数理解析研究所講究録
第508巻 1983年 199-224

非線型偏微分方程式の解の microlocal regularity について

東大・理　山崎昌男（Masao Yamazaki）

最近、双曲型非線型方程式の解の特異性の伝播についての研究が広く行なわれている。Beals [1], Beals and Reed [2], Bony [4], [5], B. Lascar [7], [8], Rauch [15] を見よ。大ざっぱに言って、彼らの結果は次のように定式化される；
「非線型方程式 $A(x; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots) = 0$ の解 $u(x)$ が、ある領域 Ω で存在し、$H^s(\Omega)$ $(s > s_0)$ に属するならば、Ω 内で H^t-singularity $(s < t < s')$ が、陪特性曲線に沿って伝播する」
ここで s_0 は方程式によって定まる定数であり、s' は方程式と s によって定まる数である。条件 $s > s_0$ が除けないことは非線型方程式の強解は有限時間で爆発し得ることからわかり、条件 $t < s'$ が除けないことは、非線型方程式では"特異性の相互作用"が起こり得ることからわかる。Rauch and Reed [16], [17], [18], [19], [20] は、特別な場合についてではあるが特異性の相互作用について精密な結果を導いている。

これに対して、[4]で導入され、Meyer [10], [11], [12], [13] によって精密化された para-differential operator の概念は、双曲型方程式に限らぬ広い応用範囲を持っている。その基本的なアイディアは次のようなものである：

「例えば、非線型項 uv を、u の滑らかさのみを反映し、v の滑らかさを反映しない項 $\pi_1(v, u)$、v の滑らかさのみを反映する項 $\pi_1(v, u) = \pi_3(u, v)$、両方の滑らかさを反映する項 $\pi_2(u, v)$ に分解する。この時、π_2 が他の2項より regular ならば、これを法として

$$uv \equiv \pi_1(u, v) + \pi_1(v, u)$$

となる。ここで $v = \partial_x u$ ならば、$\pi_1(u, \partial_x u)$ を $\pi_1(u\partial_x, u) =$
$= \pi_1(iuD_x, u)$ と書くことにすると

$$u\partial_x u \equiv \pi_1(iuD_x, u) + \pi_1(\partial_x u, u) = \pi_1(iuD_x + \partial_x u, u)$$

と書ける。ここで、$\pi_1(iuD_x + \partial_x u, \cdot)$ は線型作用素である。これを $iu\xi + \partial_x u$ を symbol とする para-differential operator とし、これらに対する有界性定理、表象計算等を準備すれば、線型方程式と同じように扱え、特異性についての結果が出る。」

上記の論文の扱っている函数空間は通常の H^s, C^σ, H^s_p 等に限られ、このため、これらの理論が最も有効に用いられる方程式は、主に楕円型と双曲型である。一方、線型方程式に対しては、R. Lascar [9] によって、座標変数毎に違う重みをつ

けた「準斉次波面集合」が定義され、Schrödinger作用素等についても解の特異性の伝播が調べられている。多くの重要な非線型方程式について、このような取扱いが自然であると思われる。

ここでは、Meyer [16], [17] の結果、すなわち「非線型方程式の解の、非特性方向での超局所的な滑らかさ」を準斉次の場合に拡張できたことを報告する。同時に、最初に解に課せられる滑らかさの条件を、[4], [10], [17]より弱くできること、Triebel-Lizorkin空間においても同様の結果が得られることを報告する。

§1. 函数空間

ここでは、函数の滑らかさを計る空間として、(非同次)非等方的Besov空間、及び(非同次)非等方的Triebel-Lizorkin空間を定義する。(これらは、それぞれHölder空間、一般Sobolev空間の一般化である)

$M=(m_1,\cdots,m_n)$ を $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ の重みで、$\min_{1\le \ell\le n} m_\ell=1$ を満たしているものとする。$|M|=m_1+\cdots+m_n$ と書く。

多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ に対し、$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$、$M\cdot\alpha=m_1\alpha_1+\cdots+m_n\alpha_n$ と書き、$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$, $\partial_x^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $D_x^\alpha=(-i)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha$ と定める。

$t\in\mathbb{R}^+=\{t;t\geq 0\}$ の ξ への作用を $t^M\xi=(t^{m_1}\xi_1,\cdots,t^{m_n}\xi_n)$ で定め．$[\xi]_M$ を $t^{-M}\xi=(t^{-1})^M\xi$ が S^{n-1} に属するような（唯一の）正数、すなわち t の方程式 $t^{-2m_1}\xi_1^2+\cdots+t^{-2m_n}\xi_n^2=1$ の唯一の正の根と定める。（但し $[0]_M=0$ とする）また．$\langle\xi\rangle_M$ を t の方程式 $t^{-2}+t^{-2m_1}\xi_1^2+\cdots+t^{-2m_n}\xi_n^2=1$ の唯一の正の根と定める。

次に．$\Psi(t)$ を $t\in\mathbb{R}^+$ の C^∞－函数であって．$0\leq\Psi(t)\leq 1$，$\Psi(t)\equiv 1$ $\left(t\leq\frac{11}{10}\right)$，$\Psi(t)\equiv 0$ $\left(t\geq\frac{13}{10}\right)$ を満たすものとする。この Ψ を用いて次式により 1 の分解 $\sum_{j=0}^{\infty}\Phi_j^M(\xi)=1$ を作る：

$$\begin{cases}\Phi_0^M(\xi)=\Psi([\xi]_M)\\ \Phi_j^M(\xi)=\Psi(2^{-j}[\xi]_M)-\Psi(2^{1-j}[\xi]_M) \qquad (j\geq 1)\end{cases}$$

$s\in\mathbb{R}$，$1\leq p,q\leq\infty$ の時．非同次非等方的 Besov 空間 $B_{p,q}^{M,s}$ を

$$B_{p,q}^{M,s}=\{u\in\mathcal{S}';\ \|\{2^{js}\mathcal{F}^{-1}[\Phi_j^M(\xi)\hat{u}(\xi)](x)\}\|_{\ell^q(L^p)}=\|u\|_{B_{p,q}^{M,s}}<\infty\}$$

