数理解析研究所講究録
第 508 巻 1983 年 124-137

超関数の積と canonical extensions について

広島大 総合科 板野 暢之 (Mitsuyuki Itano)

超関数の積については色々の形で研究され、それぞれに特徴をもっている。ここでは以前構成した2種類の積[3, 13]についてその部分積を考え、その応用を試みたい。

Ω を N 次元ユークリッド空間 R^N の空でない開集合とし、$S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ とする。任意の $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して $\alpha S * \check{T}$ が原点 0 の近傍で存在し、Łojasiewicz [11] の意味の値 $(\alpha S * \check{T})(0)$ をもつとき、すなわち $\phi \geq 0$, $\int \phi dx = 1$ なる任意の $\phi \in \mathcal{D}(R^N)$ に対して $\phi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^N}\phi(\frac{x}{\lambda})$, $\lambda > 0$, とおくとき $(\alpha S * \check{T})(0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \langle \alpha S * \check{T}, \phi_\lambda \rangle$。このとき $\mathcal{D}(\Omega) \ni \alpha \longrightarrow (\alpha S * \check{T})(0)$ は連続となり $\langle W, \alpha \rangle = (\alpha S * \check{T})(0)$ となる $W \in \mathcal{D}'(\Omega)$ が一意的に存在する。$W = S \circ T$ と記す [3].

$$\langle \alpha S * \check{T}, \phi_\lambda \rangle = \langle S(T * \phi_\lambda), \alpha \rangle$$

より、上記の性質をもつすべての $\phi \in \mathcal{D}(R^N)$ に対して極限 $\lim_{\lambda \downarrow 0} S(T * \phi_\lambda)$ が ϕ のとり方に無関係に定まるとき、これを

$S\circ T$ と定義できる。

また $\{\varphi_\lambda\}$ は restricted δ-列 $\{\rho_j\}$ [12] によっておきかえることも可能である。$\{\rho_j\}$ は $\rho_j \geqq 0$ なる $\mathcal{D}(R^N)$ の列で ① $\operatorname{supp}\rho_j \to \{0\}$, ② $\int \rho_j\,dx \to 1$ ③ 各 p に対し $\int |x|^{|p|}|D^p\rho_j|\,dx \leqq M_p$ となる j に無関係な定数 M_p をもつ。

任意の restricted δ-列 $\{\rho_j\}$ に対して超関数的極限 $\lim_{j\to\infty} S(T*\rho_j)$ が存在するとき、この極限を $S\circ T$ と定義する。更に任意の restricted δ-列 $\{\rho_j\}$, $\{\tilde{\rho}_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}(S*\rho_j)(T*\tilde{\rho}_j)$ としても同値である。この積は次の性質を持っている。

(I) (1) $f, g \in C(\Omega)$ のとき、$f\circ g$ は存在し普通の積 fg と一致.

(2) $S\circ T$ が存在すれば $T\circ S$ が存在して両者は一致.

(3) $S_1\circ T$, $S_2\circ T$ が存在すれば $(S_1+S_2)\circ T = S_1\circ T + S_2\circ T$.

(4) $S\circ T$ が存在すれば、任意の $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$ に対して $(\alpha S)\circ T$ が存在して $(\alpha S)\circ T = \alpha(S\circ T)$.

(II) $\frac{\partial S}{\partial x_i}\circ T$ $(i=1,2,\cdots,N)$ が存在すれば、$S\circ T$, $S\circ\frac{\partial T}{\partial x_i}$ が存在して $\frac{\partial}{\partial x_i}(S\circ T) = \frac{\partial S}{\partial x_i}\circ T + S\circ\frac{\partial T}{\partial x_i}$.

(III) (1) $S\circ T$ が存在すれば、Ω_1 への制限に対しても $S_{\Omega_1}\circ T_{\Omega_1}$ が存在し $(S\circ T)_{\Omega_1}$ に等しい。

(2) $\Omega = \bigcup \Omega_i$ のとき、$S_{\Omega_i}\circ T_{\Omega_i}$ が存在すれば $S\circ T$ が存在.

