数理解析研究所講究録
第 508 巻 1983 年 41-60



# Fuchs 型偏微分方程式の hyperfunction 解の一意性

東大 理　大阿久 俊則
(Toshinori Ôaku)

§1. 仮定と結果. Fuchs型偏(擬)微分作用素に対して,初期値問題を実解析パラメータを持つ hyperfunction (microfunction) の枠内で考察する.適当な仮定のもとで初期値問題が可解であることを[4]で示したが,本稿では初期値問題の一意性を示す.これは(hyperfunctionに対する)Holmgrenの定理の一般化とみなすこともできる.

$M=\mathbb{R}^n \ni x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x')$, $N=\{x\in M;\ x_1=0\}$ とおく.$\mathring{x}\in N$ の近傍で定義された(複素数値)実解析係数の線型偏微分作用素 $P$ が次のように書かれるとき,Baouendi-Goulaouic [1] に従い,$P$ を weight $(m-k)$ の Fuchs型作用素と呼ぶ.(以下,$D=(D_1,D_2,\cdots,D_n)$, $D'=(D_2,\cdots,D_n)$, $D_j=\partial/\partial x_j$)

$$P = x_1^k D_1^m + A_1(x,D')x_1^{k-1}D_1^{m-1}+\cdots+A_k(x,D')D_1^{m-k}$$
$$+A_{k+1}(x,D')D_1^{m-k-1}+\cdots+A_m(x,D');$$

ここで,　(i)　$k,m\in\mathbb{Z}$,　$0\le k\le m$,

(ii) order $A_j(x, D') \leqq j$ $\quad (1 \leqq {}^{\forall} j \leqq m)$,

(iii) order $A_j(0, x', D') \leqq 0$ $\quad (1 \leqq {}^{\forall} j \leqq k)$.

条件(iii)により，$A_j(0, x', D')$ $(1 \leqq j \leqq k)$は函数だから，それを$a_j(x')$と書こう．決定方程式

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_1(x')\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) + \cdots + \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)\,a_k(x') = 0$$

の根 $\lambda = 0, 1, \cdots, m-k-1$，$\lambda_1(x'), \cdots, \lambda_k(x')$ を $P$ の $(0, x') \in N$ における特性指数と呼ぶ．

$\mathring{x} \in N$ の近傍で定義されたhyperfunction $u(x)$ が，$(\mathring{x}, \pm\sqrt{-1}\,dx_1) \notin S.S.(u)$（$u$ の特異スペクトル）をみたすとき，$u$ は $x_1$ を実解析パラメータに持つといい，このとき，$u$ の $N$ への制限（初期値）$u|_N(x') = u(0, x')$ が自然に定義される．

<u>定理1.</u> $\lambda_j(\mathring{x}) \notin \{\nu \in \mathbb{Z};\ \nu \geqq m-k\}$ $({}^{\forall} j = 1, \cdots, k)$ を仮定する．このとき，$\mathring{x}$ の近傍で定義されたhyperfunction $u(x)$が

$$\begin{cases} P u(x) = 0 & (\mathring{x}\text{の近傍で}), \\ S.S.(u) \not\ni (\mathring{x}, \pm\sqrt{-1}\,dx_1), & \\ D_1^j u(0, x') = 0 & (\mathring{x}\text{の近傍で}) \text{ for } 0 \leqq {}^{\forall} j \leqq m-k-1 \end{cases}$$

をみたせば，$\mathring{x}$ の（$M$ における）近傍で $u(x) = 0$．

（注意）$k = 0$，即ち $N$ が $P$ に関して非特性的な場合には，特性指数及び特異スペクトルに関する条件は不要であり，この場合には，通常の（hyperfunctionに対する）Holmgrenの一意性

定理に他ならない．また，$k=m$ の場合には $u$ の初期値に関する条件は不要であり，最初の2条件から $u=0$ が従う．なお，$P$ が弱双曲型であるときには，定理1は田原氏により証明されている（cf. [6]）．

本稿では，定理1を超局所化した定理を示す．

$\rho : \sqrt{-1}T^*M|_N \longrightarrow \sqrt{-1}T^*N$ を $\rho(0,x';\sqrt{-1}\langle\xi,dx\rangle) = (x',\sqrt{-1}\langle\xi',dx'\rangle)$ により定義する．（ここで，$\xi=(\xi_1,\xi')$，$\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$．）　$\mathring{x}^* \in \sqrt{-1}T^*N \setminus N$ を固定し，$\rho^{-1}(\mathring{x}^*)$ の近傍で定義された解析的擬微分作用素

$$P = x_1^k D_1^m + A_1(x,D')x_1^{k-1}D_1^{m-1} + \cdots + A_k(x,D')D_1^{m-k} + A_{k+1}(x,D')D_1^{m-k-1} + \cdots + A_m(x,D')$$

で，前の条件 (i)～(iii) をみたすものを考察しよう．$a_j(x',\xi')$ を $A_j(0,x',D')$ の0階のシンボルとする（$j=1,\cdots,k$）．（この場合には $A_j(0,x',D')$ は高々0階の擬微分作用素であり，必ずしも函数とは限らない．）前と同様に，決定方程式

$$\lambda(\lambda-1)\cdot\cdots\cdot(\lambda-m+1) + a_1(\mathring{x}^*)\lambda(\lambda-1)\cdot\cdots\cdot(\lambda-m+2) + \cdots + a_k(\mathring{x}^*)\lambda(\lambda-1)\cdot\cdots\cdot(\lambda-m+k+1) = 0$$

