数理解析研究所講究録
第508巻 1983年 148-162

超関数とくりこみ不可能な場の理論

徳島大学工業短大部　長町重昭 (Shigeaki Nagamachi)

Wightman [3] 等によって始められた公理論的場の量子論は，Jaffe [1]，麦林 長町 [2] によって，tempered distribution を用いた formulation から ultra distribution さらに hyperfunction を用いた formulation へと拡張された。この拡張の目的の一つは，くりこみ不可能な理論をもその公理系の枠内でとりあつかえるようにするためである。ここではその目的がある簡単なモデルに対して達せられていることを示す。まず自由場の話から始める。

§1. 自由場.

まず2点 Schwinger 関数 $S(y)$ を

$$(1.1)\quad S(y) = (2\pi)^{-4}\int \frac{e^{ip\cdot y}}{(p^0)^2+\mathbb{p}^2+m^2}\,dp = (2\pi)^{-3}\int \frac{e^{-\sqrt{\mathbb{p}^2+m^2}\,|y^0|}\,e^{i\mathbb{p}\cdot\mathbb{y}}}{2\sqrt{\mathbb{p}^2+m^2}}\,d\mathbb{p}$$

$p=(p_0,\cdots p_3)=(p_0,\mathbb{p})$　$y=(y^0,\cdots,y^3)=(y^0,\mathbb{y})$　$p\cdot y = p_0y^0+\mathbb{p}\cdot\mathbb{y}$

で定義する。これは $y^0 \neq 0$ で正則であって，次に定義する 2点 Wightman 関数 $D^{(-)}(x)$

(1.2) $D^{(-)}(x) = (2\pi)^{-3}\int e^{-ik\cdot x}\,\delta(k^2-m^2)\,\theta(k_0)\,dk$

$$= (2\pi)^{-3}\int \frac{e^{-i\sqrt{\mathbb{k}^2+m^2}\,x^0}\,e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}}}{2\sqrt{\mathbb{k}^2+m^2}}\,d\mathbb{k}$$

$$k\cdot x = k_0 x^0 - \mathbb{k}\cdot\mathbb{x} \qquad k^2 = (k_0)^2 - \mathbb{k}^2$$

とは

(1.3) $D^{(-)}(-i|y^0|, \mathbb{y}) = S(y^0, \mathbb{y}) = S(y)$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} S(ix^0+\varepsilon, \mathbb{x}) = \lim_{\varepsilon\to+0} D^{(-)}(x^0-i\varepsilon, \mathbb{x}) = D^{(-)}(x)$$

なる関係がある。 $\mathcal{S}(R^4)\times\mathcal{S}(R^4)$ 上の双1次形式を

(1.4) $C(f, g) = \int S(x-y)\, f(x)\, g(x)\, dx\,dy$

で定義すると，これは連続で正定値であるので

(1.5) $e^{-C(f,f)/2} = \int e^{i\phi(f)}\, d\phi_c$

を満たすガウス測度 $d\phi_c$ が $\mathcal{S}'(R^4)$ 上に存在する。
そして $d\phi_c$ は次の性質をもつ。

(1.6) $\int \phi(f_1)\cdots\phi(f_{2m})\, d\phi_c = \sum_{i_\ell<j_\ell} C(f_{i_1}, f_{j_1})\cdots C(f_{i_m}, f_{j_m})$

ただし和は pairing 全体にわたってとる。そこで 2n 点
Schwinger 関数を

(1.7) $S_{2n}(y_1, \cdots, y_{2n}) = \sum_{i_\ell<j_\ell} S(y_{i_1}-y_{j_1})\cdots S(y_{i_m}-y_{j_m})$

で定義する。また $2m+1$ 点関数は，対応する (1.6) が 0 となることから，0 と定義する。Wightman 関数は，Schwinger 関数から関係 (1.3) によって定義される。

$$(1.8) \quad W_{2m}(x_1,\cdots,x_{2m}) = \sum_{i_\ell<j_\ell} D^{(-)}(x_{i_1}-x_{j_1})\cdots D^{(-)}(x_{i_m}-x_{j_m})$$

このような Wightman 関数をもつ場を自由（中性スカラー）場という。つまり真空 $\Psi_0\in H$ に対して

$$(1.9) \quad (\Psi_0, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\Psi_0) = W_n(x_1,\cdots,x_n)$$

を満足する，Hilbert 空間 H で定義された作用素を値にとる distribution $\varphi(x)$ を自由場という。

§2. Wick 積.