(IV) Φ を Ω' から Ω の上への diffeomorphism とし、$J(x)$ を $x'=$

$\Phi^{-1}(x)$ のヤコビアンとする。$S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対し $\tilde{S} \in \mathcal{D}'(\Omega')$ を

$$\langle \tilde{S}(x'), \phi(x') \rangle = \langle S(x), |J(x)| \phi(\Phi^{-1}(x)) \rangle, \quad {}^{\forall}\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$$

とするとき $S \circ T$ が存在すれば $\tilde{S} \circ \tilde{T}$ が存在して $(S \circ T)^{\sim}$ に等しい。

$\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対しては $\alpha \circ T$ は普通の積 αT と一致し，また(I)(4)より $\mathrm{supp}(S \circ T) \subset \mathrm{supp}\, S \cap \mathrm{supp}\, T$ である。性質(IV)から C^{∞} 多様体上の超関数の積，カレントの外積の定義を可能にする。ここでは特に性質(II)に着目したい。これは「2つの超関数の積が可能であるためには，一方が不正則であればそれだけ他方が正則であるべきだ」という Schwartz の言葉のひとつの定式化である。$S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ がすべての $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ と積が可能になるのは $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$ のとき，そのときのみである。

p を multi-index とし $0 \leq |q| \leq |p|$ なるすべての q に対して $D^q S \circ T$ が存在すれば，$S \circ D^p T$ が存在して

$$S \circ D^p T = \sum_q (-1)^q \binom{p}{q} D^{p-q} (D^q S \circ T)$$

が成立することが性質(II)から導びかれる。

<u>定理1</u> $R^N = R^n \times R^m \ni (x, t)$ に対し $\frac{\partial S}{\partial x_i} \circ T$, $i = 1, 2, \cdots, n$; $S \circ \frac{\partial T}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \cdots, m$ が存在すれば，$S \circ \frac{\partial T}{\partial x_i}$, $\frac{\partial S}{\partial t_j} \circ T$ が存在し，次の式が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(S \circ T) = \frac{\partial S}{\partial x_i} \circ T + S \circ \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial t_j}(S \circ T) = \frac{\partial S}{\partial t_j} \circ T + S \circ \frac{\partial T}{\partial t_j}.$$

$S(t) \in \mathcal{D}'(R^m_t)$, $T \in \mathcal{D}'(R^N)$ に対し $(1 \otimes S) \circ T$ が存在するとき，やはり $S \circ T$ と記し，部分積と呼ぶ。

この部分積が存在するための条件は，すべての $\varphi \in \mathcal{D}(R^n_x)$ に対して積 $S(t) \circ \langle T(x,t), \varphi(x) \rangle_x$ が存在することであり $\langle S \circ T, \varphi \rangle_x = S \circ \langle T, \varphi \rangle_x$ を得る。

$N = 1$ のときは，超関数の一点における値の概念を拡張することによって (I) から (IV) までの性質を保存して我々の積の定義を拡張できる。しかし $N \geqq 2$ のとき (I)〜(IV) をみたす積は上記のもの以外に存在するかどうか不明である。

一方 $\rho_j \geqq 0$ なる $\mathcal{D}(R^N)$ の列 $\{\rho_j\}$ が ① $\mathrm{supp}\,\rho_j \to \{0\}$, ② $\int \rho_j dx = 1$ なるとき，δ－列と呼ぶ。$S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対し，任意の δ－列 $\{\rho_j\}$ に対して超関数的極限 $\lim_{j \to \infty} S(T * \rho_j)$ が存在するとき，この極限を $S \cdot T$ と記し狭義の積[13]と呼ぶ。

