数理解析研究所講究録
第 508 巻 1983 年 183-198

非線型発展方程式に対する積公式

北大理　小山哲也

§0. 序

本稿の目的は Hilbert 空間 H における非線型発展方程式

$$(\mathrm{I.V.P.})\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) \in -\partial\varphi u(t) + Bu(t), & t \geqq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

の解 $u(t)$ を近似する積公式

$$(\mathrm{P.F.})\qquad [V(\tau)e^{-\tau\partial\varphi}P]^{[t/\tau]}u_0 \to u(t), \quad (\tau \downarrow 0),$$

の収束を示すことである。ただし，$\partial\varphi$ は H 上の適正下半連続凸関数 φ の劣微分作用素，B は一価非線型作用素とし，後述の条件をみたすものとする。また，(I.V.P.) の解はたかだか一つであるとする。

Kato [3] は Hilbert 空間上で次の Trotter 積公式の収束を示した。

$$(1)\qquad [e^{-\tau B}e^{-\tau A}]^{[t/\tau]}u_0 \to e^{-t(A \dot{+} B)}Pu_0, \quad u_0 \in H, \quad t \geqq 0,$$

ここで，A、B は非負自己共役作用素，P は $\overline{\mathcal{D}(A^{1/2}) \cap \mathcal{D}(B^{1/2})}$ への射影，$A \dot{+} B$ は A, B の Form sum とよばれる A+B の自己

共役拡張である。これによれば $e^{-t(A\dot{+}B)}Pu_0$ の時間発展に対するAとBの寄与を分離して評価できるので、Feynman-Kac formula の証明に利用され成功をおさめた。Kato-Masuda[4] によって (1) は、A, B が劣微分作用素である場合に拡張された。これらの場合、$e^{-t(A\dot{+}B)}Pu_0$ は（形式的にいえば）

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = -Au(t) - Bu(t), & t \geqq 0, \\ u(0) = Pu_0, \end{cases}$$

の解 $u(t)$ にあたるものであるが、$-A$, $-B$ はともに $u(t)$ を"減衰"させる方向に作用し、e^{-tA}, e^{-tB} ともに縮小半群となる。本稿では、(I.V.P.) において $+B$ が $u(t)$ を"増大"させる方向に作用するようなたちの悪い場合に成立するような積公式を示す。ただし、(1) と比較して、$[e^{\tau B}e^{-\tau A}]^{[t/\tau]}u_0 \to u(t)$ を示すべきかもしれぬが、この場合 B は一般に半群 e^{tB} を生成しないので、近似作用素 $V(t)$ で代用する。また、(I.V.P.) の解 $u(t)$ は有限時間で爆発しうるので、(P.F.) もその爆発時刻までしか意味をもたなくなる。さらに、(I.V.P.) の解の一意性は一般には保証されないが、本稿ではこれを仮定して議論する。

§1. 記号と結果.

H を Hilbert 空間, $T>0$ に対して $L^2(0,T;H)$ を通常の H-値 L^2 空間とする。$\xrightarrow{s}$ で強収束を、$\xrightarrow{w}$ で弱収束を示す。

Hの作用素Aが単調であるとは，

$(u_1-u_2,\ u_1'-u_2')\geqq 0,\quad u_1, u_2\in\mathcal{D}(A),\ u_1'\in Au_1,\ u_2'\in Au_2,$

であること。極大単調であるとは，さらに $\mathcal{R}(1+\lambda A)=H,\ \lambda>0,$ であること。ただし，$\mathcal{R}(\cdot)$ は作用素の値域を示す。極大単調作用素は demiclosed である。即ち，$u_n\in\mathcal{D}(A),\ u_n'\in Au_n,\ u_0, \hat{u}\in H,$ $u_n \xrightarrow[s]{} u_0,\ u_n' \xrightarrow[w]{} \hat{u} \Rightarrow u_0\in\mathcal{D}(A),\ \hat{u}\in Au$，なる性質をもつ。