確率変数の積 $\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)$ に対して Wick 積を

$$(2.1) \quad :\phi(f_1)\cdots\phi(f_\ell): = \sum_{r=0}^{[\ell/2]}(-1)^r\sum_{C_r}\int\phi(f_{j_1})\cdots\phi(f_{j_{2r}})\,d\phi_C\ \phi(f_{k_1})\cdots\phi(f_{k_{\ell-2r}})$$

C_r は $1,\cdots,\ell$ を $j_1<\cdots<j_{2r}$; $k_1<\cdots<k_{\ell-2r}$ に分ける分割の全体

と定義し，

$$(2.2) \quad :\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_\ell): = \sum_{r=0}^{[\ell/2]}(-1)^r\sum_{C_r}(\Psi_0,\varphi(x_{j_1})\cdots\varphi(x_{j_{2r}})\Psi_0)\,\varphi(x_{k_1})\cdots\varphi(x_{k_{\ell-2r}})$$

と自由場の積に対しても Wick 積を定義する。基本的な関係式は，

$$(2.3) \quad :e^{\phi(f)}: = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{:\phi(f)^n:}{n!} = e^{-C(f,f)/2}\,e^{\phi(f)}$$

である。これより

(2.4) $\int :e^{\phi(f)}::e^{\phi(g)}:d\phi_c = e^{C(f,g)}$

が得られ， $f\to\delta_x$　$g\to\delta_y$ とすることにより，

(2.5) $\int :e^{\phi(x)}::e^{\phi(y)}:d\phi_c = e^{S(x-y)}$

これを解析接続して，境界値をとることによって，

(2.6) $(\Psi_0, :e^{\varphi(x)}::e^{\varphi(y)}:\Psi_0) = e^{D^{(-)}(x-y)}$

となるが，これは distribution ではない Fourier hyperfunction である。つぎにこのことを示す。

§3. $D^{(-)}(x)$ の特異性

(1.2) において $m=0$ とおいたものは

(3.1)
$$D^{(-)}(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{e^{-i|\mathbb{k}|x^0}e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}}}{|\mathbb{k}|}d\mathbb{k}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2(2\pi)^3}\int\frac{e^{-i|\mathbb{k}|(x^0-i\varepsilon)}e^{i|\mathbb{k}||\mathbb{x}|\cos\theta}}{|\mathbb{k}|}|\mathbb{k}|^2\sin\theta\, d|\mathbb{k}|\,d\theta\,d\varphi$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{(x^0-i\varepsilon)^2-\mathbb{x}^2}$$

となる。(3.1) の $\mathbb{k}$ についての積分は $\mathbb{k}=0$ の近くでは可積分であるので，(1.2) において $m\neq 0$ としたものと，同じような特異性を示す。$m\neq 0$ のときに，(3.1) のような特異性があらわにわかるような $D^{(-)}(x)$ の表示を求めるのは少しめんどうなので

(3.2)
$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int\frac{e^{-\sqrt{\mathbb{k}^2+m^2}\,\varepsilon}}{\sqrt{\mathbb{k}^2+m^2}}d\mathbb{k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}\,\varepsilon}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+m^2}}|\mathbf{k}|^2\, d|\mathbf{k}|$$

とおくと，

(3.3) $\quad |D(x^0-i\varepsilon, \mathbf{x})| \leqq g(\varepsilon) = D(0-i\varepsilon, 0)$

であって，

(3.4) $\quad |\mathbf{k}| = (s/\varepsilon)$

とおくと，

(3.5) $\quad \varepsilon^2 g(\varepsilon) = \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_0^\infty \exp\left[-s\sqrt{1+(\varepsilon m/s)^2}\,\right]\frac{s}{\sqrt{1+(\varepsilon m/s)^2}}\,ds$