<u>定理2.</u> $S \cdot T$ が存在するための必要十分条件は，任意の $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して零近傍 U が存在し，$\alpha S * \check{T}$ が U で有界，原点で連続になることである。このとき

$$\langle S \cdot T, \alpha \rangle = (\alpha S * \check{T})(0) \quad となる。$$

$S \cdot T$ が存在すれば $S \circ T$ が存在し両者は一致する。$N=1$ のとき，$\sin \frac{1}{x} \circ \delta = 0$ であるが $\sin \frac{1}{x} \cdot \delta$ は存在しない。部分積の概念はこの狭義の積に対しても同様に導入される。ま

た この狭義の積は (I) から (III) の性質, また定理 1 もみたすが, (IV) をみたすかどうかは分かっていない。

<u>例</u> $D=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|<1\}$ とし $\mathcal{H}(D)$ を D での正則関数全体で compact conv. top. をもつ空間とする。$\mathcal{H}(D)\ni h=h_r(\theta)$ が超関数的極限 $\lim_{r\to 1-0} h_r(\theta)$ をもつのは $(1-r)^k h(z)$ が D で有界となる整数 $k>0$ が存在すること, すなわち $h(z)=\sum a_j z^j$ とするとき, $\|h\|_k=\sup_{j\geq 0}|a_j|/(1+j)^k<\infty$ である。そこで $\|h\|_k<\infty$ となる $\mathcal{H}(D)$ の元からなる Banach 空間を γ_k とし, γ を γ_k の inductive limmit とする。γ の元 h の境界値 $(h(z))_+$ の全体を γ_+ で記すと

γ_+ の任意の元 f_1, f_2 に対して常に狭義の積 $f_1\cdot f_2$ が存在する, $f_1=(h_1(z))_+$, $f_2=(h_2(z))_+$ とするとき, $f_1\cdot f_2=(h_1(z)h_2(z))_+$ を得る。

Γ を $\mathbb{C}$ 上の simple analytic arc とし, 領域 G が Γ の一方の側にのみあって, その境界がある open arc $\Gamma_0\subset\Gamma$ を含むとする。$\mathcal{H}(G)$ の元 $h_1(z), h_2(z)$ が境界値 f_1, f_2 をもてば, 積 $f_1\circ f_2$ は存在する。

積 $\circ$ は局所的性質 (III) をもち, diffeomorphism 特に conformal map で不変であることより導びくことができる。

以後 $N=n+1$ とする。$\rho(t)$ を R_t 上の実数値 C^∞-関数

で $t \leqq 1$ に対して 0, $t \geqq 2$ に対して 1 なる関数とし, $\rho_{(\varepsilon)}(t) = \rho(\frac{t}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ と記す。Ω を空でない R^n の開集合, $a > 0$ とし, $u \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, a))$ とする。$\rho_{(\varepsilon)} u$ を $t < \varepsilon$ で 0 と定義して $\mathcal{D}'(\Omega \times (-\infty, a))$ のえとみる。もし上記 ρ のすべてに対して極限 $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \rho_{(\varepsilon)} u$ が $\mathcal{D}'(\Omega \times (-\infty, a))$ で存在し, ρ のとり方に無関係のとき, これを $u_{\sim}$ で記し, u の $t=0$ をこえての canonical ext. と呼ぶ。

$\lim_{t \downarrow 0} u$ $(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u(x, \varepsilon t) = \alpha \otimes Y)$ が存在するとき, $u_{\sim}$ は存在する。$u = \frac{\partial v}{\partial t}$ のとき $u_{\sim}$ の存在と $\lim_{t \downarrow 0} v$ の存在は同値になる。

P は $m \times m$ 行列 $\| P_{ij}(x, t, D_x) \|$ で $P_{ij} = \sum a_{i,j,\alpha}(x, t) D^{\alpha}$, $a_{ij\alpha}(x, t) \in C^{\infty}(\Omega \times (-a, a))$ とする。u, f, α は m 次列ベクトルとして次の初期値問題を考える。

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, D_x) u + f, & \Omega \times (0, a) \\ \lim_{t \downarrow 0} u = \alpha & \end{cases}$$