の根 $\lambda = 0,\cdots,m-k-1,\ \lambda_1(\mathring{x}^*),\cdots,\lambda_k(\mathring{x}^*)$ を $\mathring{x}^*$ における $P$ の特性指数と呼ぶ．

$\mathcal{C}_M$，$\mathcal{C}_N$ をそれぞれ $\sqrt{-1}T^*M$，$\sqrt{-1}T^*N$ 上定義されたマイクロ函数の層とする．$\sqrt{-1}T^*N$ 上の層 $\rho_!(\mathcal{C}_M)$ はいわば，$x_1$

を実解析パラメータに持つマイクロ函数の層である．具体的には，$\rho_!(\mathcal{C}_M)$ の $\mathring{x}^* = (\mathring{x}, \sqrt{-1}\langle \mathring{\xi}', dx' \rangle)$ における stalk は次のように表わされる：

$$\rho_!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*} = \{ u(x) \in \mathcal{C}_M ( \rho^{-1}(\{ (x', \sqrt{-1}\langle \xi', dx' \rangle) \in \sqrt{-1}T^*N ;$$
$$|x' - \mathring{x}| < {}^{\exists}\varepsilon, \ |\xi' - \mathring{\xi}'| < {}^{\exists}\varepsilon \})) ; \ \mathrm{supp}\, u(x) \subset \{ |\xi_1| \leqq {}^{\exists}M \} \}.$$

$u(x) \in \rho_!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ に対して，制限（初期値）$u(0, x') \in (\mathcal{C}_N)_{\mathring{x}^*}$ が自然に定義される．さて，$P$ を上のような (i) ~ (iii) をみたす解析的擬微分作用素（Fuchs型作用素）とするとき，次の結果を得る．

<u>定理 2.</u> $\lambda_j(\mathring{x}^*) \notin \{ \nu \in \mathbb{Z} ; \nu \geqq m - k \}$ $(1 \leqq {}^{\forall}j \leqq k)$ を仮定する．このとき，$u(x) \in \rho_!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ が $\mathring{x}^*$ の近傍で $Pu = 0$ かつ $D_1^j u(0, x') = 0$ for $0 \leqq {}^{\forall}j \leqq m - k - 1$ をみたせば，$\mathring{x}^*$ の近傍で $u(x) = 0$ が成立する．

定理 1 は定理 2 及び Fuchs型偏微分作用素に対する Cauchy-Kovalevskaja型定理（cf. [1]）から直ちに従うので，以下では定理 2 の証明（の概略）を述べる．我々は，片岡氏により開発された超局所境界値問題の手法（特に層 $\mathcal{C}_{M+|X}$ と量子化された Legendre 変換の理論）を応用して定理 2 を証明する．なお，少くとも定理 1 に関しては，解析汎函数を用いたより初等的な証明が可能であることが筆者により見出されたが，それを推し進めて定理 2 のより初等的な別証を与えることには

まだ成功していない．また，定理1，2を境界値問題（すなわち $x_1>0$ の側だけで定義された解を考える）の場合に拡張することも可能であろう．実際，$x_1>0$ で定義された hyperfunction $u(x)$ で適当な意味で自然な境界値 $u(+0,x')$ を持つような hyperfunction のクラス（F-mild hyperfunction）の中で Fuchs型偏微分作用素に対する境界値問題の解は一意であることが示される．

§2. 定理2の証明. いくつかの段階に分けて証明を行なう．

1° $k=m$ の場合への帰着: $u(x)\in\rho_!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ が $Pu=0$ かつ $D_1^j u(0,x')=0$ $(0\leqq {}^\forall j\leqq m-k-1)$ をみたすとすると，ある $v(x)\in\rho_!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ が存在して，$u(x)=x_1^{m-k}v(x)$ と書け，$v(x)$ は $(Px_1^{m-k})v(x)=0$ をみたす．$Px_1^{m-k}$ は weight 0 の Fuchs型擬微分作用素で，その特性指数は $-(m-k),\ -(m-k)+1,\ \cdots,\ -1,\ \lambda_1(\mathring{x}^*)-(m-k),\ \cdots,\ \lambda_k(\mathring{x}^*)-(m-k)$ であり非負整数値をとらないことが容易にわかる．従って $k=m$ の場合に定理2を証明すれば十分．

2° 以下では $k=m$ とする．このとき，$P$ は次の様に書ける:

$$P=(x_1D_1)^m-A_1(x,D')(x_1D_1)^{m-1}-\cdots-A_m(x,D');$$

ここで，order $A_j(x,D')\leqq j$，order $A_j(0,x')\leqq 0$ $(1\leqq j\leqq m)$．

$P$ の決定多項式 $e(\lambda)=\lambda^m-\sigma_0(A_1(0,x',D'))(\mathring{x}^*)\lambda^{m-1}-\cdots-\sigma_0(A_m(0,x',D'))(\mathring{x}^*)$ は $e(\lambda)\neq 0$ for $\lambda=0,1,$

$2, \cdots$ をみたす．今 $\ell \in \mathbb{N}$ を，$\ell \geqq m$ かつ $e(\frac{1}{\ell}\lambda) \neq 0$ for $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$ がみたされるようにとり固定し，$x_1 = t^\ell$ という変換を行なうと，$Pu(x) = 0$ $(u \in \mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*})$から