であって

(3.6) $\quad \varepsilon^2 g(\varepsilon) \longrightarrow \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_0^\infty e^{-s}\, s\, ds \qquad (\varepsilon \to +0)$

となるので $m \neq 0$ のときも ε^{-2} の位数の特異性を持つことがわかる。$D^{(-)}(x)$ は (1.2), (1.3) からわかるように，$\mathrm{Im}\, x^0 < 0$ に含まれる ある錐からの境界値であって，実軸へ近ずくときの位数が ε^{-2} だから 積は，distribution として定義できる。しかし

(3.7) $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n D^{(-)}(x)^n$

が distribution になるのは，有限個 をのぞいて，$a_n = 0$ となるときである。したがって (2.6) は distribution としては意味をもたない。それでは

hyperfunction としてはどうかを考える。場の理論では Fourier 変換が定義できないといけないので，(3.7) がいかなる場合に Fourier hyperfunction を定義するかを調べてみる。まず $D^{(-)}(x)^2$ の Fourier 変換を計算する。これは超関数 $\delta(k^2-m^2)\theta(k_0)$ の合成積だから

(3.8) $$\frac{1}{(2\pi)^4}\int \delta(k^2-m^2)\,\delta((p-k)^2-m^2)\,\theta(k_0)\,\theta(p_0-k_0)\,dk$$

である。ここで

(3.9) $$k_0=k_0,\quad k_1=r\sin\theta\cos\varphi,\quad k_2=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$k_3=r\cos\theta,\quad r=\sqrt{(k_0)^2-k^2}$$

とおいて

(3.10) $$k^0,\ k^2,\ \theta,\ \varphi,\qquad 0\leqq\theta\leqq\pi,\qquad 0\leqq\varphi\leqq 2\pi$$

を新しい変数とし，静止系 $p=(E,0)$ において，(3.8) を計算すると，

(3.11) $$\frac{1}{(2\pi)^4}\int \delta(k^2-m^2)\,\delta(E^2-2Ek_0+k^2-m^2)\,\theta(k_0)\,\theta(E-k_0)\times\frac{r}{2}\sin\theta\,dk^2\,d\theta\,d\varphi\,dk_0$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\delta(E^2-2Ek_0)\,\theta(k_0-m)\,\theta(E-k_0)\,\frac{1}{2}\sqrt{(k_0)^2-m^2}\times\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dk_0$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_m^E\frac{1}{2E}\,\delta\!\left(\frac{E}{2}-k_0\right)\sqrt{(k_0)^2-m^2}\,dk_0$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E}\sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2-m^2}\;=\;\frac{1}{4(2\pi)^3}\,\frac{\sqrt{E^2-(2m)^2}}{E}$$

となる。この関数はもともと Lorentz 不変であり、(3,8) から p は $p_0 \geqq 0$, $p^2 \geqq (2m)^2$ を満足しなければならないから (3,11) は

$$(3,12)\qquad \frac{1}{4(2\pi)^3}\,\theta(p_0)\,\theta(p^2-(2m)^2)\,\frac{\sqrt{p^2-(2m)^2}}{\sqrt{p^2}}$$

$m=0$ のときは

$$(3,13)\qquad \frac{1}{4(2\pi)^3}\,\theta(p_0)\,\theta(p^2)$$

となる。次に $D^{(-)}(x)^n$ の Fourier 変換を計算したいのであるが、$m \neq 0$ のときはむずかしいので、$m=0$ の場合を計算する。そのときは

$$(3,14)\qquad \frac{1}{(2\pi)^{2n-1}}\,\frac{1}{4^{n-1}}\,\frac{1}{(n-1)\{(n-2)!\}^2}\,(p^2)^{n-2}\,\theta(p_0)\,\theta(p^2)$$