<u>定理 3</u> [4] $(*)$ の解 $u = {}^t(u_1, \cdots, u_m)$, $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega \times (0, a))$ が存在すれば f は canonical ext. $f_{\sim} = {}^t(f_{1\sim}, \cdots, f_{m\sim})$ をもち,

$$\frac{\partial u_{\sim}}{\partial t} = P(x, t, D_x) u_{\sim} + f_{\sim} + \alpha \otimes \delta, \quad \Omega \times (-a, a).$$

逆に $t < 0$ で 0 になる $v = {}^t(v_1, \cdots, v_m)$, $v_j \in \mathcal{D}'(\Omega \times (-a, a))$ が

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P(x, t, D_x) v + f_{\sim} + \alpha \otimes \delta, \quad \Omega \times (-a, a)$$

をみたせば $u = v|\Omega \times (0, a)$ は $(*)$ の解となり, $u_{\sim} = v$ となる。

超関数の積について狭義のものを考えたと同様に超関数の canonical ext.，境界値についても考えられる。すなわち $\mathrm{supp}\, g_k \subset (0,\infty)$ である任意の δ-列 $\{g_k\}$ に対して，$\rho_k = Y * g_k$ とおく。$u \in \mathcal{D}'(\Omega\times(0,a))$ に対し $\lim \rho_k u$，$\lim \langle u, g_k\rangle$ が上記すべての δ-列 $\{g_k\}$ に対して存在するとき，それぞれ狭義の canonical ext.，狭義の境界値（$s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} u$）という。これらに対しても上の定理は成立する。

$\mathcal{D}'(\Omega\times(0,a))$ の元 u が $\mathcal{D}'(\Omega)\hat{\otimes} C(0,a)$ に属するとき，t にかんして連続と呼ぶ。これは $\mathcal{D}'(\Omega)$-値連続関数 $u(t)$ と同一視される。

<u>定理 4</u>　$u = {}^t(u_1,\cdots,u_m)$，$u_j \in \mathcal{D}'(\Omega\times(0,a))$ が $\Omega\times(0,a)$ で

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x,t,D_x)u + f$$ をみたしているとする。

I. もし $f_\sim = {}^t(f_{1\sim},\cdots,f_{m\sim})$ が存在すれば (1), (2) は同値.

(1) u は $t=0$ を越えて拡張できる.

(2) $\lim_{t\downarrow 0} u$ が存在する.

II. 次の (1), (2) は同値.

(1) u が $0<t<a$ なる t にかんして連続.

(2) $f = \dfrac{\partial g}{\partial t}$ となる任意の g は $0<t<a$ で連続.

III. 次の (1), (2) は同値.

(1) u が $0<t<a$ なる t にかんして連続で $u(t)$ が，t にかんして $\mathcal{D}'(\Omega)$-値連続微分可能.

(2) f が $0<t<a$ なる t にかんして連続．

このとき $u'(t) = P(x,t,D_x)u(t) + f(t)$ をみたす。

II. の略証を超関数の積（部分積）の性質を利用して示す。

(1)⇒(2)．$0<t'<a$ なる任意の点 t' をとり，t' に台をもつ Dirac の δ-関数 $\delta_{(t')}$ を考える．狭義の部分積 $g(x,t)\cdot\delta_{(t')}$ の存在を示せばよい。$u(x,t)\cdot\delta_{(t')} = u(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(1\otimes Y(t-t'))$，$u(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}(1\otimes Y(t-t')) = 0$ より狭義の積にかんする定理1から部分積 $\frac{\partial u}{\partial t}\cdot Y(t-t')$，$u\cdot Y(t-t')$ の存在がわかる。従って $f(x,t)\cdot Y(t-t')$ が存在し，再び同定理を使って部分積 $g(x,t)\cdot\delta_{(t')}$ の存在がわかる。