で定める。また、$s\in\mathbb{R}$，$1<p<\infty$，$1\leq q\leq\infty$ の時．非同次非等方的 Triebel－Lizorkin 空間 $F_{p,q}^{M,s}$ を

$$F_{p,q}^{M,s}=\{u\in\mathcal{S}';\ \|\{2^{js}\mathcal{F}^{-1}[\Phi_j^M(\xi)\hat{u}(\xi)](x)\}\|_{L^p(\ell^q)}=\|u\|_{F_{p,q}^{M,s}}<\infty\}$$

で定める。ここで、$1\leq p,q<\infty$ ならば

$$\|\{f_j(x)\}\|_{\ell^q(L^p)}=\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|f_j(x)|^p dx\right\}^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\|\{f_j(x)\}\|_{L^p(\ell^q)}=\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|^q\right\}^{\frac{p}{q}}dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

であり．p 又は $q=\infty$ の時は対応する部分を sup に替える。

<u>注意 1</u>：これらの空間は Banach 空間であり、Ψ のとり方に

よらずに定まる。より一般的に、次の定理が成り立つ。

定理1. $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ [resp. $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$] とする。

今、緩増加超函数の列 $\{u_j\}$ が

1) 定数 $A > 0$ が存在し

$$\begin{cases} \mathrm{supp}\, u_0 \subset \{\xi : [\xi]_M < A\} \\ \mathrm{supp}\, u_j \subset \{\xi : 2^j A^{-1} < [\xi]_M < 2^j A\} \quad (j \geq 1) \end{cases}$$

となる。

2) $\|\{2^{sj} u_j\}\|_{\ell^q(L^p)} < \infty$ [resp. $\|\{2^{sj} u_j\}\|_{L^p(\ell^q)} < \infty$]

の2条件を満足すれば、$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j$ は $B^{M,s}_{p,q}$ [resp. $F^{M,s}_{p,q}$] に属し、かつ A によって定まる定数 C により

$$\|u\|_{B^{M,s}_{p,q}} \leq C \|\{2^{sj} u_j\}\|_{\ell^q(L^p)} \quad [\text{resp. } \|u\|_{F^{M,s}_{p,q}} \leq C \|\{2^{sj} u_j\}\|_{L^p(\ell^q)}]$$

と評価される。

定理2 $s > 0$ ならば、定理1の1)の条件の式を

$$\mathrm{supp}\, u_j \subset \{\xi : [\xi]_M < 2^j A\} \qquad (j \geq 0)$$

でおきかえても、同じ結論が成り立つ。

定理3 $p < r$, $s - |M|/p = t - |M|/r$ ならば、ノルムも込めて、$B^{M,s}_{p,q} \subset B^{M,t}_{r,q}$, $F^{M,s}_{p,q} \subset F^{M,s}_{r,q}$ が成立つ。

非等方的 Besov 空間は Besov [3] によって、非等方的 Triebel-Lizorkin 空間は Triebel [21] によって定義された。これらの空間については、Triebel [22], [23] 及びそこに挙げられた文献を見られたい。ここでは、$\langle\xi\rangle_M$ を表象とする擬微分作用素と関係づけるため少し定義を変形した。

注意2 $1<p<\infty$ ならば

$$F^{M,s}_{p,2}=H^{M,s}_p=\{u\in\mathcal{S}';\ \|\mathcal{F}^{-1}[\langle\xi\rangle^s_M\cdot\hat{u}(\xi)](x)\|_{L^p}=\|u\|_{H^{M,s}_p}<\infty\}$$

であり、特に $F^{M,0}_{p,2}=L^p$ である。また、$1\le l\le n$ に対して s/m_l が整数でなければ、$B^{M,s}_{\infty,\infty}$ は各 x_l について s/m_l 次の Hölder 空間である。

§2. para-differential operator の定義

$P(x,\xi)$ を、$(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$ の函数で、ξ について C^∞ であるものとする。$\hat{P}(\xi,\eta)=\int e^{-ix\xi}P(x,\eta)dx$ と書く。

$m,s\in\mathbb{R}$, $1\le p,q\le\infty$ の時、$S(B^{M,s}_{p,q})^m$ を、$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$ に対し

$$C_\alpha=\|\{2^{sj}\sup_\eta\langle\eta\rangle_M^{-m+M\cdot\alpha}\|\mathcal{F}^{-1}_\xi[\Phi^M_j(\xi)\partial^\alpha_\eta\hat{P}(\xi,\eta)](x)\|_{L^p}\}\|_{l^q}<\infty$$

なる $P(x,\xi)$ の集合として定める。また、$m,s\in\mathbb{R}$, $1<p<\infty$, $1\le q\le\infty$ の時、$S(F^{M,s}_{p,q})^m$ を、$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$ について

$$C_\alpha=\|\{2^{sj}\sup_\eta\langle\eta\rangle_M^{-m+M\cdot\alpha}|\mathcal{F}^{-1}_\xi[\Phi^M_j(\xi)\partial^\alpha_\eta\hat{P}(\xi,\eta)](x)|\}\|_{L^p(l^\infty)}<\infty$$

なる $P(x,\xi)$ の集合として定める。

$m,s\in\mathbb{R}$, $1\le p\le\infty$ の時、$S(H^{M,s}_p)^m$, $S'(H^{M,s}_p)^m$ を、それぞれ、$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$ について

$$C_\alpha=\sup_\eta\langle\eta\rangle_M^{-m+M\cdot\alpha}\|\partial^\alpha_\eta P(x,\eta)\|_{H^{M,s}_p}<\infty$$

$$C_\alpha=\|\sup_\eta\langle\eta\rangle_M^{-m+M\cdot\alpha}|\mathcal{F}^{-1}_\xi[\langle\xi\rangle^s_M\partial^\alpha_\eta\hat{P}(\xi,\eta)]|\|_{L^p}<\infty$$

なる $P(x,\xi)$ の集合として定める。

これらの空間は可算個のセミノルムによって位相が入る。

一般に$P(x,\xi)$をシンボルとする擬微分作用素は

$$u(x) \longmapsto P(x,D_x)u(x) = \int e^{ix\xi} P(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,đ\xi$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\Big[\int \hat{P}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)\,đ\eta\Big](x) \quad \cdots (2.1)$$

$$(\,đ\xi = (2\pi)^{-n}d\xi\,)$$

によって定義される。一方、既に構成した$\{\Phi_j^M(\xi)\}_{j=1}^{n}$より$\mathbb{R}^{2n}$における$1$の分解

$$\sum_{j=1}^{3} \chi_j(\xi,\eta) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \Phi_j^M(\xi)\Phi_k^M(\eta) = 1$$

