数理解析研究所講究録
第508巻 1983年 67-91

大域的実解析解に対する河合氏の存在定理の非有界領域への拡張

東大教養　金子　晃 (Akira KANEKO)

第0節　序

定数係数線型偏微分方程式の大域的実解析解の存在問題は河合[8],*) ヘルマンダー[3]によりもうケリがついたと日本では思われており小生もそう思っていたのであるが、今度イタリアへ行ってみてまだその続きをやっている人達が居ることを発見した。そこで河合氏の論文の解説を頼まれ質問を受けたのを機に表題の如き問題を考えてみた次第である。そのような状況であるから本論に入る前に少し問題の歴史的経過を復習しておこう。

周知のように $P(D):A(\Omega)\longrightarrow A(\Omega)$ の全射性の問題は $A(\Omega)$ の位相線型空間としての構造の難しさの故に永らく手がつかず、漸くヘルマンダー[3]によりフラグメン－リンデレーフ型の原理という付加的構造の導入により一応の決着を見た：

定理 0.1（ヘルマンダー[3]）凸開集合 Ω に対し $P(D)A(\Omega)=A(\Omega)$ となるためには、$P(D)$ の（あるいはその主部 P_m の）

*) 文献表は後続のイタリア語原稿と共通である。

複素特性多様体 $V=N(P)$ （あるいは $N(P_m)$ ）の上で次のようなフラグメンーリンデレーフーヘルマンダーの原理（略してPh－L－Hの原理）が成り立つことが必要かつ十分である：$\forall K \subset\subset \Omega$ に対し $\exists K' \subset\subset \Omega$ と $\delta>0$ が存在して $\mathbb{C}^n$ 上の（あるいはV上の）任意の多重劣調和函数 φ に対し

$$(0.1)\quad \varphi(\zeta) \leqslant H_K(\mathrm{Im}\,\zeta) + \delta|\zeta| \text{ かつ } V \cap \mathbb{R}^n \text{ 上 } \varphi(\xi) \leqslant 0$$

$$\Longrightarrow \varphi(\zeta) \leqslant H_{K'}(\mathrm{Im}\,\zeta) \quad (\text{V の上で})$$

（多重劣調和函数を多様体の上だけで考える定式化はアンドレオッチーナチノビッチによる（ピサ大学講義録）*)。当然のことだが必要条件としてはその方が改良されている。）

一方河合［8］はそれより先、位相線型空間的考察を捨て基本解を用いた古典的な解の表現公式を改良することにより特異性伝播による全く新しい攻略法を開発した：Ω を有界領域とし今簡単のため $P(D)$ を楕円型とすれば $f \in A(\Omega)$ に対し $P(D)u=f$ の一つの解は、f の $\overline{\Omega}$ に台を持つ超函数としての一つの延長 $\tilde{f}$ をとるとき、$\tilde{f} * E|_{\Omega}$ で与えられる。実際、$P(D)$ の基本解 E は原点以外で実解析的なので畳み込みにより $\partial\Omega$ 内の $\tilde{f}$ の特異性は Ω 内に浸み出さないからである。特異性の考察を特異スペクトルの考察で置き換えれば局所双曲型作用素（定義は後で述べる）に対しある種の幾何学的条件を満足する有界領域 Ω の上で $P(D)A(\Omega)=A(\Omega)$ が

*) A.Andreotti & M.Nacinovich: Analytic convexity and the principle of Phragmén-Lindelöf, Quaderni Scuola Norm. Sup. Pisa 1980.

得られる：

定理0.2（河合［8］）$P(D)$は局所双曲型とし各特性方向ξに対しその局所伝播錐をK_ξで表わす。有界領域Ωが

(0.2) $\partial\Omega\times S^{n-1} = X^+ \cup X^-$ 　ここに

$(a,\xi) \in X^\pm \Longrightarrow P_m(\xi) \neq 0$ 又は$(\{a\} \pm K_\xi) \cap \Omega = \phi$（複号同順）

という閉集合による分解を許すならば $P(D)A(\Omega) = A(\Omega)$ が成り立つ。（$P_m(\xi) \neq 0$ のときは $K_\xi = \{0\}$ と規約しておけば条件は後者の一つにまとめられる。）

余談ながら分解(0.2)が成立するためには後述の条件(0.3)（ただしK_ξはもとのPに対する局所伝播錐とする）が必要なことは明白であるが、その条件だけですべての点(a,ξ)を上述のように閉集合により二種に分離できるかどうかは明らかでない。そのため河合［8］はより具体的な十分条件をいくつか与えているが、これは彼の論文の価値をいささか誤解させたのではないかと思われる。例えば十分条件の一つとして河合は$\partial\Omega$がC^1級なら(0.3)から(0.2)が従うとしているが、ザンピエリ［10］も注意しているように$P(D)$が単純特性的でない限りそのようなΩに対しては肝心の条件(0.3)の方が決して満たされない。しかし凸領域と限らずとも(0.2)を満たすようなものは明らかに沢山あり、二つの条件(0.2)と(0.3)の補間は話の本筋ではないにしても真面目に考えるべき問題ではあ

ろう。

さて、イタリアでその後続いている研究の中でもザンピエリという若い人のそれは注目に値するものと思われる。彼はヘルマンダーの仕事と河合の仕事を結びつけようと試みた。ヘルマンダー[8]は確かに必要十分条件を与えてはいるがそれで可解性の根拠がわかったと云えるようなものではない。一方河合の条件は(十分条件だけではあるが)納得させるものを持っている。ザンピエリはPh-L-Hの原理を方向ξについて局所化する論法(その起源は既にヘルマンダーの論文の中にある)を有効に用いて次のような美しい結果を得た:

<u>定理 0.3</u> (ザンピエリ[10]) Ω は凸領域とする。各方向ξに対し(その近傍における局所解析幾何の意味での)$P_m(\zeta)$の各既約成分 $q(\zeta)$ が局所双曲型で、その局所伝播錐 K_ξ に対しΩが次の幾何学的条件

(0.3) $\forall a \in \partial\Omega$ に対し $\{a\} \pm K_\xi$ のいずれかはΩと交わらない

を満たしていれば $P(D)A(\Omega) = A(\Omega)$ が成り立つ。また逆に、$P_m(\zeta)$ の各既約成分の重複度が高々2ならば条件(0.3)は$P(D)A(\Omega) = A(\Omega)$ が成り立つために必要でもある。

Ph-L-H の原理は N(P) に対しても $N(P_m)$ に対しても同等であるから主部の既約成分を考えるだけで良いのである。また Ph-L-H の原理も局所双曲型の概念も多項式と限らず一般