である。$n=2$ のときは (3,13) に一致する。あとは帰納法で示す。次の式が成立することより明らかである。

$$(3,15)\qquad \frac{1}{2\pi}\int (k^2)^{n-2}\theta(k^2)\theta(k_0)\,\delta((p-k)^2)\,\theta(p_0-k_0)\,dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int (k^2)^{n-2}\theta(k^2)\theta(k_0)\,\delta(E^2-2Ek_0+k^2)\,\theta(E-k_0) \times \frac{r}{2}\sin\theta\, dk^2\, d\theta\, d\varphi\, dk_0$$

$$= \int \theta(2Ek_0-E^2)(2Ek_0-E^2)^{n-2}\theta(k_0)\,\theta(E-k_0)(E-k_0)\,dk_0$$

$$= \int_{E/2}^{E} E^{n-1}(2k_0-E)^{n-2}(E-k_0)\,dk_0$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{n(n-1)}\,E^{2(n-1)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{n(n-1)}\,(p^2)^{n-1}\,\theta(p_0)\,\theta(p^2)$$

最後の式は (3,12) を導びいたのと同様に導びく。

$m \neq 0$ のときの $D^{(-)}(x)^n$ の Fourier 像は

(3,16) $$\frac{1}{(2\pi)^{2n-1}}\frac{1}{4^{n-1}}\frac{1}{(n-1)\{(n-2)!\}^2}(p^2)^{n-2}\theta(p_0)\,\theta(p^2-(nm)^2)$$

であたえられる。 $n=2$ のときは (3,12) より明らかで，あとは帰納法で示す。次式がそれを示している。

(3,17) $$\frac{1}{2\pi}\int (k^2)^{n-2}\theta(k^2-(nm)^2)\,\theta(k_0)\,\delta((p-k)^2-m^2)\,\theta(p_0-k_0)\,dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int (k^2)^{n-2}\,\theta(k^2-(nm)^2)\,\theta(k_0)\,\delta(E^2-2Ek_0+k^2-m^2)$$
$$\times\,\theta(E-k_0)\,\frac{r}{2}\sin\theta\,dk^2 d\theta\, d\varphi\, dk_0$$

$$= \int (-E^2+2Ek_0+m^2)^{n-2}\,\theta(-E^2+2Ek_0+m^2-(nm)^2)\,\theta(k_0)$$
$$\times\,\theta(E-k_0)\sqrt{(k_0)^2+E^2-2Ek_0-m^2}\;\theta((k_0)^2+E^2-2Ek_0-m^2)\,dk_0$$

$$= \int_{\frac{E}{2}+\frac{(n^2-1)}{2E}m^2}^{E-m} (-E^2+2Ek_0+m^2)^{n-2}\sqrt{(E-k_0)^2-m^2}\;dk_0$$

$$= \int_{\frac{E}{2}+\frac{n^2}{2E}m^2}^{E-m+\frac{m^2}{2E}} (-E^2+2Ek_0)^{n-2}\sqrt{\left(E-k_0+\frac{m^2}{2E}\right)^2-m^2}\;dk_0$$

$$\leqq \int_{\frac{E}{2}}^{E} E^{n-2}(2k_0-E)^{n-2}(E-k_0)\,dk_0$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{n(n-1)}\,E^{2(n-1)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{n(n-1)}(p^2)^{n-1}\theta(p_0)\,\theta(p^2-\{(n+1)m\}^2)$$

最後の等式は，(3.12) を導びいたのと同様に導びく。

$m=0$ のときは (3,14) より $n \geqq 2$ に対して

$$(3.18)\qquad D^{(-)}(x)^n = \frac{1}{(2\pi)^{2n-1}}\frac{1}{4^{n-1}}\frac{1}{(n-1)\{(n-2)!\}^2}(-\Box)^{n-1}D^{(-)}(x)^2$$

である。さて (3.7) が Fourier hyperfunction になるのはその Fourier 変換がそうなるときである。整関数

$$(3.19)\qquad g(p) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^{2n}$$

が infra exponential になるための条件は

$$(3.20)\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(2n)!\,|b_n|} = 0$$

であって，これは作用素

$$(3.21)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(-\Box)^n$$

が局所作用素になるための条件と一致している。(3.7) と (3.14) より (3.19) が

$$(3.22)\qquad b_n = \frac{1}{(2\pi)^{2n+3}}\frac{1}{4^{n+1}}\frac{1}{(n+1)(n!)^2}a_n$$