但し
$$\begin{cases} \chi_1(\xi,\eta) = \displaystyle\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-2} \Phi_k^M(\xi)\Phi_j^M(\eta) \\ \chi_2(\xi,\eta) = \displaystyle\sum_{r=-1}^{1}\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{j+r}^M(\xi)\Phi_j^M(\eta) \\ \chi_3(\xi,\eta) = \displaystyle\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-2} \Phi_j^M(\xi)\Phi_k^M(\eta) \end{cases}$$

が構成できる。これを用いて(2.1)の右辺を3つの項

$$\pi_j(P(x,D_x),u)(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\int \chi_j(\xi-\eta,\eta)\hat{P}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)\,đ\eta\Big](x)$$

$$(j=1,2,3)$$

に分解し、写像$u(x) \longmapsto \pi_j(P(x,D_x),u)(x)$を$P(x,\xi)$をシンボルとする *para-differential operator* と呼ぶ。Bony [4] は$\pi_1(P(x,D_x),\cdot)$を *para-differential operator* と呼び、いわゆる"古典的なシンボル"を持つ *para-differential operator* の Hölder 空間C^σ及び Sobolev 空間H_2^s上での有界性を証明した。Meyer [10], [11] はより一般のシンボルを持つ作用素に

対して、一般のSobolev空間H_p^s $(1<p<\infty)$上での有界性を示した。この結果は$p=2$の場合のBonyの結果の改良になっている。また、Bourdaud [6]は上の考えを擬微分作用素の有界性の問題に応用し、Nagase [14]の結果を拡張した。

§3. para-differential operatorの有界性定理及び合成法則

<u>定理4</u>　$1/p=1/p_1+1/p_2\le 1$, $1\le q\le\infty$, $m, s\in\mathbb{R}$ ならば、π_1 [resp. π_3] は、$S(H_{p_1}^{M,0})^m\times B_{p_2,q}^{M,s}$ から $B_{p,q}^{M,s-m}$ への [resp. $S(B_{p_1,q}^{M,s})^m\times B_{p_2,1}^{M,m}$ から $B_{p,q}^{M,s}$ への] 連続双線型写像である。

<u>定理5</u>　$1/p=1/p_1+1/p_2\le 1$, $1/q=1/q_1+1/q_2\le 1$, $m, s_2\in\mathbb{R}$, $s_1<0$ ならば、π_1 [resp. π_3] は、$S(B_{p_1,q_1}^{M,s_1})^m\times B_{p_2,q_2}^{M,s_2}$ から $B_{p,q}^{M,s_1+s_2-m}$ への [resp. $S(B_{p_1,q_1}^{M,s_2})^m\times B_{p_2,q_2}^{M,s_1+m}$ から $B_{p,q}^{M,s_1+s_2}$ への] 連続双線型写像である。

定理4の意味は概ね次の通りである；

「$P(x,\xi)$ が x について $H_{p_1}^{M,0}$ 程度の滑らかさを持てば、どんなに大きい $s\in\mathbb{R}$ に対しても、$\pi_1(P(x,D_x),\cdot)$ は $B_{p_2,q}^{M,s}$ から $B_{p,q}^{M,s-m}$ への有界写像である。」

すなわち、u の正則性をほぼ忠実に $\pi_1(P(x,D_x),u)$ が反映するのである。但し、P の x についての滑らかさが $H_p^{M,0}$ より悪ければ、結果も弱くなる。その定式化が定理5である。同

様に考えれば、$\pi_3(P(x,D_x),u)$は$P(x,\xi)$の正則性を反映する項であるといえる。

これらに対し、$\pi_2(P(x,D_x),u)$は両方の滑らかさを共に反映する項である。すなわち、次の定理が成立つ。

<u>定理6</u>　$1/p = 1/p_1 + 1/p_2 \leq 1$, $1/q = 1/q_1 + 1/q_2 \leq 1$,
$m, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 + s_2 - m > 0$ ならば、π_2は$S(B^{M,s_1}_{p_1,q_1})^m \times B^{M,s_2}_{p_2,q_2}$から$B^{M,s_1+s_2-m}_{p,q}$への連続双線型写像である。

また、次の定理が成立つ。

<u>定理7</u>　定理4〜6において、$1 < p_2 < \infty$, $p > 1$ならば、B－空間をF－空間に、$S(H^{M,0}_{p_1})^m$を$S'(H^{M,0}_{p_1})^m$に、さらに$p_1 < \infty$ならば$S(B_{p_1,q})$を$S(F_{p_1,q})$に置き換えた命題が成立つ。

以上の定理を用いて、$\langle\xi\rangle_M$を尺度函数とする擬微分作用素についての有界性定理が導ける。Yamazaki [24] を参照。また、p_2, pが1より小さい場合にも、より複雑な条件の下で同様の結果が成立つ。(Yamazaki [26])

次に、2つのpara-differential operatorの合成写像$\pi_1(P(x,D_x), \pi_1(Q(x,D_x),\cdot))$を、1つのpara-differential operator $\pi_1(R(x,D_x),\cdot)$で表わすことを考えよう。まず、シンボル$P(x,\xi)$, $Q(x,\xi)$及び定数δ, $\varepsilon \geq 0$に対して条件

(H1ε)　$P(x,\xi) \in S(B^{M,s_1+\varepsilon}_{p_1,q_1})^{m_1}$ 及び

$$Q(x,\xi)\in S(B^{M,-\varepsilon}_{\tilde p_2,\infty})^{m_2}\ (\varepsilon>0),\ \in S(H^{M,0}_{\tilde p_2})^{m_2}\ (\varepsilon=0)$$

（H 2 δ）$Q(x,\xi)\in S(B^{M,s_1+\delta}_{p_2,q_1})^{m_2}$　及び

$$P(x,\xi)\in S(B^{M,-\delta}_{\tilde p_1,\infty})^{m_1}\ (\delta>0),\ \in S(H^{M,0}_{\tilde p_1})^{m_1}\ (\delta=0)$$

を考える。ここで、仮定

$$1\le p_1,p_2,p_3,\tilde p_1,\tilde p_2,q_1,q_3\le\infty,\ s_1\ge 0,\ m_1,m_2,s_3\in\mathbb{R},$$