の斉次解析函数芽に対して意味を持つことに注意されたい。逆の主張において重複度が高々2に制限されているのは単なる技術的問題と思いたい（実際の彼の議論は二次方程式の初等的性質に強く依存しているのだが）。もし一般のΩでこの型の条件が必要且つ十分であることがわかれば、（少くとも局所双曲型の積の形の主部を持つ作用素については）それこそ万人の納得するような究極的解答ということになろうからである。しかしながらザンピエリの方法は Ph－L－H の原理を特異性伝播の言葉に翻訳するというものなので、凸でないΩに対してはお手上げである。（そもそも凸でないΩに対しては大域的可解性が作用素の主部だけで決まるかどうかさえまだわかっていない。）

さて、ここでの話の本題はもっとつつましく、上述の河合の議論を非有界なΩに拡張しようというものである。Ωが非有界だと延長$\tilde{f}$の台$\overline{\Omega}$はコンパクトでなくなるから、畳み込み$\tilde{f} * E$ の構成に本質的な困難を生ずるであろうというのがイタリアで受けた質問の主旨であるが、我々にとっては延長$\tilde{f}$として急減少フーリエ超函数をとれば良いということに気付くのはた易いことである。ただ、河合の理論を翻訳するには彼のいわゆる“良い基本解”の増大度に匹敵するだけの強い減少度を持つ新しいフーリエ超函数の族を用意し、その無

限遠における“特異スペクトル”の概念を導入し、対応する“フーリエミクロ函数”の層のぜい弱性を示す等の準備が要るのである。

第1節　$O(e^{\delta+|x|^s})$型で増大又は減少するフーリエ超函数の族

通常のフーリエ超函数の構成法にならいまず$\mathbb{R}^n$のコンパクト化 $\mathbb{D}^n=\mathbb{R}^n \sqcup S^n_\infty$及びその複素近傍 $\mathbb{D}^n+i\mathbb{R}^n$ を用意する。

定義 1.1　$s>0$, $\delta\in\mathbb{R}$とし開集合 $U\subset\mathbb{D}^n+i\mathbb{R}^n$ に対し

$$(1.1)\quad \tilde{\mathcal{O}}^{s,\delta}(U)=\Big\{F(z)\in\mathcal{O}(U\cap\mathbb{C}^n);\forall K\Subset U,\forall\varepsilon>0 \text{ に対し } \sup_{z\in K\cap\mathbb{C}^n}|F(z)|\,e^{-(\delta+\varepsilon)|\mathrm{Re}\,z|^s}<+\infty\Big\}$$

を切断空間として$\mathbb{D}^n+i\mathbb{R}^n$ 上の層 $\tilde{\mathcal{O}}^{s,\delta}$を定義する。U が

$$(1.2)\quad U\cap\mathbb{C}^n\subset C_s:=\Big\{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Im}\,z|\leqslant 1+\frac{1}{\sqrt{3}s}|\mathrm{Re}\,z|\Big\}$$

を満たす開集合ならば $F(z)\in\tilde{\mathcal{O}}^{s,\delta}(U)$ に対し重み函数 $G(z)\in\tilde{\mathcal{O}}^{s,\delta}(C_s)$ として$F(z)/G(z)$ が $\forall K\Subset U$について $K\cap\mathbb{C}^n$ 上一様有界となるようなものが構成できる。（小生による劣指数型整函数 $J(z)$の構成法と、例えば$(1+z^2)^{s/2}$のような函数とを組み合わせれば良い。）故にヘルマンダーの$\bar\partial$複体に対するL^2型存在定理が適用でき、上の条件を満たす擬凸領域 U に対して

$$H^p(U,\tilde{\mathcal{O}}^{s,\delta})=0\qquad(p\geqslant 1)$$

が示される。双対複体に対する議論やマルグランジュの定理の証明も同様に翻訳でき、結局次が得られる：

<u>定理と定義1.2</u> $\mathcal{Q}^{s,\delta} = \mathcal{H}_{D^n}(\tilde{\mathcal{O}}^{s,\delta})$ により D^n 上に型 $O(e^{\delta+|x|^s})$ で増大（$\delta<0$ のときは減少）するフーリエ超函数のぜい弱層が定まる。

もちろん $\mathcal{Q}^{s,\delta}|_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}$ である。$f(x) \in \mathcal{Q}^{s,\delta}(\Omega)$ とは要するに

(1.3) $\qquad f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0)$

と表されることであり、ここに各 $F_j(z)$ は $\Omega+i\Gamma_j 0$ 型の無限小楔 U_j（Ω の無限遠点の近傍では虚部は一定の大きさを保持する）の上の $\tilde{\mathcal{O}}^{s,\delta}$ の切断、すなわち、$\mathcal{O}(U_j \cap \mathbb{C}^n)$ の元であって各 $K \subset\subset U_j$, $\varepsilon > 0$ に対し $K \cap \mathbb{C}^n$ 上一様に $F_j(z) = O(e^{(\delta+\varepsilon)|\mathrm{Re}\, z|^s})$ を満たすようなものである。

<u>定義1.3</u> $f(x) \in \mathcal{Q}^{s,\delta}(\Omega)$ が点 $(a,\xi) \in \Omega \times S^{n-1}$ でミクロ解析的とは、点 a の近傍における f の適当な表示(1.3)を選べば $\forall j$ について $\Gamma_j \cap \{\langle y,\xi\rangle<0\} \neq \emptyset$ とできることをいう。f がミクロ解析的でないような $\Omega \times S^{n-1}$ の点の全体を f の特異スペクトルと呼び $\mathrm{S.S.}^{s,\delta} f$ で表す。（これは $\Omega \times S^{n-1}$ の閉部分集合である。）

この定義は a が R^n の点のときには増大度が無意味となり、従って通常の超函数に対するミクロ解析性又は特異スペクトルの概念に帰着することに注意されたい。

これらの概念は概ね小生が別の問題に関連して通常のフーリエ超函数 $\mathcal{Q}$（すなわち $s=1$, $\delta=0$ の場合）に対して導入したもの [4] の拡張になっている。特異スペクトルはもちろ

ん考える族によって変ってくる。例えば一変数フーリエ超函数 e^x は $s>1$、又は $s=1, \delta \geqslant 1$ ならそのまま自然に $\mathcal{Q}^{s,\delta}(D)$ の元とみなされ、しかも到る処でミクロ解析的だが、それ以外の、例えば通常のフーリエ超函数で考えれば $+\infty$ における適当な意味付けが必要となり、しかもその如何に拘ずこの点では二成分への特異スペクトル分解

$$e^x = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$$

が必要となる。ともあれ、このように分解すれば $F_\pm(z)$ は実軸から離れた所では予め指定された型の増大度（又は減少度）を持つようにできる。このことはフーリエ超函数論を知らぬ人々には大変な驚きであるらしい。

