数理解析研究所講究録
第 508 巻 1983 年 61-66

2階非包合的多重特性作用素に対する特異CAUCHY問題

東大 理　打越敬祐

$(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, y') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ として，2階の偏微分作用素

$$P = \sum_{i+|\alpha| \leq 2} x^{k(i,\alpha)} a_{i\alpha}(x, y) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$$

を扱う。但し，$k(i, \alpha)$ は，$0 \leq g' \leq g-2$ を満たす整数 g, g' によって

$$k(i, \alpha) = \begin{cases} g|\alpha| & i + |\alpha| = 2 \\ g' & i = 0,\ |\alpha| = 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

により定められる整数とする。更に，$a_{i\alpha}$ は原点で正則な函数とし，$a_{2,0}(x, y) \equiv 1$ とする。このような作用素に対し，特異 Cauchy 問題

$$
(SCP)\ \begin{cases} Pu(x,\ y) = 0 \\ \dfrac{\partial^i}{\partial x^i} u(0,\ y) = \mathring{u}_i(y) \qquad\qquad i = 0, 1 \end{cases}
$$

を考察する。但し，$\mathring{u}_i(y)$は十分小さい$R>0$に対し

$$\{ y \in \mathbb{C}^n;\ \ |y_i| < R,\ y_1 \neq 0 \}$$

で定義された多価正則函数で，ある$C>0$に対し

$$|\mathring{u}_i(y)| \leq C \exp \{ C |y_1|^{-(g-1-g')/(g+1)} \}$$

を満たしているとする。

われわれは次の仮定を置く：

<u>仮定</u>　(x, y)の双対変数(ξ, η)に対し，

$$
\begin{aligned}
\sigma_2(P)(x, y, \xi, \eta) &= \sum_{i+|\alpha|=2} x^{k(i,\alpha)} a_{i\alpha}(x, y)\, \xi^i \eta^\alpha \\
&= \sum_{i+|\alpha|=2} x^{g|\alpha|} a_{i\alpha}(x, y)\, \xi^i \eta^\alpha \\
&= 0
\end{aligned}
$$

の根を，$\xi = x^g \lambda_i(x, y, \eta)$，$i = 1, 2$，とするとき，

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad \text{at}\quad x=0,\ y=0,\ \eta=(1, 0, \cdots, 0)$$

このとき，(SCP)の解$u(x, y)$で，$\{x = y_1 = 0\}$を通る2つの特性曲線以外で多価正則なものを構成することができる。正確に述べるため，少し準備をおこなう．

$\varphi_i(x,y)$，$i=1,2$，を

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) - x^{\sigma}\lambda_i(x, y, \nabla_y \varphi_i(x,y)) = 0 \\ \varphi_i(0,y) = y_1 \end{cases}$$

の解とする。$\varphi_i(x,y)$は原点で正則で，逆函数定理により，

$$\varphi_i(x,y) = 0$$

をy_1について解くことができる。その解を，

$$y_1 = \psi_i(x,y')$$

とする。$\omega_{r,\theta} = \omega'_{r,\theta} \cup \omega''_{r,\theta}$ を，

$$\begin{aligned} \omega'_{r,\theta} = \{ (x,y) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n ;\ & |x|<r,\ |y_j|<r,\ 1\le j\le n, \\ & |\arg(y_1 - \psi_i(x,y')) - \theta| < \tfrac{\pi}{2} + r, \\ & i = 1,2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega''_{r,\theta} = \{ (x,y) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n ;\ & |x|<r,\ |y_j|<r,\ 1\le j\le n, \\ & |\arg(y_1 - \psi_i(x,y')) - \theta - \pi| < \tfrac{\pi}{2} + r, \\ & i = 1,2 \} \end{aligned}$$

とする，このとき，次のことがわかる：

<u>定理</u>. $r>0$を十分小とすると，任意の$\theta\in\mathbb{R}$に対し，$\omega_{\theta,r}$で正則な(SCP)の解$u(x,y)$が一意的に存在し，