(2)⇒(1)．$f = \frac{\partial g}{\partial t}$ なる g が $0<t<a$ で連続であることより，$0<t'<a$ の任意の t' に対して (1)⇒(2) の証明と同様にして $f(x,t)\cdot Y(t-t')$ の存在を知る。故に f は $t=t'$ を越えて狭義の canonical ext. $f_\sim$ をもつから定理3を $t=t'$ で考えて

$$\frac{\partial u_\sim}{\partial t} = P(x,t,D_x)u_\sim + f_\sim + \alpha\otimes\delta_{(t')}$$

をみたす。任意の開集合 $G\subset\subset\Omega$ に対し $Y_{k_0+1} *_t u_\sim$ が $G\times(0,a)$ で t にかんして連続になる正の整数 k_0 がえらべる。ここに $Y_\ell = x_+^\ell$ で $Y_0=\delta$，$Y_1 = Y$ を意味する。また $*_t$ は t にかんする部分合成積である。$\phi\in\mathcal{E}(R^{n+1})$，$v\in\mathcal{D}'(R^{n+1})$ に対し

$$Y_\ell *_t (\phi v) = \sum_j (-1)^j \binom{\ell}{j} Y_j *_t ((D^j\phi)(Y_\ell *_t v))$$

を利用して，u の t にかんする連続性が導びける。

μ を $\Xi^{n+1}=(R^{n+1})'$ 上の temperate weight function とし，空間 $B_{p,\mu}(R^{n+1})$, $1\le p<\infty$ [1] を考える。$\mathcal{D}(R^{n+1})$ は $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ で稠密である。写像 $\mathcal{D}(R^{n+1})\ni u\to u(x,0)\in\mathcal{D}'(R^n)$ が連続的に $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ から $\mathcal{D}'(R^n)$ へ拡張できるとき，この拡張された写像を跡写像と呼ぶ。$B_{p,\mu}(R^{n+1})\ni u$ の像を同じ記号 $u(x,0)$ で記す。

跡写像が存在するための条件は任意の $\phi\in\mathcal{D}(R^{n+1})$ に対して $\phi\otimes\delta\in B_{p',1/\mu}(R^{n+1})$ である。ここに $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ で δ は空間 R_t での Dirac の δ－関数である。

$R^{n+1}_+=\{(x,t)\in R^{n+1};\ t>0\}$ とし $\mathcal{D}'(R^{n+1}_+)\ni u$ に対して $\lim_{t\downarrow 0}(u|R^{n+1}_+)$ が存在するとき $\lim_{t\downarrow 0}u$ と記し u の境界値と呼ぶことにする。Δ-$\lim_{t\downarrow 0}u$ についても同様である。跡写像の存在条件を境界値，δ との部分積の関係で示すことが出来る。

定理 5 [5, 6, 7] 空間 $B_{p,\mu}(R^{n+1})$, $1\le p<\infty$ に対し次の命題は同値である。

(1) 跡写像 $B_{p,\mu}(R^{n+1})\ni u\to u(x,0)\in\mathcal{D}'(R^n)$ が定義できる。

(2) $B_{p,\mu}(R^{n+1})\ni {}^{\forall}u$ に対して部分積 $\delta\circ u$ が存在する。

(2)′ $B_{p,\mu}(R^{n+1})\ni {}^{\forall}u$ に対して部分積 $\delta\cdot u$ が存在する。

(3) $B_{p,\mu}(R^{n+1})\ni {}^{\forall}u$ と，$\mathcal{D}(R^{n+1})$ のある固定した restricted δ－列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}(1\otimes\delta)(u*\rho_j)$ が存在する。

(3)′ $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni {}^\forall u$ と，$\mathcal{D}(R^{n+1})$ のある固定した δ－列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}(1\otimes\delta)(u*\rho_j)$ が存在する。

(4) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni {}^\forall u$ と，$\mathcal{D}(R_t)$ のある固定した restricted δ－列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}\rho_j u$ が存在する。