注意 1.4 リュートナン［9］は無限遠において増大度を考えないような $\mathcal{B}$ の D^n への層拡大を扱い、その特異スペクトルを導入してある種の偏微分方程式の問題に応用している。我々は畳み込みの公式に意味付けをするのが目的だから無限遠における増大度制限は自然であるが、この方法論を離れて大本の実解析解の大域的存在の問題だけに注目すれば、その本質は実領域の複素近傍として（各 $i\xi$ 方向に）どの程度の厚みを持ったものが許されるかということであり増大度はむしろ余計である。そのような研究は面白いが必要とされる道具は全く違ったものとなろう。（例えば $P(D)$ の因子として得られ

る定数係数の擬微分作用素に対して楔形領域での大域的正則解の存在を調べる等は有力である。）

さて特異スペクトルと畳み込みとの関係は次の補題で与えられる：

<u>補題 1.5</u>　$f(x) \in \mathfrak{O}^{s,\delta}(\mathbb{D}^n)$，$g(x) \in \mathfrak{O}^{s,-\delta'}(\mathbb{D}^n)$ で $\delta' > \delta \geqq 0$ とする。このとき畳み込み $f * g \in \mathfrak{O}^{s,\delta}(\mathbb{D}^n)$ をそれぞれの表示 $f(x) = \sum_{j=1}^{M} F_j(x+i\Gamma_j 0)$，$g(x) = \sum_{k=1}^{N} G_k(x+i\Delta_k 0)$ に基いて

$$(1.4)\quad (f * g)(x) = \sum_{j,k}\left[\int_{\mathrm{Im}\,\zeta=\eta_k} F_j(z-\zeta)G_k(\zeta)d\zeta\right]_{z\mapsto x+i(\Gamma_j+\Delta_k)0}$$

と定めれば、結果は積分路や表示の選び方によらず、かつ

$$(1.5)\quad S.S.^{s,\delta} f*g \subset \left\{(x+y,\xi) \in \mathbb{D}^n \times S^{n-1};\ (x,\xi) \in S.S.^{s,\delta} f,\ (y,\xi) \in S.S.^{s,-\delta'} g\right.$$

が成り立つ。ここに $x, y \in \mathbb{D}^n$ に対し和 $x+y$ の意味は次の通りである：

1) $x, y \in \mathbb{R}^n$ のときは通常の意味のベクトル和 $x+y$；

2) $y \in \mathbb{R}^n$ ならば $x\infty + y = x\infty$；

3) x と $-y$ が同一方向でなければ $x\infty + y\infty = \{(tx+(1-t)y)\infty;$
$0 \leqq t \leqq 1\}$；

4) $x\infty + (-x)\infty = \mathbb{D}^n$.

（3番の場合は当然のことながら積のS.S.評価のフーリエ像に対応している。無限遠のS.S.が畳み込みにより有限の領域へ影響を及ぼすのは4の場合だけであることに注意されたい。）

この特別な場合として、あるいはより正確にはこの補題自

身を証明するのに、フーリエ超函数の特異スペクトル分解公式を導入しておくのが便利である。これには柏原の公式に $e^{-x^{2s}}$ を掛けておけば十分である*)：

(1.6) $$\delta(x) = \int_{S^{n-1}} \underset{\sim}{W}_s(x,\omega)\,d\omega;$$

$$\underset{\sim}{W}_s(x,\omega) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\,\frac{(1-ix\omega)^{n-1}-(1-ix\omega)^{n-2}(x^2-(x\omega)^2)}{(x\omega+i(x^2-(x\omega)^2+i0)^n}\,e^{-x^{2s}}$$

今 $\Delta \subset S^{n-1}$ を球面と凸錐の交わりとし

$$\underset{\sim}{W}_s(z,\Delta) = \int_\Delta \underset{\sim}{W}_s(z,\omega)\,d\omega$$

という正則函数を考えれば、これは $\forall\delta'>0$ について $\tilde{\mathcal{O}}^{s,-\delta'}(\mathbb{D}^n+i\Delta 0)$ の元となり、これから一つの急減少フーリエ超函数 $\underset{\sim}{W}_s(x,\Delta) = \underset{\sim}{W}_s(x+i\Delta 0,\Delta)$ が定まる。これと $f(x)\in\mathcal{Q}^{s,\delta}(\mathbb{D}^n)$ との畳み込みは定義式(1.4)通りに求められ、しかも $\mathrm{S.S.}^{s,\delta} f * \underset{\sim}{W}_s(x,\Delta) \subset \mathrm{S.S.}^{s,\delta} f \cap \mathbb{D}^n\times\overline{\Delta}$ となることが S.S. の定義と積分路変更による解析接続で直接確かめられる。故に球面 S^{n-1} の分割に応じて与えられた $f\in\mathcal{Q}^{s,\delta}(\mathbb{D}^n)$ をいくらでも細かく特異スペクトル分解することができる。このような分解を用いれば上記補題も同様の方針で初等的に証明できる。

最後に $\mathcal{Q}^{s,\delta}$ に対応するミクロ函数の層を $\mathbb{D}^n\times S^{n-1}$ 上に導入しよう。

<u>定義1.6</u> 型 $O(e^{\delta+|x|^s})$ のフーリエミクロ函数の層 $\mathcal{R}^{s,\delta}$ を

(1.7) $\mathbb{D}^n\times S^{n-1}\supset\Omega$

$$\longmapsto \mathcal{R}^{s,\delta}(\Omega) = \mathcal{Q}^{s,\delta}(\Omega)/\{f\in\mathcal{Q}^{s,\delta}(\Omega);\ \mathrm{S.S.}^{s,\delta} f\cap\Omega=\emptyset\}$$

---

*)より正確には x の指数として適当な偶数 > s をとる。

という切断加群に随伴する層として定義する。

定理 1.7 $\mathcal{R}^{s,\delta}$ は $\mathbb{D}^n \times S^{n-1}$ 上のぜい弱層となる。

層の公理（FII）の検証とぜい弱性の証明は柏原の公式

$$(1.8)\quad (x\omega+\alpha(x^2-(x\omega)^2)+i0)^{\lambda} * (x\omega+\beta(x^2-(x\omega)^2)+i0)^{\mu}$$
$$= -2\pi^{\frac{n+1}{2}} i \frac{\Gamma(-\lambda-\mu-\frac{n+1}{2})}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)} (\alpha+\beta)^{-\frac{n-1}{2}} (x\omega+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(x^2-(x\omega)^2)+i0)^{\lambda+\mu+1}$$