$\left\{ (\frac{1}{\ell} t D_t)^m - A_1(t^\ell, x', D')(\frac{1}{\ell} t D_t)^{m-1} - \cdots - A_m(t^\ell, x', D') \right\} u(t^\ell, x') = 0$ が従う．次の補題により，$u(t^\ell, x') \in p!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ は well-defined であり，$u(t^\ell, x') = 0$ から $u(x) = 0$ が従うことがわかるから，結局次のような作用素に対して定理2を証明すればよい．

(*) $P = (x_1 D_1)^m - A_1(x, D')(x_1 D_1)^{m-1} - \cdots - A_m(x, D')$;

ここで，$A_j(x, D') = \sum_{k=0}^{j} x_1^k A_{j,k}(x, D')$，order $A_{j,k} \leqq k$ $(0 \leqq k \leqq j)$ と書ける．

補題　$\ell \in \mathbb{N}$ 及び $\mathring{x}^* \in \sqrt{-1}T^*N \setminus N$ を固定する．$u(x) \in p!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ に対して，$u(x_1^\ell, x') \in p!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ が自然に定義され，しかも準同型 $p!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*} \ni u(x) \mapsto u(x_1^\ell, x') \in p!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ は単射である．

（証明）まず，$u(x_1^\ell, x')$ が well-defined であることを示す．$u(x) \in p!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$，$\mathring{x}^* = (0, \sqrt{-1}dx_n)$ とすると，$\Gamma = \{ y' = (y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} ; |y_j| < r y_n \ (j = 2, \cdots, n-1) \}$ $(\forall r > 0)$ に対して，$\{ z \in \mathbb{C}^n ; |z| < \varepsilon, |y_1| < \varepsilon |y'|, y' \in \Gamma \}$ $(\exists \varepsilon > 0)$ で整型な $F(z)$ が存在して，$u(x) = sp(F(x_1, x' + \sqrt{-1}\Gamma 0))$ と表わされる（$sp$ はスペクトル写像を表わす）．$F(z_1^\ell, z')$

は $\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z|<{}^{\exists}\delta,\ y_1=0,\ y'\in\Gamma\}$ で整型（$z_j=x_j+\sqrt{-1}y_j$ とおいた）だから局所Bochnerの定理により，${}^{\exists}\delta'$ に対して，$F(z_1^\ell, z')$ は $\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z|<\delta',\ |y_1|<\delta'|y'|,\ |y_j|<(r-\delta')y_n\ (j=2,\cdots,n-1)\}$ で整型だから，$F(x_1^\ell, x'+\sqrt{-1}\Gamma 0)$ は hyperfunction として意味を持つ．そこで，$u(x_1^\ell, x')=sp(F(x_1^\ell, x'+\sqrt{-1}\Gamma 0))$ とおこう．これが定義函数 $F(z)$ の選び方によらぬことを示すために，上の $F$ が $\rho^{-1}(\mathring{x}^*)$ の近傍で $sp(F(x_1, x'+\sqrt{-1}\Gamma 0))=0$ をみたすと仮定しよう．このとき $\mathbb{R}^{n-1}$ の（0を頂点とする）開凸錐 $\Gamma_j$ $(j=1,\cdots,N)$ で $\Gamma_j^\circ=\{\xi'\in\mathbb{R}^{n-1};\ \langle y',\xi'\rangle>0 \text{ for } {}^\forall y'\in\Gamma_j\}\not\ni(0,\cdots,0,1)$ なるものと，十分小さな $\varepsilon$ に対して $\{|z|<\varepsilon,\ |y_1|<\varepsilon|y'|,\ y'\in\Gamma_j\}$ で整型な $F_j(z)$ が存在して共通の定義域で（$\Gamma_j$ の開きを十分大きくとり，$\Gamma\cap\bigcap_{j=1}^N\Gamma_j\neq\phi$ としておく）

$$F(z)=\sum_{j=1}^N F_j(z)$$

が成立する．局所Bochnerの定理により，$\rho^{-1}(0;\sqrt{-1}dx_n)\cap S.S.(F_j(x_1^\ell, x'+\sqrt{-1}\Gamma_j 0))=\phi$ がわかるから，$\rho_!(\mathscr{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ の元として $sp(F(x_1^\ell, x'+\sqrt{-1}\Gamma 0))=0$ となる．

次に $u(x_1^\ell, x')=0$ (in $\rho_!(\mathscr{C}_M)_{\mathring{x}^*}$) から $u(x)=0$ が従うことを証明しよう．$\mathbb{R}^{n-1}$ の開凸錐 $\Gamma$ に対して，$D(\varepsilon,\Gamma)=\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z|<\varepsilon,\ |y_1|<\varepsilon|y'|,\ y'\in\Gamma\}$ とおく．$r>0$ を十分小さくとり，$\Gamma=\{y'\in\mathbb{R}^{n-1};\ |y_j|<r^{-1}y_n\ (2\leq j\leq n-1)\}$