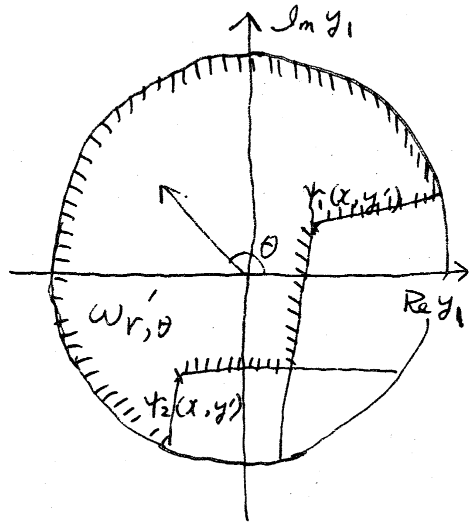
$$|u(x,y)| \leq {}^{\exists}C \sum_{i=1,2} \exp\left\{{}^{\exists}C\,|\varphi_i(x,y)|^{-(q-1-q')/(q+1)}\right\}$$

を満たす。

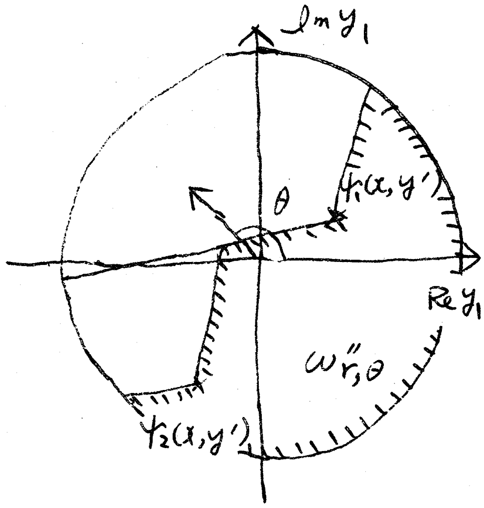
<u>注意</u>. $(x,y')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}$を任意に選んで固定する。$\theta\in\mathbb{R}$を，

$$\theta = \arg(\varphi_1(x,y')-\varphi_2(x,y')) + \frac{\pi}{2}$$

とすれば，右図に見る通り，$\omega_{r,\theta}$は，



$$\omega_r = \{(x,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n;\ |x|<r,\ |y_j|<r,\ 1\leq j\leq n,\ y_1\neq\varphi_i(x,y'),\ i=1,2\}$$



の普遍被覆の領域で，ω_rの全体をおおっている。従って，(SCP)の解$u(x,y)$の，ω_rにおけるひとつの枝が完全に求められたことになる。$\omega_{r,\theta}$の任意の領域で 解を求めることができる

かどうか，今のところはわからない。

<u>注意</u>．より精密には次のことがわかる。θ_0 を，

$$\theta_0 = -\arg\left([\lambda_2(x,y,\eta) - \lambda_1(x,y,\eta)]_{x=0,\, y=0,\, \eta=(1,0,\cdots,0)}\right)$$

とする。任意の $\theta \in \mathbb{R}$，$\ell \in \mathbb{Z}$ に対し，$V^i_{r,\theta,\ell}$，$i = 1, 2$，を，

$$\begin{aligned} V^i_{r,\theta,\ell} = \{ (x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n ;\ & |x| < r,\ |y_j| < r,\ 1 \leq j \leq n, \\ & |(q+1)(\arg x) - (\theta_0 + \pi\ell + \theta) - \tfrac{\pi}{2}| < \tfrac{3}{4}\pi, \\ & |\arg(y_1 - \psi_i(x, y')) - \theta| < \tfrac{\pi}{2} + r \} \end{aligned}$$

で定める。$\omega'_{r,\theta} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} (V^1_{r,\theta,\ell} \cap V^2_{r,\theta,\ell})$ である。このとき，$V^i_{r,\theta,\ell}$ で正則な $u^i_{\theta,\ell}(x, y)$ が存在して，

$$|u^i_{\theta,\ell}(x, y)| \leq {}^{\exists}C \exp\{ {}^{\exists}c\, |y_1 - \psi_i(x, y')|^{-(\sigma-1-q)/(q+1)} \}$$

を満たし，$V^1_{r,\theta,\ell} \cap V^2_{r,\theta,\ell}$ で (SCP) の解 $u(x, y)$ は

$$u = u^1_{\theta,\ell} + u^2_{\theta,\ell}$$

の形で与えられる。同様の分解が $\omega''_{r,\theta}$ でもできる。すなわち，$u(x, y)$ は，$y_1 \neq \psi_1(x, y')$ で正則な函数と，$y_1 \neq \psi_2(x, y')$ で正則な函数の和の形で与えられ，その分解は，$\arg x$ 及び

$\arg(y_1 - y_i^*(x, y'))$, $i = 1, 2$, に依存する。特に、$\arg x$ に対する依存は、常微分方程式論における Stokes 現象によるものである。