に対して infra exponential になるための条件は，

$$(3.23)\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|a_n|} = 0 \quad \text{である。}$$

$a_n = \frac{1}{n!}$ はこの条件をみたすので (2.6) の $e^{D^{(-)}(x)}$ は Fourier hyperfunction である。$m \neq 0$ のときも (3.16) を (3.14) でおさえることによって，$e^{D^{(-)}(x)}$ が Fourier hyperfunction であることがわかる。

§4. くりこみ不可能な場の理論

次の Lagrangian 密度

$$
(4.1)\quad \begin{cases} L(x) = L_F(x) + L_I(x) \\ L_F(x) = -\overline{\Psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + M)\Psi(x) - \frac{1}{2}\{(\partial_\mu \varphi(x))^2 + m^2 \varphi(x)^2\} \\ L_I(x) = i\lambda(\overline{\Psi}(x)\gamma_\mu \Psi(x))\partial_\mu \varphi(x) \end{cases}
$$

で定義される理論を考える。くりこみ可能性に関しては，次のことが知られている。光速度 c と planck の定数 $\hbar$ を 1 とするような単位系（自然単位系）では，全ての物理量は長さのべきの次元をもつ。相互作用定数 λ の次元が $[\lambda] = L^\alpha$ となるとき $\alpha \leqq 0$ ならばくりこみ可能，$\alpha > 0$ ならば，くりこみ不可能である。(4.1) の場合は $\alpha = 1$ となるので，くりこみ不可能である。さて，(4.1) を量子化するのであるが，ここでは Path integral によってそれを行うことにする。Feynman によると，(4.1) で定義される古典場に対応する，量子場の Wightman 関数は

$$
(4.2)\quad \int \Psi_\alpha(x_1)\overline{\Psi}_\beta(x_2)\, e^{i\int L(\Psi,\overline{\Psi},\phi)dx}\, \mathcal{D}(\Psi,\overline{\Psi})\,\mathcal{D}(\phi)
$$

で与えられる。ここで $\mathcal{D}(\phi)$ は関数空間上の Lebesgue 測度で $\mathcal{D}(\Psi,\overline{\Psi})$ は Grassmann 数を値にとる関数 $\Psi\ \overline{\Psi}$ の空間上の測度である。これらの測度を数学的に構成するのは困難であるが，それはさておいて，形式的に計算してみよう。

(4.3) $\psi(x) = e^{i\lambda\varphi(x)}\psi'(x) \qquad \overline{\psi}(x) = e^{-i\lambda\varphi(x)}\overline{\psi}'(x)$

とおいて，(4.1) に代入すると

(4.4) $L(\psi, \overline{\psi}, \varphi) = L_F(\psi', \overline{\psi}', \varphi)$

となる。(4.2) を変数変換 (4.3) を行って計算すると，

(4.5)
$$\int e^{i\lambda\varphi(x_1)}\psi'_\alpha(x_1)\, e^{-i\lambda\varphi(x_2)}\overline{\psi}'_\beta(x_2)\, e^{i\int L_F(\psi', \overline{\psi}', \varphi)(x)dx} \times J\, \mathcal{D}(\psi', \overline{\psi}')\, \mathcal{D}(\varphi)$$
$$= \int e^{i\lambda\varphi(x_1)}\, e^{-i\lambda\varphi(x_2)}\, e^{i\int L_F(\varphi)(x)dx}\, \mathcal{D}(\varphi) \times \int \psi'_\alpha(x_1)\, \overline{\psi}'_\beta(x_2)\, e^{i\int L_F(\psi', \overline{\psi}')(x)dx}\, \mathcal{D}(\psi', \overline{\psi}')$$

J は変数変換 (4.3) にともなう Jacobian であるが，ψ と $\overline{\psi}$ は逆数で変換されるので $J = 1$ となるべきである。(4.5) の最後の積分は，自由 Dirac 場の２点関数を与えるべきであり，その前の積分は，直接計算しないで，対応する Schwinger 関数を Gauss 測度を用いて計算して後に解析接続して Wightman 関数を求める。つまり