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_3}\le 1,\ \frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{\tilde p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{\tilde p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\le 1$$

をおく。この時

$$R(x,\xi)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ M\cdot\alpha\le s_1}}\frac{\partial_\xi^\alpha P(x,\xi)\cdot D_x^\alpha Q(x,\xi)}{\alpha!}$$

とおくと、次の定理が成立つ。

定理 8

$s_1<M\cdot\alpha\le s_1+\varepsilon$，$s_1<M\cdot\alpha\le s_1+\delta$ のうちの少なくとも一方を満たす任意の $\alpha\in\mathbb{N}^n$ に対して

$$\partial_\xi^\alpha P(x,\xi)\equiv 0$$

が成立つならば、$u(x)$ に

$$\pi_1(P(x,D_x),\pi_1(Q(x,D_x),u))(x)-\pi_1(R(x,D_x),u)(x)$$

を対応させる写像は、条件（H 1 ε），（H 2 δ）（但し ε，δ ≥ 0）の下で $B^{M,s_3}_{p_3,q_3}$ から $B^{M,s_1+s_3-m_1-m_2}_{p,q}$ への有界線型写像になる。

これより、$\pi_1(P(x,D_x),\pi_1(Q(x,D_x),u))$ と $\pi_1(R(x,D_x),u)$ との差は、s_1 が大きければ大きいほど滑らかになり、特に

$P(x,\xi)$, $Q(x,\xi)$ が x について C^∞ ならば、s はいくらでも大きく取れる。一方この時 $P(x,D_x)u(x)$ と $\pi_1(P(x,D_x),u)(x)$ との差も C^∞ だから、定理8は擬微分作用素に対する通常の漸近展開公式になる。

定理8の応用として、regular term を法としての para-differential operator の割り算、特に microlocal parametrix の構成ができる。

シンボル $P(x,\xi)$, $Q(x,\xi)$ は、条件

$$\begin{cases} P(x,\xi)=\sum_{j=0}^{j_0} P_j(x,\xi) \qquad P_j(x,\xi)\in S(B_{p,q}^{M,s-\sigma_j})^{m-\sigma_j} \\ Q(x,\xi)\in S(B_{p,q}^{M,t})^{\mu} \end{cases}$$

但し

$$\begin{cases} \frac{|M|}{p}<s\le t,\quad 1\le p,q\le\infty,\quad m,\ \mu\in\mathbb{R} \\ 0=\sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_{j_0}=s-\frac{|M|}{p} \\ \sigma_k+\sigma_j+M\cdot\alpha<s-\frac{|M|}{p} \text{ なる任意の } k,j,\alpha\in\mathbb{N}^n \text{ に対して} \\ \qquad \text{適当な } h \text{ を取れば、} \sigma_k+\sigma_j+M\cdot\alpha=\sigma_h \end{cases}$$

を満足しているとする。さらに、$\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi=\mathbb{R}^{2n}$ の開集合 Ω 及び定数 d, $A>0$ が存在して、

$$\begin{cases} \Omega_d=\{(x,\xi):|x-x'|\le d,\ [\xi'-\xi]_M\le d\langle\xi\rangle_M \Rightarrow (x',\xi')\in\Omega\} \\ \qquad \text{とおくと、} \operatorname{supp} Q(x,\xi)\subset\Omega_d \\ (x,\xi)\in\Omega \Rightarrow |P_0(x,\xi)|\ge A\langle\xi\rangle_M^{m} \end{cases}$$

が成立つと仮定する。

この時，帰納的に $\{R_j(x,\xi)\}_{j=0}^{j_0}$ を

$$\begin{cases} R_0(x,\xi)=\dfrac{Q(x,\xi)}{P_0(x,\xi)} \\ j\geq 1 \text{ の時} \end{cases}$$

$$R_j(x,\xi)=-\frac{1}{P_0(x,\xi)}\sum_{k\leq j}\sum_{\substack{l\leq j \\ \sigma_l+\sigma_k+M\cdot\alpha=\sigma_j}}\frac{\partial_\xi^\alpha R_k(x,\xi)\cdot D_x^\alpha P_l(x,\xi)}{\alpha!}$$

によって定義すると，$R_j(x,\xi)\in S(B_{p,q}^{M,s-\sigma_j})^{\mu-m-\sigma_j}$ となり，さらに次の定理が成立つ。

定理 9　$R(x,\xi)=\sum_{j=0}^{j_0}R_j(x,\xi)$ とおくと $u\in B_{p',q'}^{M,s'}$ ならば

$\pi_1(R(x,D_x),\pi_1(P(x,D_x),u))(x)-\pi_1(Q(x,D_x),u)(x)$

は $B_{p',q''}^{M,s'+s-|M|/p-\mu}$ に属する。ここに，$1\leq p'\leq\infty$，

$1\leq q'\leq\infty$，　$1/q''=1/q+1/q'\leq 1$

定理 8，定理 9 は，定理 7 と同じ方法で読みかえれば，F－空間に対しても成立つ。また，上と同じような方法で，"右からの割り算"もできる。

§4. 非線型項の線型化

$u\in B_{p,q}^{M,s}$，$s>\dfrac{|M|}{p}$ とすると，

$$u^2=\pi_1(u,u)+\pi_2(u,u)+\pi_3(u,u)$$
$$\equiv\pi_1(2u,u)\quad \mathrm{mod}\ B_{p,q}^{M,2s-|M|/p}$$

である。これと §3 の結果より

$$u^3 = \pi_1(u, u^2) + \pi_3(u, u^2) + \pi_2(u, u^2)$$
$$\equiv \pi_1(u, \pi_1(2u, u)) + \pi_1(u^2, u)$$
$$\equiv \pi_1(u \cdot 2u, u) + \pi_1(u^2, u)$$
$$= \pi_1(3u^2, u)$$

がわかる。より一般に、次の定理が成立つ。

<u>定理10</u>　$u_1(x), \cdots, u_N(x) \in B^{M,s}_{p,q}$，$s > \frac{|M|}{p}$ とする。さらに

(HR) $F(X_1, \cdots, X_N)$ は $\mathbb{R}^\nu$ 上の C^∞ 函数，$u_1, \cdots, u_N$ は実数値函数，$F(0, \cdots, 0) = 0$