を用いて $\mathbb{D}^n \times S^{n-1}$ 上のパラメータ付きフーリエ超函数の層 $\mathcal{Q}_x^{s,\delta}\mathcal{B}_\xi$ に帰着させて行う。$\mathcal{Q}_x^{s,\delta}\mathcal{B}_\xi$ 及びそれに対応する増大度付き実解析函数の層 $\mathcal{P}_x^{s,\delta}\mathcal{A}_\xi$ の正当化は $\mathcal{Q}^{s,\delta}$ のそれと平行してでき、特に $H^p(\Omega,\mathcal{P}_x^{s,\delta}\mathcal{A}_\xi)=0$ $(p\geq 1)$ が任意の $\Omega\subset\mathbb{D}^n\times S^{n-1}$ について成り立つ。だが公式(1.8)はあまりにも具体的すぎて $e^{-x^{2s}}$ のような因子を乗じた場合の影響を具体的にきっちり計算できず、定数係数擬微分作用素として漸近展開の手法により無限遠まで込めた逆を抽象的に構成しなければならない。このように定理 1.7 の証明にはかなりの準備を要し実はまだ細部までそれらを検討していない。そこで以下臨時の便法を示しておこう。後でわかることだが、まず我々は常にフーリエ超函数から誘導されたフーリエミクロ函数しか扱わないので（FII）は敢えて確かめる必要がない。また、実は $\mathcal{R}^{s,\delta}\big|_{\mathbb{R}^n\times S^{n-1}}=\mathcal{C}$ のぜい弱性、及び無限遠部分 $\Gamma_{S_\infty^{n-1}\times S^{n-1}}(\mathcal{R}^{s,\delta})$ が軟層となる事実さえあれば十分である。後者は $\mathcal{Q}^{s,\delta}$ のぜい弱性と特異スペクトル分解(1.6)から容易に導かれる。

<u>系 1.8</u>　$f(x)\in \mathcal{O}^{s,\delta}(\mathbb{D}^n)$ とし $S.S.f \subset \bigcup_{j=1}^{N} X_j$ と閉集合の族で覆われているとせよ。このとき $f_j \in \mathcal{O}^{s,\delta}(\mathbb{D}^n)$ で

$$f = f_1+\dots+f_N; \qquad S.S.f_j \subset X_j \ (j=1,\dots,N)$$

を満たすものが存在する。

この系は定理 1.7 によらず上述の便法をとる場合には

$S.S.f_j \cap (\mathbb{R}^n \times S^{n-1}) \subset X_j \cap (\mathbb{R}^n \times S^{n-1})$,

$S.S.f_j \cap (S^{n-1}_\infty \times S^{n-1}) \subset X_j \cap (S^{n-1}_\infty \times S^{n-1})$ の与えられた近傍

という形に弱められるわけである。

第 2 節　非有界領域における実解析解の大域的存在定理

話の筋を明確にするためまず始めに河合の論法を無限領域の場合に適合させたものを抽象的定理として掲げておこう。後で具体的に局所双曲型作用素に応用する場合には $N_\Delta = 2$ で十分であり、且つそのとき $K^{\Delta,j}_\xi$ は $\pm K_\xi$ と書かれるのだがザンピエリの結果に対応する改良を念頭において少しでも一般的にしておく。

<u>定理 2.1</u>　各点 $\xi^0 \in S^{n-1}$ に対しその S^{n-1} における近傍 Δ を適当にとれば、ある s,δ について次のような $P(D)$ のミクロ局所基本解の族 $E^{\Delta,j}(x)\in \mathcal{O}^{s,\delta}(\mathbb{D}^n)$ $(1 \leq j \leq N_\Delta)$ が構成できるとせよ:

1) $P(D)E^{\Delta,j}(x) - \delta(x)$ は $\mathbb{D}^n \times \Delta$ でミクロ解析的;

2) $S.S.^{s,\delta}E^{\Delta,j}(x) \subset \{0\}\times\overline{\Delta} \cup \mathbb{D}^n \times \partial\Delta \cup \bigcup_{\xi\in N(P_m)\cap\Delta} \overline{K^{\Delta,j}_\xi} \times \{\xi\}$

ここに $K_{\xi}^{\Delta,j}$ は ξ に依存する閉錐であり $\overline{\overline{}}$ は $\mathbb{D}^n$ における閉包操作を示す。さらに領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ に対し $\overline{\overline{\partial}}\Omega$ によりその $\mathbb{D}^n$ における境界（すなわち無限遠の集積点をも含めた意味での）を表すものとし上述の各 Δ について

$$(2.1)\qquad \overline{\overline{\partial}}\Omega\times\Delta=\bigcup_{j=1}^{N_\Delta}X^{\Delta,j}$$

という閉部分集合への分解で

$$(2.2)\qquad (a,\xi)\in X^{\Delta,j}\Longrightarrow P_m(\xi)\neq 0\ \text{又は}\ (\{a\}+K_{\xi}^{\Delta,j})\cap\Omega=\emptyset$$

という幾何学的条件を満たすものが存在すると仮定する。このとき $P(D)\mathcal{A}(\Omega)=\mathcal{A}(\Omega)$ となる。

証明の方針は有界領域の場合と同様である。すなわち与えられた $f(x)\in\mathcal{A}(\Omega)$ をまず $\overline{\overline{\Omega}}$ に台を持つような $\tilde{f}(x)\in\mathcal{Q}^{s,-\delta'}(\mathbb{D}^n)$ に延長しておく（ここに $\delta'>\delta$ は任意で良い）。さて S^{n-1} は定理の仮定にあるような Δ の有限個で覆えるから系 1.8 により $\tilde{f}$ を

$$(2.3)\qquad \tilde{f}=\sum_{\Delta}\tilde{f}^{\Delta};\qquad \mathrm{S.S.}\tilde{f}^{\Delta}\subset\mathbb{D}^n\times\Delta$$

と有限和に分解する。次いで同じ系により今度はより精密に、(2.1) に応じて

$$(2.4)\qquad \tilde{f}^{\Delta}=\sum_{j=1}^{N_\Delta}\tilde{f}^{\Delta,j};\qquad \mathrm{S.S.}^{s,-\delta'}\tilde{f}^{\Delta,j}\subset X^{\Delta,j}$$

と分解する。（系 1.8 の弱い形では $\mathrm{S.S.}^{s,-\delta'}\tilde{f}^{\Delta,j}\cap(S_\infty^{n-1}\times S^{n-1})$ は $X^{\Delta,j}$ より少し拡がるが、無限遠球面のコンパクト性により条件 (2.2) は $X^{\Delta,j}\cap(S_\infty^{n-1}\times S^{n-1})$ をその少し大きい近傍で置き換え