Hの作用素Aに対して，その $L^2(0,T;H)$ への拡張 $\tilde{A}$ を，

$\tilde{A}u=\{g\in L^2(0,T;H) \mid g(t)\in Au(t),\ \text{a.e. } t.\},$

$\mathcal{D}(\tilde{A})=\{u\in L^2(0,T;H) \mid \tilde{A}u\neq\phi\},$

で定義する。もし，AがHで極大単調ならば，$\tilde{A}$ は $L^2(0,T;H)$ で極大単調，したがって demiclosed となる。

φ を，H上の，$(-\infty,\infty]$ に値をとる適正下半連続凸関数とする。（適正とは $\varphi\not\equiv\infty$ であること。）φ の劣微分作用素 $\partial\varphi$ を，

$\partial\varphi u=\{f\in H \mid \varphi(v)-\varphi(u)\geqq(v-u,f),\ v\in\mathcal{D}(\varphi)\},$

$\mathcal{D}(\partial\varphi)=\{u\in H \mid \partial\varphi u\neq\phi\}$

と定義する。ただし，$\mathcal{D}(\varphi)=\{u\in H \mid \varphi(u)<\infty\}$ とする。劣微分作用素は極大単調である。

本稿では，φ, B, $V(t)$, (I.V.P.) に対し次の仮定をおく。

φ はH上の $(-\infty,\infty]$-値適正下半連続凸関数であって，次をみたす。

(Φ.1) 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し，"level set" $\{u \in H \mid \varphi(u) \leq r\}$ は Compact である。

(Φ.1)′ $$\varphi(u) \geqq 0, \quad u \in \mathcal{D}(\varphi).$$

B は H の一価作用素であって，次をみたす。

(B.1) $\mathcal{D}(\varphi) \subset \mathcal{D}(B)$，かつ $[0, \infty) \to [0, \infty)$ の単調増大連続写像 ℓ があって $\|Bu\|^2 \leq \ell(\varphi(u))$，$u \in \mathcal{D}(\varphi)$。

(B.2) 次の条件 (V.1),(V.2) をみたすような作用素族 $\{V(\tau)\}_{\tau>0}$ がとれる。

(V.1) $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(V(\tau))$，$\tau > 0$，かつ定数 $L \geqq 0$ があって $\|\frac{1}{\tau}(V(\tau) - 1)v\|^2 \leq L\|Bv\|^2$，$\tau > 0$，$v \in \mathcal{D}(B)$.

(V.2) 任意に $T > 0$ を固定するとき，次の意味で $\frac{1}{\tau}(V(\tau) - 1) \to B$ である。即ち，正数列 $\{\tau_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 及び $v_n(t), v_0(t) \in L^2(0,T;H)$，$n = 1, 2, \cdots$，が

$$\tau_n \downarrow 0, \quad v_n(t) \xrightarrow[s]{} v_0(t) \text{ in } L^2(0,T;H), \quad (n \uparrow \infty)$$

$$\sup_{n,t} \varphi(v_n(t)) < \infty$$

をみたすならば $v \in \mathcal{D}(\tilde{B})$ であり，かつ

$$\frac{1}{\tau_n}(V(\tau_n) - 1)v_n(t) \xrightarrow[w]{} Bv_0(t) \text{ in } L^2(0,T;H), \ (n \uparrow \infty).$$

さらに次を仮定する。

(U) (I.V.P.) の強解は，たかだか一つである。

ただし，$u(t)$ が $[0,T]$ 上の，(I.V.P.) の強解であるとは，(i) $u(t)$ は $[0,T]$ 上絶対連続で $\frac{d}{dt}u(t) \in L^2(0,T;H)$，(ii) $u \in \mathfrak{D}(\partial\varphi)$ であり，(iii)，$g \in \partial\varphi u$ があって，

$$\text{(I.V.P.)}_0 \begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = -g(t) + Bu(t), & \text{a.e. } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

をみたすということ。また $u(t)$ が (I.V.P.) の爆発時刻 T_b の極大強解であるとは，

(i) $u(t)$ は $[0,T_b)$ 上の連続関数であって，

(ii) 任意の $0 \leq T < T_b$ に対し，$u(t)$ は $[0,T]$ 上では (I.V.P.) の強解となっており，

(iii) $u(t)$ の拡張であるような，$[0,T_b]$ 上の (I.V.P.) の強解は存在しないということ。

この定義により，$u(t)$ が $[0,T]$ 上 (I.V.P.) の強解であるならば，$\varphi(u(t))$ は $[0,T]$ 上絶対連続となる。