(4)′ $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni {}^\forall u$ と，$\mathcal{D}(R_t)$ のある固定した δ－列に対して $\lim_{j\to\infty}\rho_j u$ が存在する。

(5) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni {}^\forall u$ に対して $\lim_{t\downarrow 0} u$ が存在する。

(5)′ $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni {}^\forall u$ に対して $s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} u$ が存在する。

このとき，u は $B_{p,\nu_{p'}}(R^n)$－値連続関数 $u(t)$ と同一視される。ここに

$$\nu_{p'}(\xi)=\begin{cases}\left\{\displaystyle\int \frac{1}{\mu^{p'}(\xi,\tau)}\,d\tau\right\}^{1/p'} & p>1\\[2ex] \inf_\tau \mu(\xi,\tau) & p=1\end{cases}.$$

$\mathcal{D}'(R^{n+1}_+) \ni u$ に対し，$(u\,|\,R^{n+1}_+)_\sim$ が存在するとき，u_+ と記し，u の canonical ext. と呼ぶことにする。

<u>定理 6</u> [8] $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni {}^\forall u$ に対して u_+ が存在するための条件は

$$\begin{cases}(1+\tau^2)^{-1/2}\mu^{-1}(0,\tau)\in L^{p'} & p>1\\ \inf\,(1+\tau^2)^{1/2}\mu(0,\tau)>0 & p=1\end{cases}$$

である。

写像 $\mathcal{D}(R^{n+1}) \ni u \to u_+ \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ が $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ から $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ へ連続的に拡張できるとき，拡張された写像を $\tilde{Y}$ で記す。$\tilde{Y}$ が存在するための条件は $\mathcal{D}(R^{n+1})$ の任意の元 φ に対して $\varphi_+ \in B_{p',1/\mu}(R^{n+1})$ である。Y を空間 R_t での Heaviside 関数とするとき

<u>定理7.</u> $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して u_+ が存在するための条件は，次の各命題と同値である。

(1) 写像 $\tilde{Y}: B_{p,\mu}(R^{n+1}) \to \mathcal{D}'(R^{n+1})$ が定義される。

(2) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して部分積 $Y \circ u$ が存在する。

(2)′ $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ に対して部分積 $Y \cdot u$ が存在する。

(3) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と，$\mathcal{D}(R^{n+1})$ のある固定した restricted δ－列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}(u*\rho_j)Y$ が存在する。

(3)′ $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と，$\mathcal{D}(R^{n+1})$ のある固定した δ－列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}(u*\rho_j)Y$ が存在する。

(4) $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と，$\mathcal{D}(R_t)$ のある固定した restricted δ－列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}(Y*\rho_j)u$ が存在する。

(4)′ $B_{p,\mu}(R^{n+1}) \ni \forall u$ と，$\mathcal{D}(R_t)$ のある固定した δ－列 $\{\rho_j\}$ に対して $\lim_{j\to\infty}(Y*\rho_j)u$ が存在する。

$B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の任意の元 u に対して $D_t v - iv = u$ となる $v \in B_{p,(1+\tau^2)^{1/2}\mu}(R^{n+1})$ が存在し，定理4から u_+ の存在と $\lim_{t\downarrow 0} v$ の存在が対応し，上の2定理が結びつけられる。

$p>1$ のとき，$B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の任意の元 u に対して $Y\circ u$ が存在し，$B_{p,\mu}(R^{n+1})$ に入るとき，写像 $B_{p,\mu}(R^{n+1})\ni u\longrightarrow Y\circ u\in B_{p,\mu}(R^{n+1})$ が連続になる。従って $B_{p',1/\mu}(R^{n+1})$ の任意の元 v に対して $Y\circ v$ が存在し $Y\circ v\in B_{p',1/\mu}(R^{n+1})$ である。$\overline{R}^{n+1}_{+}$ に台をもつ $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の元からなる $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の閉部分空間を $B^{+}_{p,\mu}$ とする。$B^{-}_{p,\mu}$ についても同様である。

定理8. $B_{p,\mu}(R^{n+1})$ の任意の元 u に対して，部分積 $Y\circ u$ が存在するとき $(1<p<\infty)$，次の命題は同値である。

(1) $B_{p,\mu}(R^{n+1})\ni{}^{\forall}u$ に対して $Y\circ u\in B_{p,\mu}(R^{n+1})$.