ても成立するので構わない。）さて諸仮定と補題1.5より $\tilde{f}^{\Delta,j} * E^{\Delta,j}$ は Ω 内で実解析的となる。故に

$$v = \sum \tilde{f}^{\Delta,j} * E^{\Delta,j}$$

は Ω 内で実解析的で且つ $g = P(D)v - f$ は到る処ミクロ解析的、すなわち $\tilde{\mathcal{F}}^{s,\delta}(\mathbb{D}^n)$ の元となる。特に g は $\mathbb{R}^n$ のある一定の幅を持った帯状近傍で正則となるから、凸領域における正則解の大域的存在定理により $P(D)w = g$ を満たす $w \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ がとれ $v|_{\mathbb{R}^n} - w$ が最終的に Ω 上の大域的実解析解となる。

この定理が予想する典型的な例は次の様な作用素である

定義 2.2　P(D) が（アンダーソンの意味で）局所双曲型とは、S^{n-1} 上の任意の点に対し S^{n-1} におけるそのある近傍 Δ とベクトル $v \neq 0$ 及び $\varepsilon > 0$ で

$$\xi \in \Delta,\ 0 < |t| < \varepsilon \quad \text{のとき} \quad P_m(\xi + itv) \neq 0$$

を満たすものが存在することをいう。

このとき $P_m(\xi)$ の点 $\xi \in N(P_m)$ における局所化 $(P_m)_\xi(\eta)$（すなわち $P_m(\xi + t\eta)$ のテイラー展開の 0 でない最初の項の係数）は η の多項式として v 方向に双曲型となるが、その伝播錐 K_ξ をもとの作用素 $P(D)$ の ξ における局所伝播錐と呼ぶ。

定理 2.3　P(D) が局所双曲型ならば、その局所伝播錐を K_ξ とするとき $\forall s > m, \forall \delta \geqq 0$ に対し S^{n-1} のある近傍 Δ において次の性質を持つミクロ局所基本解 $E^{\Delta,\pm}$ が構成できる。

1) $P(D)E^{\Delta,\pm}(x) - \delta(x)$ は $\mathbb{D}^n \times \Delta$ においてミクロ解析的

2) $S.S.^{s,\delta}E^{\Delta,\pm}(x) \subset \{0\}\times\bar{\Delta} \cup \mathbb{D}^n \times \partial\Delta \cup \bigcup_{\xi \in N(P_m)\cap\Delta} \pm\overline{\overline{K_\xi}} \times \{\xi\}$

$E^{\Delta,\pm}$ は逆フーリエ変換で容易に構成できる。（$P(D)$ が斉次多項式のときは $s=1$, $\delta=0$ すなわち通常のフーリエ超函数に収まるが、一般には $s>m$ が必要である。）河合 [8] は方向 v が ξ について連続的に選べるという仮定の下に大域的な基本解を漸近展開の手法で構成している（そして彼の目的には不要な x に関する増大度もぎりぎりまで出している）が、我々の仮定の下でも、上のミクロ局所基本解の族を用いて方程式 $P(D)E=\delta$ を解くことにより性質

$$S.S.^{s,\delta}E(x) \subset \{0\}\times S^{n-1} \cup \bigcup_{\xi \in N(P_m)} \pm\overline{\overline{K_\xi}} \times \{\xi\}$$

を持った大域的基本解が抽象的には求められる。

系 2.4　$P(D)$ は局所双曲型で領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は

(0.2)bis $\partial\Omega \times S^{n-1} = X^+ \cup X^-$　ここに

$$(a,\xi) \in X^\pm \Rightarrow P_m(\xi) \neq 0 \text{ 又は } (\{a\}\pm K_\xi)\cap\Omega = \emptyset \text{（複号同順）}$$

という閉集合による分解を許すならば $P(D)\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ が成り立つ。

Ω の無限遠境界点 $a\infty$ に対しては $\{a\infty\}\pm\overline{\overline{K_\xi}}$ のどちらかが必ず無限遠に停るので、条件はこの様に有限の境界点だけに課せば十分なのである。

Esistenza Globale di Soluzioni Analitiche Reali in un Aperto illimitato

Akira KANEKO*)

Il problema di esistenza globale di soluzioni analitiche reali ha una storia molto interessante, in cui il ruolo di matematici italiani è sempre importantissimo (si veda per es. Cattabriga[2]).

Oggi, però, parleremo su una maniera di trattarlo che sarebbe non necessariamente familiare qui, cioè quella di Kawai con l'uso essenziale delle iperfunzioni.

La sua idea è di fare il rinascimento alla formula classica di rappresentazione di soluzioni mediante la soluzione fondamentale:

$$P(D)u = f \qquad \text{se} \qquad u = E * f.$$

Questa formula vale nel caso dove f è a supporto compatto, in modo che essa fornisce una soluzione approssimativa o così detta mezzo globale per C^{∞} o D'.

Per A invece, essa sembra non sia più utile, perché non c'è nessuna funzione analitica reale a supporto compatto. Kawai, intanto, ha avuto una idea fortunata come segue: Data $f \in A(\Omega)$ su un'apperto limitato Ω, si scelga un'estensione (o una modificazione) di f come un'iperfunzione $\tilde{f}$ in modo che $\operatorname{supp} \tilde{f} \subset \overline{\Omega}$. Si costruisca la formula

$$E * \tilde{f}.$$

Poiché la convoluzione ammette una stima favorevole per il supporto singolare, ci sarebbe eventualmente un caso dove la singolarità di $\tilde{f}$ nella frontiera $\partial\Omega$ non penetri nell'interno di $\overline{\Omega}$. In tale caso la formula qui sopra dopo restretta in Ω darebbe una soluzione analitica reale di $P(D)u = f$ in Ω.

Questa speranza è infatti soddisfatta per gli operatori ellittici.

---

*)Manoscritto rifatto dalla conferenza di 17.5.1982 a Bologna; è un sunto del corso fatto a Padova da 1.4.1982 a 30.6.1982 in sostegno del CNR.

Ma lo studio del caso degli operatori iperbolici mostra subito che sia necessario di considerarsi il spettro singolare (o la fronte di onde analitica) al posto di supporto singolare per ottenere dei risultati più efficaci. Qui dunque il programma astratto dal metodo di Kawai (ove $B(\Omega)$ designa il spazio delle iperfunzioni su Ω

$$\boxed{P(D)A(\Omega) \supset A(\Omega)\,?}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(D)\{f\in B(R^n);\text{sing supp } f \subset R^n\setminus\Omega\} \\ \quad \supset \{f \in B(R^n);\text{sing supp } f \subset \partial\Omega\}\,? \end{array}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall\xi^0 \in S^{n-1}, \exists\Delta \ni \xi^0 \text{ (intorno in } S^{n-1}\text{) tale che} \\ P(D)\{f\in B(R^n);\text{sing supp } f\subset R^n\setminus\Omega\} \\ \quad\supset\{f\in B(R^n); S.S.f \subset \partial\Omega\times\Delta\}\,? \end{array}}$$

Così il problema globale è micro-localizzato!

