数理解析研究所講究録
第 508 巻 1983 年 1-11

$\Sigma\mathbb{C}$-スタイン多様体について

東大・教養　藤本佳久

序．我々は可算無限次元空間$\Sigma\mathbb{C}$上の正則函数について調べてきた。そして，$\Sigma\mathbb{C}$の擬凸開集合に対する$\mathcal{O}$-係数のコホモロジー群の消滅すること，$\Sigma\mathbb{C}$の擬凸開集合の analytic subvariety Vの${}_V\mathcal{O}$-係数のコホモロジー群が消滅することはすでに得られている。ここでは，得られている結果を，$\Sigma\mathbb{C}$の開集合をモデルとする無限次元の複素多様体—それを，$\Sigma\mathbb{C}$-複素多様体と呼ぶことにするが—の場合に拡張した結果を報告する。我々は，有限次元の理論の場合のスタイン多様体と類似の概念を導入し，それを$\Sigma\mathbb{C}$-スタイン多様体と呼ぶことにするが，これに対して，多変数函数論での基本定理である岡-カルタンの定理Bと類似の定理を示す。即ち，次の定理が成りたつ。

定理　Xを$\Sigma\mathbb{C}$-スタイン多様体とする．このとき

$$H^k(X, \mathcal{O}) = 0 \qquad (k \geqq 1)$$

が成りたつ。

§0 準備

後で使う、すでに得られている結果を復習しておく。(ここの内容については [1] [2] を参照されたい。)

まず $\Sigma\mathbb{C}$ の定義から始める。

$$\Sigma\mathbb{C} \underset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{n} \{\mathbb{C}^n ; u^n_{n+1}\}$$

但し、

$u^n_{n+1} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$: 標準的うめこみ写像とする。

次に、$\Sigma\mathbb{C}$ の開集合 U 上の正則函数 f とは、任意の自然数 n に対して、制限 $f|_{\mathbb{C}^n}$ が通常の意味で $U \cap \mathbb{C}^n$ において正則なときをいう。正則函数の簡単な例をあげておこう。

(1) $f(z) = z_1^k + z_2^k + z_3^k + \cdots$　　多項式

(2) $f(z) = e^{z_1 + z_2 + \cdots}$　　指数型

さて、$\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合に対しては次の定理が成りたつ。

定理1. U を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合とする。このとき、

$$H^k(U, \mathcal{O}) = 0 \qquad (k \geqq 1)$$

が成りたつ

次に $\Sigma\mathbb{C}$ の意味での analytic subvariety の概念を導入しよう。

定義1. D を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合とする。D の部分集合 V が D の

analytic subvariety であるとは．任意の $z \in D$ に対して，z の近傍 U と U 上の正則函数の族 F が存在して

$$V \cap U = \{ z \in D ; f(z) = 0 \quad f \in F \}$$

かつ任意の自然数 n に対して．$V_n \cap \bar{V}_n$ が $F|_{\mathbb{C}}$ の有限個の零点で表わされているときをいう。

今．$\mathcal{J}$ を V のイデアルの層とすると．

定理2. D を $\Sigma \mathbb{C}$ の擬凸開集合とし．V を analytic subvariety とする，このとき．

$$H^k(D, \mathcal{J}) = 0 \qquad (k \geqq 1)$$

が成りたつ。

ここで，

$$_V\tilde{\mathcal{O}}_D = \mathcal{O}_D / \mathcal{J}$$

とおくと．$({}_V\tilde{\mathcal{O}}_D)_z = 0 \quad (z \in D - V)$ であるから．

$$_V\mathcal{O} = {}_V\tilde{\mathcal{O}}_D | V$$

とおく。このとき．

定理3. D を $\Sigma \mathbb{C}$ の擬凸開集合とし．V を D の analytic subvariety とする．このとき．

$$H^k(V, {}_V\mathcal{O}) = 0 \quad (k \geqq 1)$$

が成りたつ。

§1 $\Sigma\mathbb{C}$-複素多様体

Hausdorff空間Xは、各点が$\Sigma\mathbb{R}^k$の開集合と位相同型な近傍を持つときに、$\Sigma\mathbb{R}^k$-多様体とよぼう。