とおくと，$D(r,\Gamma)$ で整型な $F(z)$ が存在して，

$$u(x) = sp\left(F(x_1, x'+\sqrt{-1}\Gamma 0)\right)$$

と表示される．今 $u(x_1^\ell, x') = 0$ $(\text{in } \mathcal{P}!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*})$ を仮定しよう。このとき $\mathbb{R}^{n-1}$ の開凸錐 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_N$ を適当に選ぶと，$\Gamma_j \ni (0,\cdots,0,1)$，$\Gamma_j^\circ \not\ni (0,\cdots,0,1)$ $(j=1,\cdots,N)$ が成り立ち，ある $\varepsilon > 0$ に対して $D(\varepsilon, \Gamma_j)$ で整型な $F_j(z)$ が存在して，共通の定義域で

$$F(z_1^\ell, z') = F_1(z) + \cdots + F_N(z)$$

が成立する．$F_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\ell-1} F_{j,\nu}(z_1^\ell, z')z_1^\nu$ と一意的に分解できる。ここで各 $F_{j,\nu}(z_1^\ell, z')$ は $\{z \in \mathbb{C}^n ; |z| < \varepsilon, |z_1| < \varepsilon|y'|, y' \in \Gamma_j\} = D^\circ(\varepsilon, \Gamma_j)$ で整型である．特に $D^\circ(\varepsilon, \Gamma \cap \Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_N)$ において，

$$(1) \qquad F(z) = F_{1,0}(z) + \cdots + F_{N,0}(z)$$

が成立する．さて，$z' = (z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$，$\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$，$|\xi'| = 1$ に対して，

$$K(z',\xi') = \frac{(n-2)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \frac{(1-\sqrt{-1}\langle z',\xi'\rangle)^{n-3}\{1-\sqrt{-1}\langle z',\xi'\rangle - (z'^2 - \langle z',\xi'\rangle^2)\}}{\{\langle z',\xi'\rangle + \sqrt{-1}(z'^2 - \langle z',\xi'\rangle^2)\}^{n-1}}$$

とおき，$\mathring{y}_n > 0$ を十分小さくとって，$\mathring{y}' = (0,\cdots,0,\mathring{y}_n)$，

$$G(z;\xi') = \int_{\substack{|\mathrm{Re}\, w'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \mathrm{Im}\, w' = \mathring{y}'}} K(z'-w',\xi')F(z_1,w')\,dw'$$

とおく．

このとき，整型函数の曲面波展開の公式（[2]）により，

(2) $$F(z) = \int_{S^{n-2}} G(z;\xi')\,d\sigma(\xi') \qquad (z \in D(^{\exists}\varepsilon', \Gamma))$$

が成立する．（$d\sigma(\xi')$ は $S^{n-2} = \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1};\ |\xi'| = 1\}$ の体積要素）（1）により，

$$G(z;\xi') = \sum_{j=1}^{N} \int_{\substack{|\mathrm{Re}\, w'| \le \frac{\varepsilon}{2} \\ \mathrm{Im}\, w' = \mathring{y}'}} K(z'-w', \xi')\, F_{j,0}(z_1, w')\, dw'$$

が成り立つ． $F_{j,0}(z) \in \mathcal{O}(D^{0}(\varepsilon, \Gamma_j))$ に注意すれば，$G(z;\xi')$ は $(z;\xi') = (0;0,\cdots,0,1)$ の近傍で $(z;\xi')$ について解析的であることがわかる．従って (2) から，$\rho^{-1}(\mathring{x}^*) \cap S.S.(F(x_1, x' + \sqrt{-1}\,\Gamma 0)) = \phi$ を得る．これは $\rho!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ において $u(x) = 0$ を意味する．これで補題が証明された．

<u>3°</u> 以上により次のような作用素に対して定理2を証明すればよい．

(*) $$P = (x_1 D_1)^m - A_1(x, D')(x_1 D_1)^{m-1} - \cdots - A_m(x, D');$$

$$A_j(x, D') = \sum_{k=0}^{j} x_1^{k} A_{j,k}(x, D'), \quad \text{order } A_{j,k} \le k.$$

$u(x) \in \rho!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ が $Pu(x) = 0$ をみたすとする．このとき，$Y$ を Heaviside 函数として，$Y(x_1)u(x)$ がマイクロ函数として（$\rho^{-1}(\mathring{x}^*)$ の近傍で）well-defined であり，

$$(3) \qquad P(x, D)\,(Y(x_1)\,u(x)) = 0$$

が成立する．[2, 3]により $Y(x_1)u(x)$ は $\mathcal{C}_{M+1X}$ の section とみなされ，量子化 Legendre 変換 $\beta$ により，$\beta\,(Y(x_1)\,u(x))$ は $U_\varepsilon = \{(\zeta, x', \sqrt{-1}\langle\xi', dx'\rangle) \in \mathbb{C} \times \sqrt{-1}\,T^*N\ ;\ \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| > \varepsilon^{-1}|\xi'|$ or $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$, $|x'| < \varepsilon$, $|\xi_j| < \varepsilon\,\xi_n$ $(j = 2, \cdots, n-1)\}$

上で定義された $\zeta$ を整型パラメータに持つマイクロ函数となる。更に $\beta$ は次のように operator の変換を引き起こす．

$$\begin{cases} \beta \circ D_{x_1} \circ \beta^{-1} = -\sqrt{-1}\,\zeta\, D_{x_n}\,, \\ \beta \circ D_{x_j} \circ \beta^{-1} = D_{x_j} \qquad (2 \leqq j \leqq n), \\ \beta \circ x_1 \circ \beta^{-1} = -\sqrt{-1}\, D_\zeta D_{x_n}^{-1} \\ \beta \circ x_j \circ \beta^{-1} = x_j \qquad (2 \leqq j \leqq n-1), \\ \beta \circ x_n \circ \beta^{-1} = x_n + D_\zeta\, \zeta\, D_{x_n}^{-1} \ . \end{cases}$$