Questo programma si può praticare per gli operatori localmente iperbolici con la costruzione di una famiglia di buone soluzioni fondamentali, e dà infatti un teorema di esistenza globale di soluzioni analitiche reali su un'aperto limitato che soddisfa una condizione geometrica rispetto ai coni di propagazione licali.

A proposito, un anno fa, in un convegno a Trento organizzato per il professore Cattabriga, Signor Zampieri a Padova mi ha domandato se questo metodo di Kawai si potesse applicare anche agli aperti illimitati. Io ho risposto allora semplicemente che credevo proprio di si con uso di iperfunzioni di Fourier. Ecco la risposta in dettagli:

Poiché la nozione di iperfunzioni di Fourier è ancora meno familiare di quella di iperfunzioni ordinarie, spiegheremo prima, come nell'articolo di Kawai[8], ciò che passa nel caso di un' operatore ellittico $P(D)$.

Data $f(x) \in A(\Omega)$ in un'aperto illimitato Ω, si potrebbe considerare la formula $E * \tilde{f}$ se esistesse una modificazione $\tilde{f}$ a decrescenza assai rapida. Ma questo non è vero in generale sull' asse reale. (In fatti, Andersson[1] considera, nel caso $\Omega = R^n$, la decomposizione di f alle tali componenti che decrescano rapidamente ogni fuori un cono rispettivo. Però, ogni componente non può smettere di crescere in modo arbitrario dell'inizio nello stesso cono. Quindi lui non poteva costruire la convoluzione per E direttamente, è c'era necessario di un'altra procedura di approssimazione.)

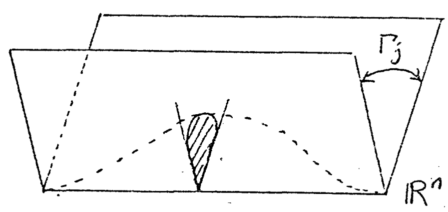
Questo intanto si può sempre realizzare se si esce fuori l'asse reale! Prendiamo in fatti un'iperfunzione f(x) (più generale di una funzione analitica reale) su R^n. Essa si ammette a scrivere come la somma formale dei valori al bordo di funzioni olomorfe in cunei vari:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0);$$

qui $F_j(z)$ è olomorfa in un aperto complesso U_j che è un cuneo infinitesimale di larghezza Γ_j (un cono convesso di R^n) a tagliente R^n; U_j soddisfa

1) $U_j \subset R^n + i\Gamma_j$,

2) Per tutto sotto cono proprio $\Delta_j \subset\subset \Gamma_j$, c'è un'intorno complesso $V \supset R^n$ tale che $U_j \supset (R^n + i\Delta_j) \cap V$.



Si fa convenzione che due tali espressioni definiscono la stessa iperfunzione se esse si possono dedurre di una all'altra per alcune modificazioni di tipo

$$F_j(x+i\Gamma_j 0) + F_k(x+i\Gamma_k 0) = (F_j+F_k)(x+i\Gamma_j \cap \Gamma_k 0),$$

e di tipo inverso. Una funzione analitica reale f(x) si può considerare come un'iperfunzione per l'espressione $f(x+i\Gamma 0)$ con l'unico termine e con Γ qualsiasi.*)

Un teorema fondamentale della teoria delle iperfunzioni di

*)Per più di dettagli sulle iperfunzioni si veda per es. [5].

Fourier si può esprimere nella maniera elementare come segue:

Teorema Tra le espressioni per valori al bordo di un'iperfunzione $f(x)$ su R^n, ce n'è sempre una tale che $F_j(z)$ sia olomorfa in un cuneo perfetto $R^n+i\Gamma_j$ e li soddisfaccia, per ogni compatto $K \subset\subset \Gamma_j$ et per $\forall\, \varepsilon > 0$,

$$F_j(z) = O(e^{\varepsilon |\mathrm{Re}\, z|})$$

uniformemente su K.

Questa condizione di crescenza, una volta accettabile, si pu migliorare a un'altra che sia apparentemente fortissima, per es.:

$$F_j(z) = O(e^{-\delta |\mathrm{Re}\, z|^m}).$$

Infatti, quest'ultima si deduce dalla quella di sopra se si applic il teorema prima a $e^{x^{2m}} f(x)$ e poi si divide le funzioni cosi ottenute per $e^{-z^{2m}}$ ecc.

Ricordiamoci inoltre che la soluzione fondamentale $E(x)$ di un'operatore ellittico costruita alla maniera standard (per es., per la trasformazione inversa di Fourier) cresce al più di maniera esponenziale. Più precisamente, $E(x)$ come un'iperfunzione ammett un'espressione

$$E(x) = \sum_{k=1}^{M} E_k(x+i\Delta_k 0)$$

tale che $E_k = O(e^{-\delta' |\mathrm{Re}\, z|})$ uniformemente su ogni tubo R^n+iK con $K \subset\subset \Delta_k$. In tale caso, scegliendo $\delta > \delta'$ $(m=0)$ si può calcolare la convoluzione $E * f$ con f come sopra per la formula

$$E * f = \sum_{j,k} \left[\int E_k(z-\zeta) F_j(\zeta)\, d\zeta \right]_{z \mapsto x+i(\Gamma_j+\Delta_k)0}.$$

Qui in ogni integrale ζ muove su un cammino di tipo $R^n+i\eta$ con $\eta \in \Gamma_j$ fisso, in modo che z si puo correre nel cuneo $R^n+i(\Gamma_j+\Delta$ da dove la giustificazione del simbolo di valore al bordo alla fine

Così abbiamo ottenuto una soluzione iperfunzione $u = E * f$ di $P(D)u = f$. Ora l'analiticità di $f(x)$ in Ω si riflette alla regolarità di F_j in tale modo che $F_j(z)$ si prolunghino all'intorno di ogni punto $x \in \Omega$. (O più precisamente, se ne possono scegliere così.) Anche, il fatto che $E(x)$ è la soluzione fondamentale di un'operatore ellittico si riflette alla proprietà che $E_k(z)$ si prolunghino, per ogni $\varepsilon > 0$, a un'intorno tubolare di $R^n \setminus \{|x| \leq \varepsilon\}$ conservando la detta stima esponenziale. Quindi l'argomento tipico mediante la deformazione di cammino di integrale mostra che ogni integrale nella definizione di convoluzione $E * f$ si può prolungare all'intorno di ogni $x \in \Omega$. Cioè, $E * f$ viene infatti analitica reale in Ω, dunque dà una soluzione richiesta.