Xの開集合Uから$\Sigma\mathbb{C}$の開集合$\tilde{U}$の上への位相同型写像$\phi: U \to \tilde{U}$に対して、$(U, \phi, \tilde{U})$の組をchartと呼ぶことにして、このとき、$\Sigma\mathbb{C}$－複素多様体を次のように導入しよう。

<u>定義2.</u> $\Sigma\mathbb{R}^2$-多様体Xが開被覆$\mathfrak{U} = \{U_\kappa\}$でおおわれ、各$U_\kappa$がすべてchart$(U_\kappa, \phi_\kappa, \tilde{U}_\kappa)$をなしているとき、次の条件をみたすならば、Xを$\Sigma\mathbb{C}$－複素多様体とよぶ。

(1) 任意の$U_\kappa, U_{\kappa'} \in \mathfrak{U}$に対して、写像

$$\phi_{\kappa'} \circ \phi_\kappa^{-1} : \phi_\kappa(U_\kappa \cap U_{\kappa'}) \to \phi_{\kappa'}(U_\kappa \cap U_{\kappa'})$$

は$\Sigma\mathbb{C}$の開集合の間の写像として双正則である。

(2) ϕが開集合$U \subset X$から、$\Sigma\mathbb{C}$の開集合への位相同型であり、任意の$U_\kappa \in \mathfrak{U}$に対して写像

$$\phi_\kappa \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U_\kappa) \to \phi_\kappa(U \cap U_\kappa)$$

が双正則ならば、$U \in \mathfrak{U}$である。

さて、X_1, X_2を$\Sigma\mathbb{C}$-複素多様体として、写像$\psi: X_1 \to X_2$がX_1の任意の座標近傍U_{κ_1}と、X_2の任意の座標近傍U_{κ_2}に対して、$\phi_{\kappa_2}^{-1} \circ \psi \circ \phi_{\kappa_1}$が$\Sigma\mathbb{C}$の開集合の間の写像として、正則であるとき、正則と呼ぶ。

$\Sigma\mathbb{C}$-複素多様体 X が σ-コンパクトとしよう。$\mathcal{O}(X)$ で X 上の正則函数のなす空間を表わすとき、$\mathcal{O}(X)$ は Fréchet 空間になる。（$X=\Sigma\mathbb{C}$ の開集合のとき、$\mathcal{O}(X)$ が Fréchet 空間になることは、例えば [1] をみられたい。）

$\Sigma\mathbb{C}$-複素多様体において、2つの交わる charts がどうはりあわさっているかをみよう。そのために、$\Sigma\mathbb{C}$ の開集合の間の正則写像を調べよう。

命題4. U, V を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合とし、写像 $\psi: U\to V$ が正則とする。このとき任意の自然数 n に対して、ある自然数 m が存在して、

$$\psi(U\cap\mathbb{C}^n)\subset V\cap\mathbb{C}^m$$

が成りたつ。

注意　次の写像 ψ は $\Sigma\mathbb{C}$ から $\Sigma\mathbb{C}$ への写像にさえなってない： $\Sigma\mathbb{C}$ の座標系 (z_i) とすると、$w_k=\sum_{i=1}^{k} z_i$ とおく。このとき、写像 ψ を $\psi(z_1, z_2, \cdots)=(w_1, w_2, \cdots)$ で定義する。

命題4により次の命題が成りたつ。

命題5. X を $\Sigma\mathbb{C}$-複素多様体とする。$(U_1, \phi_1=(z_j), \tilde{U}_1)$ $(U_2, \phi_2=(w_j), \tilde{U}_2)$ を連結な charts とする。このとき、任意の自然数 n に対して、ある自然数 m が存在して、$U_1\cap U_2'$ 上、$z_j=0$. $(j>m)$ となる。但し、

$$U_2^1 = \{x \in U_2 \ ; \ 0 = w_{n+1}(x) = w_{n+2}(x) = \cdots \}.$$

最後に、ΣC-複素多様体においては、σ-コンパクトならば、パラコンパクトになる。局所コンパクト空間のときには、σ-コンパクトからパラコンパクトが導かれることはよく知られているが、この場合は、局所コンパクトでない場合の例を与えている点で興味深いと思う。