注意 1.1. φ, B にさらに次の条件を課せば (U) はみたされる。

(Φ.2) $C > 0$ があって，$(u_1-u_2, u_1'-u_2') \geq C\varphi(u_1-u_2)$，$u_1, u_2 \in \mathfrak{D}(\partial\varphi)$，$u_1' \in \partial\varphi u_1$，$u_2' \in \partial\varphi u_2$.

(B.3) 各変数について単調増大な関数 k_1 があって，

$(u_1-u_2, Bu_1-Bu_2) < k_1(\varphi(u_1), \varphi(u_2))\,\varphi(u_1-u_2)^{1/2}\|u_1-u_2\|$，

$u_1, u_2 \in \mathfrak{D}(\varphi)$.

また、次の条件を課しても(U)はみたされる。

(B.3)′ 各変数について単調増大な関数 k_2 があって、

$$(u_1-u_2,\ Bu_1-Bu_2) \leq k_2(\varphi(u_1),\varphi(u_2))\,\|u_1-u_2\|^2,\quad u_1,u_2\in D(\varphi).$$

じっさいこのとき、$[0,T]$ 上の (I.V.P.) の強解 $u_1(t)$, $u_2(t)$ に対し、Gronwall の補題により $M\geq 0$ がとれて、

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|^2 \leq e^{tM}\,\|u_1(0)-u_2(0)\|^2,\qquad 0\leq t\leq T,$$

とできる。

主なる結果は次の定理である。

<u>定理 1.2.</u> φ, B, $\{V(\tau)\}_{\tau>0}$ は (Φ.1), (Φ.1)′, (B.1), (B.2), (V.1), (V.2) をみたしているとし、また(U)がみたされているものとする。このとき、任意の $u_0\in D(\varphi)$, $0\leq t<T_b$ に対し、

$$(\mathrm{P.F.})\ \begin{cases} [V(\tau)e^{-\tau\partial\varphi}P]^{[t/\tau]}u_0 \xrightarrow[s]{} u(t), & \text{in } H,\ (\tau\downarrow 0),\\ [V(t/n)e^{-(t/n)\partial\varphi}P]^{n}u_0 \xrightarrow[s]{} u(t) & \text{in } H,\ (n\uparrow\infty),\end{cases}$$

が成立する。ここで、$u(t)$ は (I.V.P.) の唯一極大強解、T_b はその爆発時刻、$[s]$ は $s\geq 0$ 整数部分、P は $\overline{D(\varphi)}$ への射影である。収束は $[0,T_b)$ の Compact 集合上一様である。

系1.3. 同じ情況で

$$\varphi\left(e^{-\tau\partial\varphi}p\,[V(\tau)\,e^{-\tau\partial\varphi}p]^{[t/\tau]}u_0\right) \to \varphi(u(t)), \quad (\tau\downarrow 0),$$

$$\varphi\left(e^{-(t/n)\partial\varphi}p\,[V(t/n)\,e^{-(t/n)\partial\varphi}p]^{n}u_0\right) \to \varphi(u(t)), \quad (n\uparrow\infty),$$

が成立する。収束は $[0,T_b)$ の Compact 集合上一様である。

系1.4. さらに次の条件がみたされるとする。

(Φ.3) $C'>0$ があって、

$$\varphi(u_1)-\varphi(u_2)-(u_1-u_2,\,u_2') \geqslant C'\varphi(u_1-u_2), \quad u_1,u_2\in D(\partial\varphi), \quad u_2'\in\partial\varphi u_2$$

このとき

$$\varphi\left(e^{-\tau\partial\varphi}p\,[V(\tau)\,e^{-\tau\partial\varphi}p]^{[t/\tau]}u_0-u(t)\right) \to 0, \quad (\tau\downarrow 0),$$

$$\varphi\left(e^{-(t/n)\partial\varphi}p\,[V(t/n)\,e^{-(t/n)\partial\varphi}p]^{n}u_0-u(t)\right) \to 0, \quad (n\uparrow\infty),$$