(HC) $F(X_1, \cdots, X_N)$ は各 X_j の整函数，$u_1, \cdots, u_N$ は複素数値函数，$F(0, \cdots, 0) = 0$

の一方が成立っていると仮定する。この時，

- $F(u_1(x), \cdots, u_N(x)) \in B^{M,s}_{p,q}$
- $F(u_1(x), \cdots, u_N(x)) - \sum_{j=1}^{N} \pi_1\left(\frac{\partial F}{\partial X_j}(u_1(x), \cdots, u_N(x)), u_j\right)(x) \in B^{M, 2s-\frac{|M|}{p}}_{p,q}$

である。

$F(u_1(x), \cdots, u_N(x))$ が一部の変数について多項式になっている場合は、いくつかの単項式に分解して考えることにより、より弱い条件の下で成立つ次の定理が適用できる。

<u>定理11</u>　F，$u_1, \cdots, u_N$ については定理10の仮定と同じ条件が成立っているとする。さらに、$v_j(x) \in B^{M,t_j}_{p,q}$ $(j = 1, \cdots, K)$，

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{K-1} \leq s_K \leq s$$

であるとする。

$s_j = s \quad (j > K)$ とおくと、

$$\begin{cases} s_1 + s_2 > 0 \\ \min\limits_{2 \leq j \leq K} \left(\sum\limits_{k=1}^{j} s_k + |M| - \frac{j}{p}|M| \right) > 0 \end{cases}$$

ならば $v_1(x) \cdot v_2(x) \cdot \cdots \cdot v_K(x) \cdot F(u_1(x), \cdots, u_N(x)) = G(x)$

は定義され、$B_{p,q}^{M,\tau}$ に属する。但し

$$\tau = \min_{1 \leq j \leq K+1} \left(\sum_{k=1}^{j} s_k - \frac{j-1}{p}|M| \right)$$ である。

また、この時、任意の多重指数 α に対して、

$\partial_x^\alpha G(x)$ を形式的に $\partial^\gamma v_k(x)$、$\partial^\beta u_j(x)$ 達の函数で表わした

式を $G_\alpha(\cdots, \partial^\gamma v_k(x), \cdots, \partial^\beta u_j(x), \cdots)$ とおくと、

$$\partial_x^\alpha G(x) - \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha,\, k \\ s_k - M\cdot\gamma \leq |M|/p}} \pi_1 \left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial(\partial^\gamma v_k)} (\cdots, \partial_x^{\gamma'} v_{k'}(x), \cdots, \partial_x^\beta u_j(x), \cdots), \partial_x^\gamma v_k \right)(x)$$

$$- \sum_{\substack{\beta \leq \alpha,\, j \\ s - M\cdot\beta \leq |M|/p}} \pi_1 \left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial(\partial^\beta u_j)} (\cdots, \partial_x^\gamma v_k(x), \cdots, \partial_x^{\beta'} u_{j'}(x), \cdots), \partial_x^\beta u_j \right)(x)$$

は $B_{p\,q}^{M,\, s_1 + s_2 - M\cdot\alpha - |M|/p}$ に属する。さらに

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_\alpha}{\partial(\partial_x^\gamma v_k)} (\cdots, \partial_x^{\gamma'} v_{k'}(x), \cdots, \partial_x^\beta u_j(x) \cdots) \in B_{p,q}^{M,\, s_h - M(\gamma - \alpha)} \\ \qquad (h = 1 \quad (k \geq 2),\ h = 2 \quad (k = 1)) \\ \dfrac{\partial G_\alpha}{\partial(\partial_x^\beta u_j)} (\cdots, \partial_x^\gamma v_k(x), \cdots, \partial_x^{\beta'} u_{j'}(x), \cdots) \in B_{p,q}^{M,\, s_1 - M(\gamma - \alpha)} \end{cases}$$

が成立つ。

定理10は Meyer [11] と同じ方針で証明される。定理11は定理10と§2, §3の結果を用いて、組合せ論的な考察によって証明される。

§5. 函数空間の超局所化と波面集合

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω に対して $(T^*\Omega)^\times = \{(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,\ \xi \neq 0\}$ と書く。$\Gamma \subset (T^*\Omega)^\times$ が $(x_0,\xi_0) \in (T^*\Omega)^\times$ の M-錐近傍であるとは、十分小さな $d>0$ を取れば

$$U_{(x_0,\xi_0)}(d)$$
$$=\{(x,\xi) \in (T^*\Omega)^\times ;\ |x-x_0|<d,\ [\xi]_M > d^{-1},\ |[\xi]_M^{-M}\xi - [\xi_0]_M^{-M}\xi_0| < d\}$$

が Γ に含まれることを言う。

また、$\psi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が m 次 M-準斉次であるとは、ある $A>0$ が存在して、$[\xi]_M \geq A$, $t \geq 1$ ならば

$\psi(t^M\xi) = t^m\psi(\xi)$　となることを言う。

以上の用語を用いて、$E = B^{M,s}_{p,q}$ 又は $F^{M,s}_{p,q}$ に対して以下のように定義する。

<u>定義</u>　$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ が $(x_0,\xi_0) \in (T^*\Omega)^\times$ で microlocal に E に属するとは、$\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 及び 0 次 M-準斉次な $\psi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在して、$\varphi(x)\psi(\xi)$ は (x_0,ξ_0) の M-錐近傍 Γ で 0 にならず、

$$\psi(D_x)(\varphi(x)u(x)) = \mathcal{F}^{-1}[\psi(\xi)\cdot\widehat{\varphi u}(\xi)](x) \in E$$

が成立っていることを言う。また、集合

$$\{(x,\xi)\in(T^*\Omega)^\times\ ;\ u\text{は}(x,\xi)\text{で}\ \mathit{microlocal}\ \text{に}E\text{に属さない}\}$$