命題6. Xを ΣC-複素多様体とする。このとき、Xが σ-コンパクトならば、パラコンパクトである。

§2. ΣC-スタイン多様体

ΣC-スタイン多様体の概念を導入し、序でも述べた次の定理の証明の概略を以下与えよう。

定理7. XをΣC-スタイン多様体とする。このとき、

$$H^k(X, \mathcal{O}) = 0 \quad (k \geqq 1)$$

が成り立つ。

まず、ΣC-スタイン多様体の定義をしよう。

定義3. σ-コンパクトなΣC-複素多様体Xが、ΣC-スタイン多様体であるとは、次の条件をみたすときをいう。

(i)(正則凸性) Xの任意のコンパクト集合Kに対して、Kの正則包

$$\hat{K} = \{x \in X \;;\; |f(x)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)|,\ f \in \mathcal{O}(X)\}$$

がコンパクトになる。

(ii) (分離条件) Xの相異なる2点x, yに対して、X全体で正則な函数で $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する。

(iii) Xの各点xに対して、xにおいて局所座標系$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \cdots)$の各座標$\phi_i$が$X$全体で正則な函数として選べる。

この定義は、有限次元の場合のスタイン多様体の定義と同様の(i)(ii)(iii)の3条件以外の余分な条件は何も仮定していない。

さて、ここで定理の証明のスケッチに入っていくわけであるが、その前に証明のアイディアについて触れておこう。まずXをとりつくす、$\Sigma\mathbb{C}$の多重円板のanalytic subvarietyに双正則な領域W_i（それを$\Sigma\mathbb{C}$-Oka-Weil領域と呼ぶ）の増大列が存在することを示す。一方、我々は、$\Sigma\mathbb{C}$の擬凸開集合のanalytic subvariety Vに対しては、§0で述べたように、$\mathcal{O}$-係数のコホモロジー群は消滅することが分っているから、W_iのコホモロジー群も消滅する。あとは、これらをグローバルにはりあわせることによって、X全体の$\mathcal{O}$-係数コホモロジー群の消滅を示す。1-コホモロジー群の消滅を示すときに、近似定理が必要である。

$\Sigma\mathbb{C}$-Oka-Weil領域の概念を導入しよう。

<u>定義4</u> Xを$\Sigma\mathbb{C}$-スタイン多様体とする。開集合WがXの中の$\Sigma\mathbb{C}$-Oka-Weil 領域であるというのは、次の条件をみたすときをいう。

(i) 以下の条件をみたす有限次元相対コンパクト analytic spaces から成る列$\{Y_i\}$がとれ、$Y=\bigcup Y_i$と表わせるような$\overline{W}$の開近傍Yが存在する；

① $W\cap Y_i$はY_iで相対コンパクト開集合。

② Y_iはY_{i+1}の analytic subvariety.

(ii) $\overline{W}$で正則な$\Sigma\mathbb{C}$への写像ψが存在して、ψはWを$\Sigma\mathbb{C}$の多重円板$\Delta(r)=\{(x_i)\in\Sigma\mathbb{C}\ ;\ |x_i|<r_i\}$（但し$0<r_i<\infty$）の閉 subvariety Vに双正則にうめこむ。

この定義より、定理3とあわせると次の命題を得る。

<u>命題8</u> Xを$\Sigma\mathbb{C}$-スタイン多様体とし、Wを$\Sigma\mathbb{C}$-Oka-Weil 領域とする，このとき、

$$H^k(W,\mathcal{O})=0 \qquad (k\geqq 1)$$

が成りたつ。

次の命題は、この定理の証明の中で最も本質的な部分を成している。

<u>命題9</u> Xを$\Sigma\mathbb{C}$-スタイン多様体とする。このとき、Xをとりつくす、$\Sigma\mathbb{C}$-Oka-Weil 領域の増大列$\{W_i\}$で、$\overline{W_i}\subset W_{i+1}$となるものが存在する。