Questo ragionamento si può generalizzare come segue: Noi introduciamo la compattificazione per direzioni di R^n:

$$D^n = R^n \sqcup S_\infty^{n-1},$$

e su questo spazio, un fascio $Q^{s,\delta}$, detto di iperfunzioni di Fourier con crescenza di tipo (s,δ). (δ può essere negativo. In tale caso "crescenza" sarebbe meglio rimpiazzare per "decrescenza".) $Q^{s,\delta}$ è un'estensione del fascio di iperfunzioni ordinarie su R^n: $Q^{s,\delta}\big|_{R^n} = B$. Un germe $f(x)$ di $Q^{s,\delta}$ a un punto $a\infty$ all'infinito si esprime, per definizione, per valori al bordo

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0),$$

dove ogni $F_j(z)$ è definita in un cuneo che ha come tagliente non tutto R^n ma un'intorno conico della direzione a e li soddisfa la stima, per ogni $\varepsilon > 0$, $F_j(z) = O(e^{(\delta+\varepsilon)|\mathrm{Re}\, z|^s})$ della maniera localmente uniforme rispetto a $\mathrm{Im}\, z$.*) Il teorema qui sopra è una conseguenza particolare del fatto che $Q^{s,\delta}$ è fiacco come B, cioè, è sempre possibile di estendere una sezione allo spazio totale.

Anche la nozione di micro-analiticità o di spettro singolare (S.S. in breve) si può estendere alle iperfunzioni di Fourier: Una

---

*) Il caso di $s=1$, $\delta=0$ corrisponde al fascio di iperfunzioni di Fourier classico introdotto e studiato per Sato-Kawai: si veda [7].

sezione $f(x)$ di $Q^{s,\delta}$ è detta micro-analitica in $(a\infty, \xi)$ se essa ammette un'espressione per valori al bordo locale con la crescenza designata:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0)$$

tale che

$$\{y \in R^n;\ \langle y,\xi\rangle<0\} \cap \Gamma_j \neq \emptyset, \quad \text{per tutto } j.$$

L'insieme dei punti dove f non è micro-analitica è chiamata il spettro singolare di f e designata per $S.S.f$.*) Esso è un sotto insieme di $D^n \times S^{n-1}$. Queste nozioni si riducono a quelle ordinarie per iperfunzioni ai punti finiti $x \in R^n$ se si dimentica la condizione di crescenza nella definizione.**)

Lemma Per $f(x) \in Q^{s,\delta}(D^n)$ e $g(x) \in Q^{s,-\delta'}(D^n)$ con $\delta < \delta'$, la convoluzione $f * g$ è ben definita come un'elemento di $Q^{s,\delta}(D^n)$. Si ha la stima

$$S.S.f * g \subset \{(x+y,\xi);\ (x,\xi) \in S.S.f,\ (y,\xi) \in S.S.g\},$$

ove $x+y$ significa:

1) $x+y$ nel senso ordinario se $x,\ y \in R^n$;

2) $x\infty + y = x\infty$ se $y \in R^n$;

3) $x\infty + y\infty = \{(tx+(1-t)y)\infty\ ; 0 \leq t \leq 1\}$ se x e $-y$ non sono di stessa direzione;

4) $x\infty + (-x)\infty = D^n$.

Il nostro risultato principale si costituisce da due parti:

Teorema principale(parte astratta) Supponiamo che per $\forall \xi^0 \in S^{n-1}$ ci sia un'intorno $\Delta \ni \xi^0$, e una famiglia di soluzioni fondamentali micro-locali $E^{\Delta,j}$, $j=1,\dots,N_\Delta$, di cui ciascuna sia in $Q^{s,\delta}(D^n)$ per $\exists s,\ \delta$ e soddisfaccia:

1) $P(D)E^{\Delta,j} - \delta(x)$ sia micro-analitica in $D^n \times \Delta$;

2) $S.S.E^{\Delta,j} \subset \{0\} \times \bar{\Delta} \cup D^n \times \partial\Delta \cup \bigcup_{\xi \in N(P_m)\cap\Delta} \overline{\overline{K_\xi^{\Delta,j}}} \times \{\xi\}$,

*) S.S.f dipende dal tipo (s,δ) per quale si considera $f \in Q^{s,\delta}$. Per distinguerlo meglio, si designerà $S.S^{(s,\delta)}f$.

**) La nozione di S.S. all'infinito è introdotto in [4] per le iperfunzioni di Fourier classiche. Si veda anche Lieutenant[9] per una nozione simile ma senza condizione di crescenza.

ove $K_{\xi}^{\Delta,j}$ designa un cono dipendente da ξ, e $\overline{\overline{K_{\xi}^{\Delta,j}}}$ la sua chiusura in D^n. Sia $\Omega \subset R^n$ un'aperto e sia $\overline{\overline{\partial}}\Omega$ la sua frontiera in D^n (cioè, ci contenuta anche i punti di accumulazione all'infinito). Supponiamo che per ogni Δ qui sopra ci sia una decomposizione ai sotto insiemi relativamente chiusi:

$$\overline{\overline{\partial}}\Omega \times \Delta = \bigcup_{j=1}^{N_\Delta} X^{\Delta,j}$$

tale che $(a,\xi) \in X^{\Delta,j}$ implica, o $P_m(\xi) \neq 0$, o $\{a\}+K_{\xi}^{\Delta,j} \cap \Omega = \emptyset$. Allora $P(D)A(\Omega) = A(\Omega)$.

<u>Dimostrazione</u> Sia $f(x) \in A(\Omega)$. Estendiamolo a un'iperfunzione di Fourier $\tilde{f} \in Q^{s,-\delta'}(D^n)$ a supporto in $\overline{\overline{\Omega}}$ (chiusura in D^n), con decrescenza tale che $\delta' > \delta$. Poi, decomponiamo $\tilde{f}$ in una somma finita*)

$$\tilde{f} = \sum_{\Delta} \tilde{f}^{\Delta}$$

tale che $S.S.\tilde{f}^{\Delta} \subset \overline{\overline{\partial}}\Omega \times \Delta$ con un'intorno Δ che figura nella condizione del teorema. Poi decomponiamo ancora ogni $\tilde{f}^{\Delta}$ secondo la decomposizione di $\overline{\overline{\partial}}\Omega \times \Delta$:*)

$$\tilde{f}^{\Delta} = \sum_{j=1}^{N_\Delta} \tilde{f}^{\Delta,j}; \qquad S.S.\tilde{f}^{\Delta,j} \subset X^{\Delta,j}, \qquad j=1,\dots,N_\Delta.$$

In virtù della condizione geometrica per Ω, la convoluzione $E^{\Delta,j} * \tilde{f}^{\Delta,j}$ viene analitica reale in Ω. (Si veda il lemma per la stima di $S.S.E^{\Delta,j} * \tilde{f}^{\Delta,j}$.) E' ovvio che la loro somma dà una soluzione analitica reale u di $P(D)u = f$ in Ω.**) Q.E.D.