をEにおけるuの波面集合といい、$WFE(u)$と記す。

もし、$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$がx_0の近傍で$v(x)\in B^{M,t}_{p,q}$ [resp. $F^{M,t}_{p,q}$], ($t<s$)に一致しているならば、$(x_0,\xi_0)\notin WFE(u)$と(x_0,ξ_0)でM－非特性なる$P(x,\xi)\in S(B^{M,\infty}_{\infty,\infty})^0$が存在して

$$P(x,D_x)v(x)\in E$$

となることは同値である。また、$P\in S(B^{M,\infty}_{\infty,\infty})^0$, $u\in B^{M,t}_{p,q}$ならば$j=2,3$に対して$\pi_j(P(x,D_x),v)(x)\in B^{M,}_{p,q}$となることから、上の条件は

$$\pi_1(P(x,D_x),v)(x)\in E$$

と書いても同値である。ここでm階のシンボル$P(x,\xi)$が(x_0,ξ_0)でM－非特性とは、$\lim_{t\to\infty}P(x_0,t^M\xi_0)t^{-m}$が存在して0に等しくないこととする。

次に、$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$, $x_0\in\Omega$に対して

1) $\forall\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$; $(x_0,\xi)\notin WFE(u)$

2) $\varphi(x_0)\neq 0$なるある$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$に対して$\varphi(x)u(x)\in E$

3) $x_0\in U\subset\Omega$なる開集合Uが存在し、$\mathrm{supp}\,\varphi\subset U$なる任意の$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$に対して$\varphi(x)u(x)\in E$

の3条件は同値である。これらの条件が満足される時、$u(x)$

は x_0 の近傍で local に E に属するという。

この概念を用いて、§4 の結果を局所化することができる。例えば、定理10の局所化として次の定理を得る。

<u>定理12</u> $u_1(x), \cdots, u_N(x)$ は x_0 の近傍で超局所的に $B_{p,q}^{M,s}$ $\left(s > \frac{|M|}{p}\right)$ に属し、さらに条件

(HRΩ) $F(x; X_1, \cdots, X_N)$ は $\Omega \times \mathbb{R}^n$ 上の C^∞-函数で、
$u_1, \cdots, u_N$ は実数値函数

(HCΩ) $F(x; X_1, \cdots, X_N)$ は $x \in \Omega$ について C^∞、各 X_j について整函数で、$u_1, \cdots, u_N$ は複素数値函数

の一方が成立っていると仮定する。この時、$\varphi(x_0) \neq 0$ なる $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ を適当に取れば、$F(x; u_1(x), \cdots, u_N(x))$ は x_0 のある近傍で定義され、そこで $B_{p,q}^{M, 2s - \frac{|M|}{p}}$ に属する函数と

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_1\left(\frac{\partial F}{\partial X_j}(\varphi(x)x + (1-\varphi(x))x_0; \varphi(x)u_1(x), \cdots), \varphi u_j\right)(x)$$

の和に等しい。

実際、$F(x; u_1(x), \cdots, u_N(x))$ は、x_0 の近傍では
$$F(\varphi(x)x + (1-\varphi(x))x_0; \varphi(x)u_1(x), \cdots, \varphi(x)u_N(x))$$
に等しい。これに対して定理10を用いると、上の式は regular term を

$$\sum_{\ell=1}^{n} \pi_1\left(\frac{\partial F}{\partial x_\ell}, \varphi(x)x_\ell + (1-\varphi(x))(x_0)_\ell\right) + \sum_{j=1}^{N} \pi_1\left(\frac{\partial F}{\partial X_j}, \varphi u_j\right)$$

であるが、$\varphi(x)x_\ell+(1-\varphi(x))(x_0)_\ell$ は $B^{M,\infty}_{\omega,\omega}$ に属するから結論を得る。

定理11についても同様の局所化ができる。

§6. 非線型方程式の解の超局所正則性

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ に対する非線型方程式

$$\sum_{h=1}^{N}\partial_x^{\beta(h)}(F_h(x;u(x),\cdots,\partial_x^\alpha u(x),\cdots))=f(x) \quad \text{----}(6.1)$$

を考える。但し、各 F_h は条件（HRΩ）又は（HCΩ）を満足しているとする。

（6.1）を形式的に書直した方程式を

$$A(x;u(x),\cdots,\partial_x^\alpha u(x),\cdots)=f(x) \quad \text{--------}(6.2)$$

とした時、$m=\max\{M\cdot\alpha\,;\,\partial_x^\alpha u(x)$ がAに現われる$\}$
を方程式（6.2）の重み付階数を言う。また、

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\partial A}{\partial(\partial^\alpha u)}(x;u(x),\cdots,\partial_x^\beta u(x),\cdots)(i\xi)^\alpha \quad \text{----}(6.3)$$

を（6.1）の形式的シンボルと言い、（6、3）の式で$M\cdot\alpha=m$ なる α についてのみ和をとったものを（6、1）の主シンボルと言う。

次に、各 $h=1,\cdots,N$ に対して

$$\lambda_1(h)=\max\{M\cdot\alpha\,;\,\partial_x^\alpha u(x) \text{ が } F_h \text{ に現われる}\}$$

$\lambda_0(h) = \max\{M\cdot\alpha\,;\, \partial_x^\alpha u(x)$ が F_h に現われ、しかも F_h は $\partial_x^\alpha u(x)$ について単項式でない$\}$

と定める。$\lambda_1(h) < \lambda_0(h)$ ならば、$\partial_x^\alpha u(x)$ が F_h に現われ、

$M\cdot\alpha = \lambda_1(h)$ となるような $\alpha \in \mathbb{N}^n$ を1つとって、

$F_h(1) = F_h/(\partial_x^\alpha u(x))$ と定める。

$\lambda_1(h), \cdots, \lambda_{j-1}(h)$ $(j \geq 2)$ が定義された時

$$\begin{cases} \lambda_{j-1}(h) = \lambda_0(h) \text{ の時 } \lambda_j(h) = \lambda_0(h) \\ \lambda_{j-1}(h) < \lambda_0(h) \text{ の時} \end{cases}$$

$\lambda_j(h) = \max\{M\cdot\alpha\,;\, \partial_x^\alpha u(x)$ が $F_h(j-1)$ に現われる$\}$

と定め、また $\lambda_j(h) < \lambda_0(h)$ ならば、$\partial_x^\alpha u(x)$ が F_h に現われ

$M\cdot\alpha = \lambda_j(h)$ となるような $\alpha \in \mathbb{N}^n$ を1つとって

$F_h(j) = F_h(j-1)/(\partial_x^\alpha u(x))$ と定める。

この時、次のことは明らか。

- $\lambda_0(h) = -\infty \iff F_h$ は $\partial_x^\alpha u(x)$ たちの積
- $\lambda_2(h) = -\infty \iff F_h$ は線型項
- $\lambda_j(h)$ $(j \geq 1)$ は j について単調減少
- $j_h \in \mathbb{N}$ があって、$j \geq j_h \iff \lambda_j(h) = \lambda_0(h)$