$$\beta \circ A_j \circ \beta^{-1} = \tilde{A}_j \qquad (j = 1, \cdots, m)\ ,$$

$$v(\zeta, x') = \beta\left( Y(x_1) \begin{pmatrix} u(x) \\ x_1 D_1 u(x) \\ \vdots \\ (x_1 D_1)^{m-1} u(x) \end{pmatrix} \right),$$

$$Q = -D_\zeta\, \zeta\, I_m - \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \tilde{A}_m & \cdots & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$U_\varepsilon$ において，

$$(4) \qquad Q(\zeta, x', D_\zeta, D_{x'})\, v(\zeta, x') = 0$$

が成立する。以下では、$D_{x_j} = D_j$，$x'' = (x_2, \cdots, x_{n-1})$ と略記する。さて，

$$B(x, D_{x'}) \underset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ A_m & \cdots & A_2 & A_1 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(x', D_{x'})\, x_1^{\,j},$$

$$B_j(x', D_{x'}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{j\nu}(x'', D_{x'})\, x_n^{\nu}$$

と展開しておくと（order $B_{j\nu} \leq \min(j, m)$ に注意）

$$Q = -D_\zeta \zeta I_m - \sum_{j,\nu\geq 0} B_{j\nu}(x'', D_{x'})\,(x_n + D_\zeta \zeta D_n^{-1})^{\nu} \cdot (-\sqrt{-1}\, D_\zeta D_n^{-1})^{j}$$

と書ける。ここで別の作用素 $Q'$ を

$$Q' = -D_\zeta \zeta I_m - \sum_{j,\nu\geq 0} B_{j\nu}(x'', D_{x'})\,(x_n + D_\zeta \zeta D_n^{-1})^{\nu} \cdot (-\sqrt{-1}\, D_n^{-1} \zeta^{-1})^{j}$$

により定義する。$\zeta = \tau^{-1}$ とおくと，

$$Q' = (\tau D_\tau - 1) I_m - \sum_{j,\nu\geq 0} B_{j\nu}(x'', D_{x'})\,\big(x_n + (1-\tau D_\tau) D_n^{-1}\big)^{\nu} \cdot (-\sqrt{-1}\, D_n^{-1} \tau)^{j}$$

と書け，order$\big(B_{j,\nu}(x'', D_{x'})(x_n + (1-\tau D_\tau)D_n^{-1})^{\nu}(-\sqrt{-1}\,D_n^{-1}\tau)^{j}\big)$ $\leq \min(0, m-j)$ だから，$Q'$ は [5] の意味で $\{\tau = 0$ or $D_\tau = 0\}$ に沿って確定特異点型である。$\mathring{x}^* = (0, \sqrt{-1}\, dx_n)$ での特性指数は，（$P$ の特性指数を $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ $(\neq 0, 1, 2, \cdots)$ とおくと）$\lambda_1 + 1, \cdots, \lambda_m + 1$ である。[5] の議論により，$|\tau| \ll 1$，$|D_\tau| \ll 1$，$|(x'; \sqrt{-1}\,\xi') - (0; 0, \cdots, \sqrt{-1})| \ll 1$

で定義された高々0階の擬微分作用素の $m \times m$ 行列 $S(\tau, x', D_{x'})$ , $S'(\tau, x', D_\tau, D_{x'})$ , $B'(\tau, x', D_{x'})$ で $\sigma_0(S)(\mathring{x}^*)$, $\sigma_0(S')(\mathring{x}^*)$ は可逆かつ

(5) $Q' = S'(\tau D_\tau I_m - B'(\tau, x', D_{x'}))S^{-1}$,

$$B'_{ij}(\tau, x', D_{x'}) = \begin{cases} {}^\exists B''_{ij}(x', D_{x'})\,\tau^{\lambda_i - \lambda_j} & \text{if } \lambda_i - \lambda_j = 0, 1, 2, \cdots, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$\sigma_0(B')(\mathring{x}^*) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m + 1 \end{pmatrix}$$

なるものを逐次近似により構成できる. 重複を込めて

$$\{\lambda_1 + 1, \cdots, \lambda_m + 1\} = \bigsqcup_{s=1}^{r} \{\mu_s + n_{s,i} \; ; \; i = 1, \cdots, m_s\},$$

$$n_{s,i} \in \mathbb{Z}, \quad 0 = n_{s,1} \leqq n_{s,2} \leqq \cdots \leqq n_{s,m_s},$$

$$\mu_s - \mu_{s'} \notin \mathbb{Z} \text{ if } s \neq s', \quad \mu_1 \in \mathbb{Z} \ (\mu_1 \leqq 0),$$

とおく. 特性指数の仮定により, もし $m_1 > 0$ ならば, $\mu_1$ は0以下の整数である. この特性指数の分割に応じて,

$$B' = B'_1 \oplus \cdots \oplus B'_r = \begin{pmatrix} \boxed{B'_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{B'_r} \end{pmatrix}$$

と直和分解できる. ( $B'_s$ は $m_s \times m_s$ 行列. ) ここで,

$$(B'_s)_{ij} = \begin{cases} {}^\exists (B''_s)_{ij}(x', D_{x'})\,\tau^{n_{s,i} - n_{s,j}} & \text{if } n_{s,i} \geqq n_{s,j} \\ 0 & \text{if } n_{s,i} < n_{s,j}. \end{cases}$$