が成立する。収束は $(0,T_b)$ の Compact 集合上一様である。

注意1.5. $V(\tau)$ は "$e^{\tau B}$" の大きな部分を切りすてた作用素である。(同様な $V(\tau)$ の使用は、[1], [5] にみられる。)
B が、$B=B_1-B_2$、各 B_1, B_2 は極大単調で (B.1) をみたすようなものであるとき、$V(\tau)=1+\tau B$ とすればこれは (V.1), (V.2) をみたす。

注意1.6. B が劣微分であるとき、(Φ.1), (B.1) のもとで (I.V.P.) は $u_0\in D(\varphi)$ に対して解をもつことは知られている。(Ishii [2])。さらに、解が有限時間で爆発するための条件、解が時間大域的に存在するための条件も得られている。これについては [6], [7] も参照。本稿の方法でも、(B が劣微分で

なくとも), (Φ.1), (Φ.1)′, (B.1), (B.2) のもとで (I.V.P.) の解の存在を示すことはできる。しかし, (U) がないと, (P.F.) の収束は適当な部分列に沿ってしか保証されない。

§2. 定理の証明。

$u_0 \in \mathcal{D}(\varphi)$ を任意に固定する。"time unit" $\tau > 0$ を固定し t の分点 $k\tau$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, に対して

$$F(\tau, k\tau) = [e^{-\tau\partial\varphi} P V(\tau)]^k e^{-\tau\partial\varphi} P u_0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

とし, 一般の $t \geqq 0$ に対しては折れ線補間によって

$$F(\tau, t) = ([t/\tau] + 1 - (t/\tau)) F(\tau, [t/\tau]\tau) + ((t/\tau) - [t/\tau]) F(\tau, ([t/\tau]+1)\tau),$$

と定める。

証明の大すじは、t の関数族 $\{F(\tau, t)\}_{\tau>0}$ に Compactness method を適用して, $F(\tau, t) \rightrightarrows u(t)$, $(\tau \downarrow 0)$ を示すというものである。そのさい [4] による評価

(2) $$\varphi(v) - \varphi(y) \geqq \frac{1}{\tau}(v - y, y - e^{-\tau\partial\varphi} P y) + \frac{1}{2\tau}\| y - e^{-\tau\partial\varphi} P y\|^2,$$
$$= \frac{1}{2\tau}\| v - e^{-\tau\partial\varphi} P y\|^2 - \frac{1}{2\tau}\| v - y\|^2,$$
$$v, y \in H, \quad \tau > 0,$$

から エネルギー評価を導く。

$F(\tau, t)$ は t について絶対連続かつ分点以外で可微分で

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\tau,t) = \frac{1}{\tau}\{ F(\tau, ([t/\tau]+1)\tau) - F(\tau, [t/\tau]\tau)\}$$
$$= -\frac{1}{\tau}(1-e^{-\tau\partial\varphi}p) F^*(\tau, [t+\tau/\tau]\tau)$$
$$+ \frac{1}{\tau}(V(\tau)-1) F(\tau, [t/\tau]\tau).$$

である。ここで，$F^*(\tau, k\tau) = [V(\tau) e^{-\tau\partial\varphi}p]^k u_0$ とした。

<u>(Step 1.)</u> もし，$T'>0$, $\tau_0>0$ があって．

(3) $\alpha = \sup_{0<\tau<\tau_0} \int_0^{T'} \| \frac{\partial}{\partial t} F(\tau,t)\|^2 dt < \infty,$

(4) $\beta = \sup_{0<\tau<\tau_0,\ 0\le t\le T'} \varphi(F(\tau,t)) < \infty$

であるならば，

(5) $F(\tau,t)$, $F(\tau,[t/\tau]\tau)$, $F^*(\tau,[t/\tau]\tau) \underset{s}{\longrightarrow} u(t)$, $(\tau\downarrow 0)$.