<u>例</u>　$F_h = (\partial_x^2 u)\cdot(\partial_x u)^2\sqrt{1+u^2}$ の時

$\lambda_0(h) = 0$

$\lambda_1(h) = 2$, $F_h(1) = (\partial_x u)^2\sqrt{1+u^2}$

$\lambda_2(h) = 1$, $F_h(2) = \partial_x u\sqrt{1+u^2}$

$$\lambda_3(h)=1,\quad F_h(\xi)=\sqrt{1+u^2}$$

$$\lambda_4(h)=\lambda_5(h)=\cdots=0$$

さらに、(6.1)のある解uについて、(6.1)の主シンボルの零点全体の作る$(T^*\Omega)^\times$の閉部分集合を(6.1)の特性多様体といい、特性多様体に属さない点を非特性点という。

特性多様体は、一般には解によって定まる概念であるが、(6.1)が半線型ならば解によらずに定まる。

以上の準備の下に、主定理を述べる。

<u>定理13</u>　$1\le p, q\le\infty$とする。この時

$$\rho=\max_{1\le h\le N}\left\{\lambda_0(h)+\frac{|M|}{p},\ \frac{\lambda_1(h)+\lambda_2(h)}{2},\ \max_{2\le k\le j_h-1}\left\{\frac{|M|}{p}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\max\left\{\frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(h)-|M|\right),\ \frac{1}{k-1}\left(M\beta(h)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(h)-m\right)\right\}\right\}\right\}$$

とおく。

(6.1)の解$u(x)$が$x_0\in\Omega$の近傍で$B^{M,s}_{p,q}$ $(s>\rho)$に属し、(x_0,ξ_0)がuについての(6.1)の非特性点ならば、

$$\mu=\min_{1\le h\le N}\left\{\min\left\{2s-2\lambda_0(h)-\frac{|M|}{p},\right.\right.$$

$$\left.\left.\min_{2\le k\le j_h-1}\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(s-\lambda_j(h)-\frac{|M|}{p}\right)+\frac{|M|}{p}\right\}\right\}-M\cdot\beta(h)\right\}$$

とおくと、$t<\mu$なる任意のtに対して、(さらに、sの値が高々有限個の除外値でなければ、$t=\mu$に対しても)

$$(x_0,\xi_0)\notin WFB^{M,t}_{p,q}(f)\Longrightarrow(x_0,\xi_0)\notin WFB^{M,t+m}_{p,q}(u)$$

注意3　$1<p<\infty$ ならば、B－空間をF－空間におきかえても成立つ。

注意4　全く一般の重み付 m 階非線型方程式に対しては、$\rho=m+\frac{|M|}{p}$, $\mu=2s-2m-\frac{|M|}{p}$ である。方程式が線型に近づくにつれて ρ は小さく，μ は大きくなり、線型の時は $\rho=-\infty$，$\mu=\infty$ となる。

注意5　条件 $s>\rho$ は、定義可能性条件（非線型項が§4の意味で解釈でき、我々の理論に乗るための条件）と正則性増大条件（$\mu+m>s$）を合わせたものである。後者は、主シンボルが x について連続になるための十分条件でもある。

証明の方針　x_0 の近傍で 1 に等しい $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ を適当にとり

$$\sum_{h=1}^{N}\partial_x^{\beta(h)}(F_h(\varphi(x)x+(1-\varphi(x))x_0;\cdots,\varphi(x)\partial_x^\alpha u(x),\cdots)$$

を考える。これは x_0 の近傍で $f(x)$ に一致している。上の式に対して§5の理論を用いると、x が x_0 のある近傍上の点の時

$$\sum_{M\cdot\alpha\geq s-\mu}\frac{\partial A}{\partial(\partial_x^\alpha u)}(x;u(x),\cdots,\partial_x^\beta u(x),\cdots)(i\xi)^\alpha=\sum_{j=0}^{j_0}P_j(x,\xi)$$

となるようなシンボル $P_j(x,\xi)\in S(B_{p,\xi}^{M,\mu+m-s+\frac{|M|}{p}-\sigma_j})^{m-\sigma_j}$ $(0=\sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_{j_0}=\mu+m-s)$ があって、

$\sum_{j=0}^{j_0}\pi_1(P_j(x,D_x),u)(x)-f(x)$ は、x_0 の近傍で局所的に

$B^{M,\mu}_{p,q}$ に属する。$t \le \mu$ だから、(x_0, ξ_0) で非特性なシンボル $Q(x, \xi) \in S(B^{M,\infty}_{\infty,\infty})^0$ を適当に取ると、

$$\pi_1(Q(x, D_x), \sum_{j=0}^{j_0} \pi_1(P(x, D_x), u))(x) \in B^{M,t}_{p,q}$$

(x_0, ξ_0) における Q 及び P の *microlocal parametrix* を順次作用させて結論を得る。

<u>例1</u>　粘性0の Burgers 方程式　$u_{x_1} + \frac{1}{2}\partial_{x_2}(u^2) = f$

$M = (1, 1)$ とすると、特性多様体は $\{(x, \xi);\ \xi_1 + u(x)\xi_2 = 0\}$

ρ, μ は第2項のみで定まり、この項について $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_0 = \lambda_3 = \cdots = -\infty$ であるから、$|M| = 2$, $m = 1$ を代入して

$$\rho = \max\left\{0,\ \frac{1}{2}(-2) + \frac{2}{p},\ 1 - 1 + \frac{2}{p}\right\} = \frac{2}{p}$$

$s > \frac{2}{p}$ ならば $\mu = 2s - 2\cdot\frac{2}{p} + \frac{2}{p} - 1 = 2s - \frac{2}{p} - 1$

<u>例2</u>　粘性≠0の Burgers 方程式　$u_{x_1} - u_{x_2x_2} + \frac{1}{2}\partial_{x_2}(u^2) = f$

$M = (2, 1)$ とすると、この方程式は全方向で非特性である。

$$\rho = \max\left\{0,\ \frac{1}{2}(-3) + \frac{3}{p},\ 1 - 2 + \frac{3}{p}\right\} = \begin{cases} 0 & (p \ge 3) \\ \frac{3}{p} - 1 & (p < 3) \end{cases}$$