(4.6)
$$\int \psi'_\alpha(x_1)\, \overline{\psi}'_\beta(x_2)\, e^{i\int L_F(\psi', \overline{\psi}')(x)dx}\, \mathcal{D}(\psi', \overline{\psi}') = S_{F,\alpha,\beta}(x_1 - x_2)$$

(4.7)
$$\int e^{i\lambda(\phi(x_1) - \phi(x_2))}\, d\phi_C$$
$$= \exp -\frac{\lambda^2}{2} C(\delta_{x_1} - \delta_{x_2}, \delta_{x_1} - \delta_{x_2}) = e^{\lambda^2[S(x_1 - x_2) - S(0)]}$$

である。最後の $e^{-\lambda^2 S(0)}$ は無意味な無限小だから，

これをおとす。つまり (4.7) の代わりに

(4.8) $$\int :e^{i\lambda\phi(x_1)}::e^{-i\lambda\phi(x_2)}:\,d\phi_c = e^{\lambda^2 S(x_1-x_2)}$$

とするのである。これから Wightman 関数は

(4.9) $$(\Psi_0, :e^{i\lambda\varphi(x_1)}::e^{-i\lambda\varphi(x_2)}:\Psi_0) = e^{\lambda^2 D^{(-)}(x_1-x_1)}$$

となる。このように、この理論はくりこみ可能でないけれども、つまり (4.2) を λ のべき級数に展開して、各次数での発散を物理量に関連させて処理するという、せつどう論的くりこみはできないけれども、Wick 積を考えるという自然な方法で無限大は処理できて、結果は distribution でない Fourier hyperfunction となる。また一般に

(4.9) $$\int \prod_{j=1}^{n} :e^{i\lambda_j\phi(x_j)}:\,d\phi_c$$
$$= \int e^{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\phi(x_j)}\, e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 C(\delta_{x_j},\delta_{x_j})}\,d\phi_c$$
$$= \exp -\frac{1}{2}C\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\delta_{x_j}, \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\delta_{x_k}\Big)\exp\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 C(\delta_{x_j},\delta_{x_j})$$
$$= \prod_{j<k}^{n} \exp -\lambda_j\lambda_k S(x_j-x_k)$$

となるので

(4.10) $$(\Psi_0 \prod_{j=1}^{n} :e^{i\lambda_j\varphi(x_j)}:\Psi_0) = \prod_{j<k}^{n} e^{-\lambda_j\lambda_k D^{(-)}(x_j-x_k)}$$

となってこれも Fourier hyperfunction である。このようにして、$\psi(x)$ についての Wightman 関数は、自由 Dirac 場 $\psi(x)$ の Wightman 関数（これは tempered distribution) と $:e^{\pm i\lambda\phi(x)}:$ の Wightman 関数 (4.10) の積である。(Wightman 関数は、ある定まった開領域からの境界値であるから、積は定義できる。) 最後に (4.5) の計算を数学的にちゃんとやる。

§5. 超準解析

N を無限大の超自然数、 $\Delta = \sqrt{\pi}/N$ $L = N^2$

${}^*\mathbb{Z}$ を超整数の全体とする。間隔 Δ で長さ $2L$ の格子を $\Gamma = \Delta{}^*\mathbb{Z}/2L{}^*\mathbb{Z}$ とする。測度 $D(\psi^1,\psi^2)$ $G(\phi)$ を e_μ を μ 軸方向の長さ Δ のベクトルとして

$$(5.1)\quad D(\psi^1,\psi^2) = C\exp\Big\{-\sum_{x\in\Gamma^4}\psi^2(x)\big[\gamma_\mu^E(\psi^1(x+e_\mu)-\psi^1(x-e_\mu))/2\Delta + M\psi^1(x)\big]\Delta^4 \prod_{x\in\Gamma^4}\prod_{r=1}^{4} d\psi_r^2(x)\, d\psi_r^1(x)$$

$$(5.2)\quad G(\phi) = C\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{x\in\Gamma^4}\phi(x)\Big[\Big\{\sum_\mu(\phi(x+e_\mu)+\phi(x-e_\mu)) - 8\phi(x)\Big\}/2\Delta - m^2\phi(x)\Big] \prod_{x\in\Gamma^4} d\phi(x)$$