この命題には、命題5を $\Sigma\mathbb{C}$-スタイン多様体の場合に refineした次の命題が重要な道具になる。

命題10　U_1, U_2 を X の連結な座標近傍で、$\varphi_1=(z_i)$, $\varphi_2=(w_i)$ を各々に対応した、X 全体で定義された正則函数からなる局所座標系とする。このとき、任意の自然数 n に対して、自然数 m が存在して、函数 z_j $(j>m)$ は

$$U_2' = \{x \in U_2 : 0 = w_{n+1}(x) = w_{n+2}(x) = \cdots\}$$

上0になる。

$\Sigma\mathbb{C}$ の集合を特徴付ける一つの方法は、有限次元空間で切ったときの切り口のよせあつめとして扱うことであったが、多様体の場合も、同様のアイディアをいかそうということである。多様体は曲っているからグローバルにはダメかも知れないが、ローカルに、X のコンパクト集合の近傍で、命題10を『はしご』のように使って、次元の壁をよじのぼりながら、「ハムをスライスするように」有限次元analytic spacesとして薄く切りとっていこうというのである。

我々は、次の"近似定理"を必要とする。

命題11.　X を $\Sigma\mathbb{C}$-スタイン多様体とし、W を $\Sigma\mathbb{C}$-Oka Weil領域とする。このとき、$\overline{W}$ で正則な函数 f は X で正則な函数により、$\overline{W}^{(n)}$ 上一様に近似される。但し、$W^{(n)} = W \cap Y_n$.

この命題は、定理2を使うことによって得られる。

以上の結果を合わせることによって、定理7の証明ができるわけであるが、最後に、$k=1$の場合だけ示そう。

[定理7の$k=1$の場合の証明]

$\mathcal{U}$をXの開被覆とし、各開集合は擬凸開集合としてよい。(定理1を見よ。) αをXの開被覆$\mathcal{U}$に対する1-コサイクルとする。今、$\Sigma\mathbb{C}$-Oka-Weil領域のとりつくし列を$\{W_i\}$とすると、各W_iに対しては$H^1(W_i, \mathcal{O})=0$だから、W_iでの0-コチェインβ_iが存在して、$\delta\beta_i=\alpha|W_i$。$\beta_i-\beta_{i+1}\in\Gamma(W_i, \mathcal{O})$だから命題11よりある$g_i\in\Gamma(X, \mathcal{O})$が存在して

$$\|\beta_i-\beta_{i+1}-g_i\|_{\overline{W}_{i-1}^{(i)}}<2^{-i}.$$

但し $\|f\|_W=\sup_W|f(z)|$ とする。

$\widetilde{\beta}_i=\beta_i+g_1+\cdots+g_{i-1}$ とおくと、

$$\|\widetilde{\beta}_i-\widetilde{\beta}_{i+1}\|_{\overline{W}_{i-1}^{(i)}}<2^{-i}$$

$\widetilde{\beta}_k-\widetilde{\beta}_j$において、$k\to\infty$のとき、$\mathcal{O}(W_{i-1})$の完備性より、$W_{i-1}$で正則な函数$s_j$に収束する。$W_{i-2}$上 $\widetilde{\beta}_i+s_i=\widetilde{\beta}_{i-1}+s_{i-1}$となるから、

$$\beta=\widetilde{\beta}_i+s_i\quad(W_{i-1}\text{上})$$

とおくと、$\delta\beta=\delta\widetilde{\beta}_i=\alpha|W_i$ (W_i上) となり、βが求めるものとなり、$H^1(X, \mathcal{O})=0$が示せた。 [QED]

以下参考文献をあげる。

参考文献

[1] Y. Fujimoto: Analytic functionals on a countably infinite dimensional topological vector space. Tokyo J. Math. Vol. 3. No. 2 (1980)

[2] Y. Fujimoto & M. Noumi.: Vanishing of the cohomology groups in $\Sigma\mathbb{C}$. to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

[3] Y. Fujimoto: Infinite dimensional Stein manifolds in preparation.

↓↓↓ Key Word: $\Sigma\mathbb{C}$-Stein manifold. ↑↑↑

——<1>——<2>——<1>——<5>——< おわり >——<!>—

Kindo.