(2) $B_{p',1/\mu}(R^{n+1})\ni{}^{\forall}u$ に対して $Y\circ u\in B_{p',1/\mu}(R^{n+1})$.

(3) $\mathcal{D}(R^{n+1})\ni{}^{\forall}\phi$ に対して $Y\phi\in B_{p',1/\mu}(R^{n+1})$ でかつ

$$B_{p,\mu}(R^{n+1}) = B^{+}_{p,\mu} + B^{-}_{p,\mu} \quad (\text{位相和})$$

(4) $\mathcal{D}(R^{n+1})\ni{}^{\forall}\phi$ に対して $Y\phi\in B_{p,\mu}(R^{n+1})$ でかつ

$$B_{p',1/\mu}(R^{n+1}) = B^{+}_{p',1/\mu} + B^{-}_{p',1/\mu} \quad (\text{位相和})$$

最後に超関数の積について注意したい。よく知られているように，任意の $S\in\mathcal{D}'(R)$ は上下半平面で正則な関数 $\hat{S}(z)$ の上下からの境界値として表現される。$\hat{S}_\varepsilon=\hat{S}(x+i\varepsilon)-\hat{S}(x-i\varepsilon)$ とおく。任意の $S, T\in\mathcal{D}'(R)$ に対して $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\hat{S}_\varepsilon\hat{T}_\varepsilon$ が存在するとき，もっと一般に $\hat{S}_\varepsilon\hat{T}_\varepsilon$ の Hadamard の意味における有限部分をとることによって H. G. Tillmann は積[2]を定義し

た。この積は有用でもあるし，具体的に計算もしやすい。しかし，この積は最初にのべた積の基本的性質（I）(4)，（II）はみたしていない。また $N \geq 2$ に自然な方法で拡張できるが，積に関して零因子があらわれる。

量子力学などへの応用も考えての積の定義は Klaus Keller 氏の論文 [9] にくわしい。また $N=1$ のとき Non-standard Analysis の立場で Li-Bang-He [10] の研究がある。

References

[1] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, 1969.

[2] M. Itano, On the multiplicative products of distributions, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 29(1965), 51-74.

[3] M. Itano, On the theory of the multiplicative products of distributions, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 30(1966), 151-181.

[4] M. Itano, On the fine Cauchy problem for the system of linear partial differential equations, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 33(1969), 11-27.

[5] M. Itano, Note on the canonical extensions and the boundary values for distributions in the space H^{μ}, Hiroshima Math. J. 1(1971), 405-425.

[6] M. Itano, On the trace mappings for the space $B_{p,\mu}(R^N)$,

Hiroshima Math. J. 8(1978), 165-180.

[7] M. Itano, On the trace mappings in the space $B_{1,\mu}(R^N)$, Hiroshima Math. J. 11(1981), 561-570.

[8] M. Itano, On the canonical extensions for distributions in the space $B_{p,\mu}$, Studia Math. 77(1983), to appear.

[9] K.Keller, Analytic regularizations, finite part prescriptions and products of distributions, Math. Ann. 236(1978), 49-84.

[10] Li Bang-He, Non-standard analysis and multiplication of distributions, Scientia Sinica 11(1978), 561-585.

[11] S. Łojasiewicz, Sur la fixation des variables dans une distribution, Studia Math. 17(1958), 1-64.

[12] R. Shiraishi, On the value of distributions at a point and the multiplicative products, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I(1967), 89-104.

[13] R. Shiraishi and M. Itano, On the multiplicative products of distributions, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 28(1964), 223-235.