と定義する。ただし σ_j を Pauli 行列

$$(5.3)\quad \sigma_0 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

として

$$(5.4)\quad \gamma_0^E = \sigma_3\otimes\sigma_0 = \begin{pmatrix}\sigma_0&0\\0&-\sigma_0\end{pmatrix},\quad \gamma_j^E = \sigma_2\otimes\sigma_j = \begin{pmatrix}0&-i\sigma_j\\i\sigma_j&0\end{pmatrix}\quad (j=1,2,3)$$

C は 1 の積分が 1 になるように正規化するための定数である。ただし $\psi_r^j(x)$, $d\psi_r^j(x)$ は Grassmann 数であってその積分は，規則

(5.5) $\displaystyle\int d\psi_r^j(x) = 0 , \quad \int \psi_r^j(x)\, d\psi_r^j(x) = 1$

によって行う。 $G(\phi)$ は Gauss 測度で $d\phi_C$ が対応している。

(5.6) $L_I(x) = \frac{1}{2}\psi^2(x)\, e^{i\lambda\phi(x)}\gamma_\mu^E[\psi^1(x+e_\mu)(e^{-i\lambda\phi(x)} - e^{-i\lambda\phi(x+e_\mu)})/\Delta + \psi^1(x-e_\mu)(e^{-i\lambda\phi(x)} - e^{-i\lambda\phi(x-e_\mu)})/\Delta]$

とおく，これは無限小の差分を微分と思えば (4.1) の $L_I(x)$ (の Euclid 化したもの) である。そして Schwinger 関数は，

(5.7) $\displaystyle\int \psi_\alpha^1(x_1)\psi_\beta^2(x_2)\exp\Big(\sum_{x\in P^4} L_I(x)\Big)\, D(\psi^1,\psi_2)\, G(\phi)$

で与えられる。これが (4,2) に対応するものである。

(5.8) $\psi^1(x) = e^{i\lambda\phi(x)}\psi^{1\prime}(x) \quad \psi^2(x) = e^{-i\lambda\phi(x)}\psi^{2\prime}(x)$

とおくと， (5,7) は

(5.8) $\displaystyle\int e^{i\lambda\phi(x_1)}\psi_\alpha^{1\prime}(x_1)\, e^{-i\lambda\phi(x_2)}\psi_\beta^{2\prime}(x_2)\, D(\psi^{1\prime},\psi^{2\prime})\, G(\phi)$

$\displaystyle = \int \psi_\alpha^{1\prime}(x_1)\psi_\beta^{2\prime}(x_2)\, D(\psi^{1\prime},\psi^{2\prime}) \int e^{i\lambda\phi(x_1)} e^{-i\lambda\phi(x_2)}\, G(\phi)$

となり Wick 積によって無限大は処理できて，その標準部分は

(5.9) $(\Psi_0, T(\hat{\psi}_\alpha'(x_1)\hat{\bar{\psi}}_\beta'(x_2))\Psi_0)\; e^{\lambda^2 S(x_1-x_2)}$

となる。$(\Psi_0, T(\hat{\psi}'_\alpha(x_1)\hat{\bar{\psi}}'_\beta(x_2))\Psi_0)$ は自由 Dirac 場の2点 Schwinger 関数である。これを解析接続することによって，Wightman 関数

(5.10) $$S_{F,\alpha,\beta}(x_1-x_2)\, e^{\lambda^2 D^{(-)}(x_1-x_2)}$$

が得られる。

参考文献

[1] A. Jaffe : High-Energy Behavior in Quantum Field Theory I. phys. Rev. 158 1454-1461 (1967)

[2] Nagamachi, S. Mugibayashi, N : Hyperfunction Quantum Field Theory. Commun. math. Phys. 46, 119-134 (1976)

[3] Wightman, A.S. Gårding, L. : Fields as operator valued distributions in relativistic quantum theory. Ark. Fys. 28, 13 129-184 (1964)

超準解析を用いたものについては，

Nagamachi, S. Mugibayashi, N : Construction of Euclidean Fermi fields (preprint)

がある。