$[0,T']$ 上一様強収束。

$\frac{1}{\tau}(1-e^{-\tau\partial\varphi}p) F^*(\tau,[t/\tau]\tau) \underset{w}{\longrightarrow} Bu(t) - \frac{d}{dt}u(t) \in \widetilde{\partial\varphi} u$. $(\tau\downarrow 0)$.

$L^2(0,T';H)$-弱収束，

である。ここで $u(t)$ は $[0,T']$ 上の (I.V.P.) の強解であり，したがって $T'<T_b$ も分る．

じっさい (4) と (Φ.1) から $\{F(\tau,t)\}_{0<\tau<\tau_0,\ 0\le t\le T'}$ は Compact set 内にとどまることが分り，(3) から

(6) $\| F(\tau,t_2) - F(\tau,t_1)\| \le (t_2-t_1)^{1/2}\alpha^{1/2}$, $0\le t_1\le t_2\le T'$,

即ち $\{F(\tau,\cdot)\}_{\tau>0}$ が同等連続であることが分る．したがって適当な部分列 $\tau_k\downarrow 0$ と連続関数 $u(t)$ がとれて．

$F(\tau_k,t) \underset{s}{\longrightarrow} u(t)$, $(k\uparrow\infty)$. $[0,T']$ 上一様強収束。

(6), (V.1), (B.1) に注意すれば．

$$F(\tau_k, [t/\tau_k]\tau_k),\quad F^*(\tau_k, [t+\tau_k/\tau_k]\tau_k),\quad F^*(\tau_k, [t/\tau_k]\tau_k).$$

$$\xrightarrow[s]{} u(t),\ (k\uparrow\infty),\ [0,T'] \text{ 上一様強収束}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ は $L^2(0,T';H)$ で demiclosed な作用素だから，(3) により

$$\frac{d}{dt}u(t)\in L^2(0,T';H),\ \frac{\partial}{\partial t}F(\tau_k,t)\xrightarrow[w]{}\frac{d}{dt}u(t),\ (k\uparrow\infty)\ \text{in}\ L^2(0,T';H).$$

また，(4)，(V.2) により，

$$u(t)\in\mathfrak{D}(\tilde{B}),\ \frac{1}{\tau_k}(V(\tau_k)-1)F(\tau_k,[t/\tau_k]\tau_k)\xrightarrow[w]{}Bu(t),\ (k\uparrow\infty)$$
$$\text{in}\ L^2(0,T';H).$$

したがって，

(7) $$\frac{1}{\tau_k}(1-e^{-\tau\partial\varphi}P)F^*(\tau_k;[t-\tau_k/\tau_k]\tau_k)\xrightarrow[w]{}Bu(t)-\frac{d}{dt}u(t),\ (k\uparrow\infty)$$

であるが，$e^{-t\partial\varphi}P$ の性質により，このことから $u(t)\in\mathfrak{D}(\widetilde{\partial\varphi})$，$Bu-\frac{d}{dt}u\in\widetilde{\partial\varphi}u$ が分る。

以上で $u(t)$ が (I.V.P.) の強解であることが分ったから，以上の収束はすべて τ_k のとり方によらない。最後のことも (7) から導かれる。

<u>(Step. 2.)</u> $K>0$ とし，$f(t,K)$ を，初期値問題

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,K)=\frac{L}{2}\ell(f(t,K)),\ t\geqslant 0,\ f(0,K)=K,$$

の最大解，$T(K)$ をその爆発時刻とする。$f(\tau,t,K)$ を，この初期値問題に対する "time unit" $\tau>0$ の Cauchy polygon とする。即ち，

$$f(\tau,0,K)=K,$$
$$f(\tau,(k+1)\tau,K)=f(\tau,k\tau,K)+\frac{L}{2}\tau\,\ell(f(\tau,k\tau,K)),\ k=0,1,2,\cdots,$$

$$f(\tau,t,K)=\left([t/\tau]+1-(t/\tau)\right)f(\tau,[t/\tau]\tau,K)$$
$$+\left((t/\tau)-[t/\tau]\right)f(\tau,([t/\tau]+1)\tau,K),\quad t\geqq 0.$$