Ora mostriamo il caso piu importante dove c'è una tale famiglia di soluzioni fondamentali micro-locali.

<u>Teorema principale(parte concreta)</u> Sia $P(D)$ un'operatore localmente iperbolico nel senso seguente: Per $\forall \xi^0 \in S^{n-1}$, c'è un' intorno $\Delta \ni \xi^0$ in S^{n-1}, un vettore $v \neq 0$, e $\varepsilon > 0$ tali che

$$P_m(\xi+itv) \neq 0 \quad \text{per} \quad \xi \in \Delta, \quad 0 < |t| < \varepsilon.$$

Allora $P(D)$ ammetta soluzioni fondamentali micro-locali $E^{\Delta,\pm}$ tali che per $\exists\, s, \delta$

---

*) Qui si usa il fatto che il fascio di micro-funzioni o il suo equivalente all'infinito è fiacco.

**) Più precisamente, $P(D)u-f$ diventa olomorfa in un intorno tubolare di R^n e si cancella facilmente.

1) $P(D)E^{\Delta,\pm}-\delta(x)$ è micro-analitica in $D^n \times \Delta$,

2) $S.S.E^{\Delta,\pm} \subset \{0\} \times \overline{\Delta} \cup D^n \times \partial\Delta \cup \bigcup_{\xi \in N(P_m) \cap \Delta} \pm K_\xi \times \{\xi\}$,

dove, K_ξ è il cono di propagazione locale, cioè il cono duale de componente connessa Γ_ξ di v in $\{\eta \in R^n;\ P_\xi(\eta) \neq 0\}$. ($P_\xi(\eta)$, la localizzazione di P in ξ, è iperbolico alla direzione v per l'ipotesi.)

Abbozzo di dimostrazione Poniamo, per es.,

$$E^{\Delta,-}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_D \frac{e^{ix\zeta}}{P(\zeta)}d\zeta,$$

dove

$$D = \{\zeta = \xi + i\eta;\ \xi/|\xi| \in \overline{\Delta},\ |\xi| \geq R,\ \eta = |\xi|^q v\},$$

è la costante $q < 1$ è scelta in tale modo che $P(\xi + i|\xi|^q v) \neq 0$ pe $\xi/|\xi| \in \overline{\Delta}$, $|\xi| \geq R$.*) L'integrale converge assolutamente e localmente uniformemente anche dopo il cambio di x per z con $\mathrm{Im}\, z$ nell' interno del cono duale Γ di Δ. Quindi esso definisce un'iperfunzione di Fourier di tipo $F(x+i\Gamma 0)$. (Però, a causa del cammino d'integrale deformato nel campo complesso, $F(z)$ cresce in general con il modo $O(\exp(c|x|^{1/(1-q)}|y|^{-q/(1-q)}))$. Quindi $F(x+i\Gamma 0)$ è solo in $Q^{s,\delta}$ per $s > 1/(1-q)$.) Si ha quindi

$$S.S.E^{\Delta,-}(x) \subset D^n \times \overline{\Delta}.$$

Inoltre, all'interno di Δ si può deformare il cammino da $\eta = |\xi|^q v$ a $\eta = \varepsilon|\xi| v$ per $|\xi| \geq R_\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ dipendente da $\xi/|\xi| \in \Delta$ Quindi quella parte d'integrale viene analitica reale in $\langle x,v\rangle > 0$ Il cambio di v in Γ_ξ migliora questa stima per fare l'intersezione. Localizzando quest'argomento ad ogni punto di Δ, si ottiene alfine la stima richiesta.

Osservazione L'utilità di considerare parecchie soluzioni fondamentali al posto di due nel teorema astratto appare quando si tratta un operatore con la parte principale riducibile, per es.

---

*) In virtù della continuità delle radici rispetto ai coefficienti, si può sempre trovare una tale $q \leq 1-1/m$.

$P(D) = D_1D_2D_3+\ldots$ che ha le soluzioni fondamentali con S.S. (anche il supporto!) contenuto in rispettivi coni di quadrante. A questo proposito, Zampieri[10] ha dato un risultato molto più raffinato (benché l'uso del principio di Phragmén-Lindelöf-Hörmander[3] lo limiti agli aperti convessi): E' sufficente che Ω soddisfaccia la condizione geometrica con $\pm K_\xi$ separatamente per ogni componente irriducibile (anche nel senso della geometria analitica locale). In particolare, il suo risultato copre un operatore che è il prodotto di operatori localmente iperbolici ma il medesimo no.
Io non so per ora se la maniera di costruzione di "buoni soluzioni fondamentali" si possa migliorare ad arrivare allo stesso livello di precisione. Zampieri mostra anche la necessità della condizione geometrica per Ω sotto la limitazione addizionale per la moltiplicità di zero di $P_m(\zeta)$. Sarà anche interessante di provare ad esprimerlo dal nostro punto di vista. Per ora, il programma schematizzato all'inizio è di senso unico!

Bibliografia

[1] Andersson K.G.: Global solvability of partial differential equations in the space of real analytic functions, Coll. on Analysis, Rio de Janeiro, August 1972 (in Analyse Fonctionnelle, Herman,1974.

[2] Cattabriga L.: Sull'esistenza di soluzioni analitiche reali di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti, Boll. U.M.I. (4) 12(1975),221-234.

[3]Hörmander L.: On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients, Inventiones Math.21(1973),151-182.

[4] Kaneko A.: Considerazione topologica per i valori ai limiti coomologici, Sûrikaiseki-kenkyûsho Kôkyûroku 227(1975),12-22 (in giapponese).

[5] ———:Introduction à la Theorie des Hyperfonctions, Cours de 3e cycle, Univ. de Grenoble 1977/8 (polycopié).

[6] ———: On the global existence of solutions of linear partial differential equations with constant coefficients, Corso all'

università di Padova, 1982 (in manoscritto).

[7] Kawai T.: On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients J.Fac.Sci.Univ.Tokyo Sec.1A 17(1970),467-517.

[8] ———: On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations(I), J.Math.Soc.Japan 24(1972), 481-517.

[9] Lieutenant J.L.: Application de Décompositions des Fonctions Analytiques à la Théorie des Microfonctions, Thèse, Univ. de Liège, 1981/2.

[10] Zampieri G.: Propagation of singularity and existence of real analytic solutions of locally hyperbolic equations, preprint.