ここで，$m \times m$ 行列 $T = T(\tau)$ 及び $E = E(x', D_{x'})$ を

$$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r, \quad T_s = \begin{pmatrix} \tau^{n_{s,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tau^{n_{s,m_s}} \end{pmatrix},$$

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r,$$

$$(E_s)_{ij} = \begin{cases} (B''_s)_{ij}(x', D') - \delta_{ij} n_{s,i} & \text{if } n_{s,i} \geqq n_{s,j} \\ 0 & \text{if } n_{s,i} < n_{s,j} \end{cases}$$

により定義すると，

$$(6) \quad T^{-1}(\tau D_\tau I_m - B'(\tau, x', D_{x'}))T = \tau D_\tau I_m - E(x', D_{x'})$$

が成立し，$\sigma_0(E_s)(\mathring{x}^*)$ の固有値はすべて $\mu_s$ である。

(5) と (6) から次を得る：

$$(7) \quad Q' = S' T (\tau D_\tau I_m - E(x', D_{x'}))T^{-1} S^{-1}.$$

さて，

$$S(\tau, x', D_{x'})T(\tau) = \tilde{S}(\tau, x', D_{x'}) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{S}_j(x', D_{x'})\tau^j$$

により $\tilde{S}$ 及び $\tilde{S}_j$ を定義すると (7) から

$$\begin{aligned} &Q'(\tau, x', \partial_\tau, D_{x'})(\tilde{S}(\tau, x', D_{x'})\tau^{E(x', D_{x'})}) \\ &= S'(\tau, x', \partial_\tau, D_{x'})T(\tau)(\tau\partial_\tau I_m - E(x', D_{x'}))(\tau^{E(x', D_{x'})}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る．但しここで，$\partial_\tau F(\tau, x', D_{x'}) = [D_\tau, F(\tau, x', D_{x'})]$ により $\partial_\tau$ は $\tau$ を整型パラメータとする作用素に作用する．

変数τを $\zeta\ (=\tau^{-1})$ に戻して

(8) $\quad Q'(\zeta, x', \partial_\zeta, D_{x'})\left(\tilde{S}(\zeta^{-1}, x', D_{x'})\,\zeta^{-E(x', D_{x'})}\right) = 0$

を得る．さて，$Q$ と $Q'$ は共通の $Q_{j,\nu}$ により

$$\begin{cases} Q = \sum_{j,\nu\geq 0} Q_{j,\nu}(x', D_{x'})\,(\zeta D_\zeta)^\nu D_\zeta^j, \\ Q' = \sum_{j,\nu\geq 0} Q_{j,\nu}(x', D_{x'})\,(\zeta D_\zeta)^\nu \zeta^{-j} \end{cases}$$

という形に展開できる．(8) は

(9) $\quad \sum_{\nu\geq 0} Q_{0,\nu}\tilde{S}_j(-E-j)^\nu = -\sum_{k=1}^{j}\sum_{\mu\geq 0} Q_{k,\mu}\tilde{S}_{j-k}(-E-j)^\mu$

$\quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$

と同値である（両辺の $\nu$ 及び $\mu$ に関する和は収束する）．

τについての形式的巾級数 $\tilde{R}(\tau, x', D_{x'})$ を

$$\begin{cases} \tilde{R}(\tau, x', D_{x'}) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{R}_j(x', D_{x'})\,\tau^j, \\ \tilde{R}_j(x', D_{x'}) = \tilde{S}_j(x', D_{x'})(-E)\cdot\cdots\cdot(-E-j+1) \end{cases}$$

により定義すると，(9) から

$$\sum_{\nu\geq 0} Q_{0,\nu}\tilde{R}_j(-E-j)^\nu$$
$$= -\sum_{k=1}^{j}\sum_{\mu\geq 0} Q_{k,\mu}\tilde{R}_{j-k}(-E-j)^\mu(-E-j+1)\cdots(-E-j+k)$$

$(j = 0, 1, 2, \cdots)$ を得る．これは $\zeta^{-1}$ の形式巾級数として

(10) $\quad Q(\zeta, x', \partial_\zeta, D_{x'})\left(\tilde{R}(\zeta^{-1}, x', D_{x'})\,\zeta^{-E(x', D_{x'})}\right) = 0$

が成立することと同値である．（$Q$ の形から $Q$ は $\zeta^{-1}$ の形式

巾級数に作用することがわかる.)

さて, $\widetilde{R}(\tau, x', D_{x'})$ が $|\tau| \ll 1$ で収束することを示そう.

$$\widetilde{P} = \beta \circ P \circ \beta^{-1} = (-D_\zeta \zeta)^m - \widetilde{A}_1 (-D_\zeta \zeta)^{m-1} - \cdots - \widetilde{A}_m,$$

$$\widetilde{R}(\tau, x', D_{x'}) \tau^{E(x', D_{x'})} = F(\tau, x', D_{x'}) = (F_{ij}(\tau, x', D_{x'}))$$

とおくと (10) から

$$(11) \begin{cases} \widetilde{P}(\zeta, x', \partial_\zeta, D_{x'}) F_{1j}(\zeta^{-1}, x', D_{x'}) = 0 & (1 \leqq j \leqq m), \\ F_{ij}(\zeta^{-1}, x', D_{x'}) = (-\partial_\zeta \zeta)^i F_{1j}(\zeta^{-1}, x', D_{x'}) & (1 \leqq i, j \leqq m) \end{cases}$$

を得る.

$$A_{jk}(x, D_{x'}) = \sum_{\mu, \nu \geqq 0} A_{jk\mu\nu}(x'', D_{x'}) x_n^\nu x_1^\mu$$