このとき，(2) から エネルギー評価

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}F(\tau,t)\right\|^2dt+\varphi(F(\tau,t_2))$$
$$\leqq f(\tau,\ t_2-[t_1/\tau]\tau,\ \varphi(F(\tau,[t_1/\tau]\tau))),\quad 0\leqq t_1\leqq t_2,$$

が得られる。

じっさい，(2) において $v=F(\tau,[t/\tau]\tau)$, $y=V(\tau)v$ とすれば，(V.1)，　に注意して

(8) $$\varphi(F(\tau,[t+\tau/\tau]\tau))+\frac{\tau}{2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}F(\tau,t)\right\|^2$$
$$\leqq\varphi(F(\tau,[t/\tau]\tau))+\frac{L\tau}{2}\ell(\varphi(F(\tau,[t/\tau]\tau))),\quad t\geqq 0,$$

を得る。とくに

$$\varphi(F(\tau,([t_1/\tau]+k)\tau))\leqq f(\tau,k\tau,\varphi(F(\tau,[t_1/\tau]\tau))),$$

が分る。(8) を $[[t_1/\tau]\tau,t_2]$ 上積分すればよい。

<u>(Step 3.)</u>　$u(t)$ を (I.V.P.) の唯一極大強解とし，その爆発時刻を T_b とする。$0<T<T_b$ なる T を任意に固定し，$K=\max_{[0,T]}\varphi(u(t))$, $T_0=\frac{1}{2}T(K)$ とする。

(Step 1) の結果により，定理の証明のためには $\sup_{[0,T]}\varphi(F(\tau,t))$, $\int_0^T\left\|\frac{\partial}{\partial t}F(\tau,t)\right\|^2dt$ が $\tau\downarrow 0$ で有界に留まることを示せば十分であるから，これを帰納法で示す。

いま，ある $0 \leq T_1 \leq T$ があって，

$$\limsup_{\tau\downarrow 0} \sup_{[0,T_1]} \varphi(F(\tau,t)) \leq K,$$

$$\limsup_{\tau\downarrow 0} \int_0^{T_1} \|\tfrac{\partial}{\partial t}F(\tau,t)\|^2 dt < \infty,$$

であるならば，

(9) $$\limsup_{\tau\downarrow 0} \sup_{[0,\min(T_1+T_0,T)]} \varphi(F(\tau,t)) \leq K,$$

$$\limsup_{\tau\downarrow 0} \int_0^{T_1+T_0} \|\tfrac{\partial}{\partial t}F(\tau,t)\|^2 dt. < \infty$$

であることを示す。ただし，$\limsup_{\mu\downarrow 0} \alpha(\mu) = \inf_{\mu>0} \sup_{0<\nu<\mu} \alpha(\nu)$ とする。

まず，$\varepsilon_0 > 0$，$\tau_0 > 0$ を，$\sup_{0<\tau<\tau_0} \sup_{[0,T_1]} \varphi(F(\tau,t)) \leq K+\varepsilon_0$，$T_0+\tau_0 < T(K+\varepsilon_0)$ となるようにとる。このとき (Step 2) の結果を使えば

$$\frac{1}{2}\int_{T_1}^{t} \|\tfrac{\partial}{\partial t}F(\tau,s)\|^2 ds + \varphi(F(\tau,t)) \leq f(T_0+\tau_0, K+\varepsilon_0) < \infty,$$

$$0<\tau<\tau_0, \quad T_1 \leq t \leq T_1+T_0,$$

であることが分るから，(Step 1) の結果により，

$$\frac{1}{\tau}(1-e^{-\tau\partial\varphi}P)F^*(\tau,[t/\tau]\tau) \underset{w}{\rightarrow} g(t),\ (\tau\downarrow 0) \quad \text{in } L^2(0,T_1+T_0;H),$$

$$g = Bu - \frac{d}{dt}u \in \partial\varphi u,$$

が分る。このことから任意の $0 \leq t_0 \leq \min(T_1+T_0, T)$ と $h < t_0$ に対して，

$$\limsup_{\tau\downarrow 0} \int_{t_0-h}^{t_0} \varphi(F(\tau,[t/\tau]\tau))dt \leq \int_{t_0-h}^{t_0} \varphi(u(t))dt \leq hK,$$

