35)と同様な方程式

(3.57) $$V(z) = \begin{pmatrix} F(x,B) + \beta\varphi \\ F_x(x,B)h_1 \\ F_x(x,B)h_2 + F_B(x,B) \\ h_1^T h_1 - 1 \\ h_2^T h_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \text{ただし，} \\ z = (x, h_1, h_2, B, \beta)^T, \\ x = (x_1, \cdots, x_n)^T, \\ h_i = (h_i^1, h_i^2, \cdots, h_i^n)^T \\ (i = 1, 2) \end{array}\right)$$

について考えている。ここで，φは，ψを

(3.58) $$F_x(\hat{x},\hat{B})^T\psi=0$$

をみたすnon-trivialな解とするとき，$\varphi^T\psi\neq 0$をみたすベクトルである。方程式(3.57)は，解$\hat{z}=(\hat{x},\hat{h}_1,\hat{h}_2,\hat{B},0)^T$をもち，この解$\hat{z}$に対して，彼は，$\det V'(\hat{z})\neq 0$となる一つの十分条件を与えている。ここで，$V'(z)$は，$V(z)$の$z$に関するJacobian行列である。

References

[1] Shamanskii, V. E., USSR. Comp. Math. Math. Phy., 7 (1967), 72-85. [2] Abbott, J. P., J. Comp. and Appl. Math., 4 (1978), 19-27. [3] Seydel, R., Numer. Math., 32 (1979), 51-68.
[4] Seydel, R., Numer. Math., 33 (1979), 339-352. [5] Moore, G. and Spence, A., SIAM J. Numer. Anal., 17 (1980), 567-576.
[6] Decker, D. W. and Kelley, C. T., SIAM J. Numer. Anal., 17 (1980), 66-70. [7] Decker, D. W. and Kelley, C. T., SIAM J. Numer. Anal., 17 (1980), 465-471. [8] Griewank, A. and Osborne, M. R., SIAM J. Numer. Anal., 18 (1981), 145-149. [9] Pönisch, G. and Schwetlick, H., Computing, 26 (1981), 107-121. [10] Weber, H. and Werner, W., Computing, 26 (1981), 315-326. [11] Weber, H., Lecture Notes in Mathematics, 878 (1981), 407-425. [12] Seydel, R., Appl. Math. Comp., 9 (1981), 257-271. [13] Melhem, R. G. and Rheinboldt, W. C., Computing, 29 (1982), 201-226. [14] Spence, A. and Werner, B., IMA J. Numer. Anal., 2 (1982), 413-427.
[15] Kawakami, H., to appear in IEEE Trans. Circuits and Systems.
[16] Yamamoto, N., J. Math. Tokushima Univ., 16 (1982), 55-93.
[17] Yamamoto, N., J. Math. Tokushima Univ., 16 (1982), 95-126.
[18] Yamamoto, N., Newton's method for singular problems and its application to boundary value problems, to appear in J. Math. Tokushima Univ., 17 (1983).