と展開すると,

$$\widetilde{A}_j = \sum_{k=0}^{j} \sum_{\mu, \nu \geqq 0} A_{jk\mu\nu}(x'', D_{x'}) (x_n + D_\zeta \zeta D_n^{-1})^\nu (-\sqrt{-1} D_\zeta D_n^{-1})^{k+\mu}$$

と書ける. $\tau = \zeta^{-1}$ として,

$$C_{j,k} = \sum_{\mu, \nu \geqq 0} A_{jk\mu\nu}(x'', D_{x'}) (x_n + (1 - \tau D_\tau) D_n^{-1})^\nu \cdot (\sqrt{-1} \tau^2 D_\tau D_n^{-1})^\mu (\sqrt{-1} D_n^{-1})^k$$

$(1 \leqq k \leqq j \leqq m)$ とおくと, order $C_{j,k} \leqq 0$ で

$$\widetilde{P} = (\tau D_\tau - 1)^m - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{j} C_{j,k}(\tau, x', D_\tau, D_{x'}) (\tau^2 D_\tau)^k (\tau D_\tau - 1)^{m-j}$$

と書ける. 従って, $|\tau| \ll 1$, $|D_\tau| \ll 1$ で定義された擬微分作用素 $V(\tau, x', D_\tau, D_{x'})$, $C_j(\tau, x', D_\tau, D_{x'})$ $(j = 1, \cdots, m)$ で, $V$ は可逆, $C_j$ は高々 0 階で

$$\widetilde{P} = V\left((\tau D_\tau - 1)^m - C_1 (\tau D_\tau - 1)^{m-1} - \cdots - C_m\right)$$

なるものが存在する. これと (11) により,

$$C(\tau, x', D_\tau, D_{x'}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ C_m & \cdots & C_2 & C_1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

(12) $\quad \bigl((\tau\partial_\tau - 1)I_m - C(\tau, x', \partial_\tau, D_{x'})\bigr) F(\tau, x', D_{x'}) = 0$

を得る．再び [5] の議論を用いると，$|\tau| \ll 1$, $|D_\tau| \ll 1$ で定義された高々 0 階の擬微分作用素の $m \times m$ 行列 $V'(\tau, x', D_\tau, D_{x'})$ 及び $C'(\tau, x', D_{x'})$ で $V'$ は可逆かつ

(13) $\quad (\tau D_\tau - 1)I_m - C(\tau, x', D_\tau, D_{x'}) = V'(\tau, x', D_\tau, D_{x'})$

$$\cdot \bigl((\tau D_\tau - 1) I_m - C'(\tau, x', D_{x'})\bigr)$$

なるものを構成できる．これと (12) から

(14) $\quad \bigl((\tau\partial_\tau - 1)I_m - C'(\tau, x', D_{x'})\bigr) F(\tau, x', D_{x'}) = 0$

を得る．これから容易に $\tilde{R}(\tau, x', D_{x'})$ は $|\tau| \ll 1$ で収束することがわかる．

次に $\tilde{R}(\tau, x', D_{x'})$ は $0 < |\tau| \ll 1$ で可逆であることを示そう。そのために $R(\tau, x', D_{x'})$ 及び $R_j(x', D_{x'})$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ を

$$R(\tau, x', D_{x'}) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(x', D_{x'})\tau^j = \tilde{R}(\tau, x', D_{x'})\, T(\tau)^{-1}$$

により定義すると，簡単な計算により，

$$\det(\sigma_0(R_0)(\dot{x}^*)) = \det(\sigma_0(S_0)(\dot{x}^*)) \prod_{s=1}^{r} \prod_{k=1}^{m_s} \underbrace{(-\mu_s) \cdot \cdots \cdot (-\mu_s - n_{s,k} + 1)}_{n_{s,k}\text{個}}$$

を得る．$\det(\sigma_0(S_0)(\dot{x}^*)) \neq 0$, $\mu_s \notin \mathbb{Z}$ for $s \geq 2$,

$$\mu_1 = \mu_1 + n_{1,1} \leq \mu_1 + n_{1,2} \leq \cdots \leq \mu_1 + n_{1,m_1} \leq 0$$

であったから $\det(\sigma_0(R_0)(x^*)) \neq 0$ であり，$R(\tau, x', D_{x'})$ は $|\tau| \ll 1$ で可逆であり，従って $\tilde{R}(\tau, x', D_{x'})$ は $0<|\tau|\ll 1$ で可逆である．

さて，(4)と(13)から，$\varepsilon > 0$ を十分小さく取り直せば $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \{0<|\tau|<\varepsilon\}$ で

(15) $\quad (\tau D_\tau I_m - C'(\tau, x', D_{x'}))\, v(\tau^{-1}, x') = 0$

が成り立つ．一方 (14)により

$$(\tau D_\tau I_m - C'(\tau, x', D_{x'}))\tilde{R}(\tau, x', D_{x'})\,\tau^{E(x', D_{x'})}$$
$$= \tilde{R}(\tau, x', D_{x'})\,\tau^{E(x', D_{x'})}\,\tau D_\tau$$

だから，$\mathcal{V}_\varepsilon \cap \{0<|\tau|<\varepsilon\}$ において

$$0 = (\tau D_\tau I_m - C'(\tau, x', D_{x'}))\, v(\tau^{-1}, x')$$
$$= \tilde{R}(\tau, x', D_{x'})\tau^{E(x', D_{x'})}\,\tau D_\tau\,(\tilde{R}(\tau, x', D_{x'})\tau^{E(x', D_{x'})})^{-1} v(\tau^{-1}, x')$$