$s > \rho$ の時、$\mu = 2s - 2\cdot\frac{3}{p} + \frac{3}{p} - 1 = 2s - \frac{3}{p} + 1$

よって、$u(x)$ が x_0 の近傍で local に $B^{M,s}_{p,q}$ $(s > \rho)$ に属し、しかも $f(x)$ が x_0 の近傍で local に $B^{M,t}_{p,q}$ $(t > \mu)$ に属するならば、$u(x)$ は x_0 の近傍の全余接方向で $B^{M,2s-\frac{3}{p}+1}_{p,q}$

に属し、従って x_0 の近傍で local に $B_{p,q}^{M,2s-\frac{3}{p}+1}$ に属する。

同じ議論を繰り返して、$u(x)$ は x_0 の近傍で local に $B_{p,q}^{M,t+2}$ に属する。

例3　KdV方程式　$u_{x_1} - u_{x_2x_2x_2} + \frac{1}{2}\partial_{x_2}(u^2) = f$

これは $M=(3,1)$ とおいて例1、例2と同様に扱える。

例4　弦の方程式　$u_{x_1x_1} - \partial_{x_2}\left(\frac{u_{x_2}}{\sqrt{1+u_{x_2}^2}}\right) = f$

$M=(1,1)$, $m=2$ とする。展開した形は

$$u_{x_1x_1} - \frac{u_{x_2x_2}}{(1+u_{x_2}^2)^{3/2}} = f$$

である。従って、特性多様体は

$$\left\{(x,\xi)\,;\ \xi_1 = \pm\frac{\xi_2}{(1+u_{x_2}^2)^{3/2}}\right\}$$ である。

非線型項について

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 1,\ j_\lambda = 1$$

よって

$$\rho = \max\left\{1+\frac{2}{p},\ \frac{1+1}{2}\right\} = 1+\frac{2}{p}$$

$$\mu = 2s - 2 - \frac{2}{p} - 1 = 2s - \frac{2}{p} - 3$$

REFERENCES

[1] M. Beals, Spreading of singularities for a semilinear wave equations, Duke Math. J., 49 (1982), 275-286.

[2] M. Beals and M. Reed, Propagation of singularities for hyperbolic pseudo-differential operators with non-smooth symbols, Comm. Pure Appl. Math., 35 (1982), 169-184.

[3] O. V. Besov, Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension, Trudy Math. Inst. Steklov, 60 (1961), 42-81.

[4] J. M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les equations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, 14 (1981), 209-246.

[5] J. M. Bony, Interaction des singularités pour les equations aux dérivées partielles non linéaires, Sém., Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1981-82, exp. n° 2.

[6] G. Bourdaud, L^p-estimates for certain non-regular pseudo-differential operators, Comm. in Partial Differential Equations, 7 (1982), 1023-1033.

[7] B. Lascar, Singularités des solutions d'equations aux dérivées partielles non linéaires, C. R. Acad. Sc. Paris, 287 (1978), 527-529.

[8] B. Lascar, Propagation des singularités des solutions d'equations aux dérivées partielles non linéaires, Adv. Math. Suppl. Studies, 7B (1981), 455-482.

[9] R. Lascar, Propagation des singularités des solutions d'equations pseudo-différentielles quasi homogènes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27 (1977), 79-123.

[10] Y. Meyer, Regularité des solutions des equations aux dérivées partielles non linéaires, Sém. Bourbaki, 32^e annee, 1979/80, n^{o}560.

[11] Y. Meyer, Remarques sur un théorème de J. M. Bony, Supplemento ai rendiconti del Circolo matematico di Palermo, atti del Seminario di Analsi Armonica Pisa, 8-17 aprile 1980, serie II, numero 1 (1981), 1-20.

[12] Y. Meyer, Multiplication of distributions, Adv. Math. Suppl. Studies, 7B (1981), 603-615.

[13] Y. Meyer, Nouvelles estimations pour les solutions d'equations aux dérivées partielles non linéaires, Sem. Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1981-82, exp. n^o 6.

[14] M. Nagase, The L^p-boundedness of pseudo-differential operators with non-regular smbols, Comm. in Partial Differential Equations, 2 (1977), 1045-1061.

[15] J. Rauch, Singularities of solutions to semilinear wave equations, J. Math. pures et appl., 58 (1979), 299-308.

[16] J. Rauch and M. Reed, A general regularity theorem for semilinear hyperbolic waves in one space dimension, Bull. Amer. Math. Soc., 6(1982), 445-448.

[17] J. Rauch and M. Reed, Nonlinear microlocal analysis of semi-linear hyperbolic systems in one space dimension, Duke Math. J., 49 (1982), 397-475.

[18] J. Rauch and M. Reed, Jump discontinuities of semilinear, strictly hyperbolic systems in two variables: Creation and propagation, Comm. Math. Phys., 81 (1981), 203-227.

[19] J. Rauch and M. Reed, Propagation of singularities in non-strictly hyperbolic semilinear systems: Examples, Comm. Pure Appl. Math., 35 (1982), 555-565.

[20] J. Rauch and M. Reed, Singularities produced by the non-linear interaction of three progressing waves; Examples, Comm. in Partial Differential Equations, 7 (1982), 1117-1133.

[21] H. Triebel, Generalized Function Spaces. III, Analysis Mathematica, 3 (1977), 221-249; IV, ibid., 3 (1977), 299-315; V, Math. Nachr., 87 (1979), 129-152.

[22] H. Triebel, Fourier Analysis and Function Spaces, Teubner-Texte zur Math., Teubner Verlag, Leipzig, 1977.

[23] H. Triebel, Spaces of Besov-Hardy-Sobolev Type, Teubner-Texte zur Math., Teubner Verlag, Leipzig, 1978.

[24] M. Yamazaki, Continuité des opérateurs pseudo-différentiels et para-différentiels dans les espaces de Besov et les espaces de Triebel-Lizorkin non-isotropes, C. R. Acad. Sc. Paris, Série I, 296 (1983), 533-536.

[25] M. Yamazaki, Régularité microlocale quasi-homogène des solutions d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, preprint.

[26] 山崎昌男, 準斉次 para-differential operator と非線型方程式の超局所解析, 東京大学修士論文, 1983.