であることが分る。ここで Integrand の傾きの評価，

$$\varphi(F(\tau,[t/\tau]\tau)) \leq \varphi(F(\tau,([t/\tau]-1)\tau)) + \frac{L\tau}{2}\ell(f(T_0+\tau_0,K+\varepsilon_0))$$

を使えば，$K \geq \limsup_{\tau \downarrow 0} \varphi(F(\tau, [t_0/\tau]\tau))$ が分る．(9) はこれからすぐ分る。

系の証明． 系1.3 は (Step 3) と同様の方法で証明できる。系1.4 を示すには，Gronwall の補題を使って，すべての $t \in (0, T)$ に対して $u(t) \in D(\partial\varphi)$ であること，及び $g(t) \in \partial\varphi u(t)$ on $(0, T)$ となるような $(0, T)$ 上の局所有界関数 g が存在することを導き，これを利用する。

§3. 応用．

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ をなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とするとき，

$$(E.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + f(u(t,x)),\ t \geq 0,\ x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \end{cases}$$

を考察する。ここで，$H = L^2(\Omega)$ とし，

$$\varphi(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_\Omega |v(x)|^p dx, & v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \infty, & \text{その他}, \end{cases}$$

$$Bv(x) = f(v(x)),$$

$$D(B) = \{ v \in L^2(\Omega) \mid f(v(x)) \in L^2(\Omega) \}$$

とすれば，(E.1) は (I.V.P.) の形に書き直される。

1°. $\begin{cases} 2 \leq p \leq q < \infty, & p \geq N \text{ のとき}, \\ 2 \leq p \leq q \leq \dfrac{2N}{2N-2p} + 1, & p < N \text{ のとき}. \end{cases}$

$$0 \leq f(\lambda_2) - f(\lambda_1) \leq (\lambda_2 - \lambda_1)\{C(|\lambda_1| + |\lambda_2|)^{g-2} + C\}, \quad \lambda_1 \leq \lambda_2,$$
$$u_0(x) \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

であるとき，(E.1) は時間局所的な強解をもつ。とくに $p=2$ のときは (U) がみたされて，$V(\tau) = 1 + \tau f(\cdot)$ として §1 の結果が適用できる。即ち

$$[(1+\tau f(\cdot))\, e^{\tau\Delta}]^{[t/\tau]} u_0(x) \longrightarrow u(t,x), \quad \tau \downarrow 0,$$

t-局所一様に $W^{1,2}(\Omega)$ の位相で収束.

2．$p > N$，f は単調増大かつ C^1 とすれば，$V(\tau) = 1 + \tau f(\cdot)$ として §1 の結果が適用できる。

つぎに，$\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ とし，

$$\text{(E.2)} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\beta(u(t,x)), \ t \geq 0,\ 0 < x < 1, \\ u(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x = 0, 1, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

を考察する。これも (I.V.P.) の形に書きなおせて，

$$\beta \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_0 \in W_0^{1,p}((0,1)),$$

とすれば，$V(\tau) = 1 + \tau \dfrac{\partial}{\partial x}\beta(\cdot)$ として 1 と同様のことが成立する。

References.

[1]. Ichinose, T.: A product formula and its application to the Schrödinger equation. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 16, 585-600. (1980).

[2] Ishii, H.: Assymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations. J. Diff. eqn., 26, 291-319 (1977).

[3] Kato, T.: Trotter's product formula for an arbitrary pair of selfadjoint contraction semigroups. Adv. in Math. Supplementary studies, 3, 185-195 (1978).

[4] Kato, T. and Masuda, K.: Trotter's product formula for nonlinear semigroups generated by the subdifferentials of convex functionals. J. Math. Soc. Japan, 30, 167-177 (1978).

[5] Koyama, T. and Ichinose, T.: On the Trotter product formula. Proc. Japan Acad., 57, ser. A, 95-100 (1981).

[6] Otani, M.: On existence of strong solutions for $\frac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t)$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 24, 575-605 (1977).

[7] Tsutsumi, M.: Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations. Publ. RIMS. Kyoto Univ., 8, 211-229 (1972/73).