即ち，

$$D_\tau\Big((\tilde{R}(\tau, x', D_{x'})\,\tau^{E(x', D_{x'})})^{-1}\, v(\tau^{-1}, x')\Big) = 0$$

を得る．従って，$\mathcal{V}_\varepsilon' = \{(x', \sqrt{-1}\langle\xi', dx'\rangle) \in \sqrt{-1}T^*N\,;\, |x'|<\varepsilon,\ |\xi_j| < \varepsilon\xi_n\ (j=2,\cdots,n-1)\}$ 上で定義された $m$ 個のマイクロ函数からなる縦ベクトル $a(x')$ が存在して，$0<|\tau|<\varepsilon$ で

$$v(\tau^{-1}, x') = \tilde{R}(\tau, x', D_{x'})\,\tau^{E(x', D_{x'})}\, a(x')$$

が成立する．$v(\tau^{-1}, x')$ は $\tau$ について一価だから，$\tau^{E(x', D_{x'})}a(x')$ も一価であり，

$$(e^{2\pi\sqrt{-1}E(x', D_{x'})} - I_m)\, a(x') = 0$$

でなければならない．

$$a(x') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_1(x') \\ \vdots \\ a_r(x') \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} ]m_1 \\ \vdots \\ ]m_r \end{array}$$

と分割すると

$$(e^{2\pi\sqrt{-1}E_s(x', D_{x'})} - I_{m_s})a_s(x') = 0 \qquad (1 \leqq s \leqq r)$$

が成り立ち，$2 \leqq s \leqq r$ のときは $e^{2\pi\sqrt{-1}E_s} - I_{m_s}$ は可逆だから $a_s(x') = 0 \quad (2 \leqq s \leqq r)$ がわかる．また $\sigma_0(E_1)(\mathring{x}^*)$ の固有値はすべて $\mu_1$（0以下の整数）であったから

(16) $\quad (E_1(x', D_{x'}) - \mu_1 I_{m_1})a_1(x') = 0$

を得る．これから

$$\tau^{E_1(x', D_{x'})}a_1(x') = \tau^{\mu_1}e^{(E_1-\mu_1)\log\tau}a_1(x') = \tau^{\mu_1}a_1(x')$$

となるから，結局

$$v(\zeta, x') = \sum_{j=0}^{\infty}\tilde{R}_j(x', D_{x'})\zeta^{-j-\mu_1}\begin{pmatrix} a_1(x') \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} ]m_1 \\ ]m-m_1 \end{array}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\tilde{S}_j(-E)\cdots\cdot(-E-j+1)\zeta^{-j-\mu_1}\begin{pmatrix} a_1(x') \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{0 \leqq j \leqq -\mu_1}\tilde{S}_j(-E)\cdots\cdot(-E-j+1)\zeta^{-j-\mu_1}\begin{pmatrix} a_1(x') \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る．（ここで (16) を用いた．）特に $v(\zeta, x')$ の各成分は $(\zeta, x', \sqrt{-1}\xi') \in \mathbb{C} \times U'_\varepsilon$ で定義された $\zeta$ を整型パラメータとするマイクロ函数に接続される．これはもとの $Y(x_1)u(x)$

が $\tau^{-1}(\mathring{x}^*)$ の近傍で定義された $\mathcal{C}_{N|X}$ の section であることを意味する. ここで, $\tau : T_N^*X \longrightarrow \sqrt{-1}\,T^*N$ は $\tau(0, x'; \xi, \sqrt{-1}\,\xi') = (x', \sqrt{-1}\,\xi')$ により定義される. 以上と全く同様の議論を $Y(-x_1)u(x)$ (今度は $\mathcal{C}_{M-|X}$ の section とみなされる) に対して適用すれば, 結局 $u(x) = Y(x_1)u(x) + Y(-x_1)u(x)$ は $\tau^{-1}(\mathring{x}^*)$ の近傍で定義された $\mathcal{C}_{N|X}$ の section であることがわかる. 一方 $u(x) \in \rho!(\mathcal{C}_M)_{\mathring{x}^*}$ であったから $\mathcal{C}_{N|X}$ の section として $u(x)$ の support は $\xi$ についてコンパクトである. $\mathcal{C}_{N|X}$ の section は $\tau$ の fiber (即ち $\xi$) について一意接続性を持つから以上のことから $u(x) = 0$ を得る. これで定理2が証明された.

## References

[1] M.S. Baouendi and C. Goulaouic: Cauchy problems with characteristic initial hypersurface. Comm. Pure Appl. Math. 26, 455-475 (1973).

[2] K. Kataoka: On the theory of Radon transformations of hyperfunctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28, 331-413 (1981).

[3] K. Kataoka: Micro-local theory of boundary value poblems I. Ibid. 27, 355-399 (1980).

[4] T. Ôaku: The Cauchy-Kovalevskaja theorem for pseudo-differential operators of Fuchsian type and its applications. Sûrikaiseki-kenkyûsho Kôkyûroku No. 361, pp. 131-150 (1979).

[5] T. Ôaku: A canonical form of a system of microdifferential equations with non-involutory characteristics and branching of singularities. Invent. Math. 65, 491-525 (1982).

[6] H. Tahara: Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations. Japan. J. Math. 5, 245-347 (1979).