数理解析研究所講究録
第510巻 1984年 1-17

流体の非定常運動

工学院大学 今井 功 (Isao IMAI)

§1. はじめに

流体の運動を理論的に扱うばあいに注意すべき点をすこし考える.

(1) 重ね合せができるか?

(2) 圧力の一意性はどうか?

これは一見当然のようであるが, 見過されることがあるように思われる.

(1)については, Navier-Stokes方程式は本来非線形であるから, 重ね合せはもちろん一般的には成り立たない. しかし, 線形近似 —— Stokes近似, Oseen近似など —— では成り立つ. また, 縮まない流体の渦無しの流れでは

$$\Delta\Phi = 0, \quad \boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\Phi$$

($\boldsymbol{v}$: 速度ベクトル, Φ: 速度ポテンシャル) は線形であるから, 速度場の重ね合せができる. しかし, これは幸運な事

情であって，渦運動では必ずしもそうであるとはいえない．

(2)については，Navier-Stokes方程式は速度 $\boldsymbol{v}$ と圧力 p に対する方程式である．これを解くのに，p を消去すると $\boldsymbol{v}$ だけの方程式になる．$\boldsymbol{v}$ が求まれば p は計算できる．ところが，$\boldsymbol{v}$ が場所の1価関数であっても，p は一般には多価になる．(実は，境界条件を満足するような $\boldsymbol{v}$ には不定性がともなう．) 問題は，"p が1価になるように $\boldsymbol{v}$ を決めよ"ということになる．これは，物体を過ぎる粘性流の数値計算などで経験される事情である．

以下では，粘性の影響の現われない段階でも，上の(1),(2)について注意すべき点が現われることを述べる．具体例として，縮まない完全流体の2次元の非定常流で，渦度 ω が一定のばあいをとり上げる．Lagrangeの渦定理によって，$\omega = \mathrm{const}$ (空間的にも時間的にも) のような非定常流が実現するからである．

§2. 運動方程式

縮まない完全流体の運動方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\, H + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2.1}$$

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} \tag{2.3}$$

の形に表わされる．$\boldsymbol{v}$ は速度，p は圧力，ρ は密度，q は速度の大きさ $|\boldsymbol{v}|$，Ω は外力のポテンシャルである．なお，連続の方程式は

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.4}$$

である．2次元流では，複素形式：

$$w = u - iv, \qquad z = x + iy \tag{2.5}$$

を使えば，$\boldsymbol{v}(u, v, 0)$，$\boldsymbol{\omega}(0, 0, \omega)$ は

$$w = 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad \omega = 2i \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.6}$$

のように表わされる．ただし Ψ は流れの関数である．また，運動方程式 (2.1) は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -2 \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + i \omega w \tag{2.7}$$

となる．今後 $\omega = \mathrm{const}$ を仮定しよう．(2.6) の第1式を使えば，(2.7) は $\bar{z}$ について積分できる．その複素共役は

$$H = i\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega\right)\Psi + h(z). \tag{2.8}$$

ただし，$h(z)$ は z の任意の正則関数である．

つぎに，$\omega=$定数 を考慮して（2.6）を積分すれば

$$\Psi=-\frac{\omega}{4}z\bar{z}+\mathrm{Im}\,f(z) \tag{2.9}$$

が得られる．$f(z)$ は z の任意の正則関数である．ここに注意すべきは，$f(z)$, $h(z)$ は時間 t をパラメーターとして含んでいてもよいことである．

さて，(2.8)の虚数部をとれば

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\mathrm{Im}\,h(z)=0.$$

ところが（2.9）から $\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=\mathrm{Im}\dfrac{\partial f}{\partial t}$．したがって

$$h(z)=-\frac{\partial f}{\partial t}+\text{実数定数} \tag{2.10}$$

の関係がある．そこで（2.9）を（2.8）に代入すると

$$H=\frac{\omega^2}{4}z\bar{z}-\omega\,\mathrm{Im}\,f-\mathrm{Re}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.11}$$

が得られる．また，(2.9) を (2.6) に代入すれば

$$w=-\frac{i}{2}\omega\bar{z}+f'(z) \tag{2.12}$$

である．このように，複素速度 w と H（したがって圧力 p）はただ1個の正則関数 $f(z)$ によって決定されるのである．

§3. 境界条件

境界 B の上の点 z の速度は $\dot{z}$ である.

速度 $\dot{z}$ の法線成分は

$$
\begin{aligned}
V_n &= \dot{x} n_x + \dot{y} n_y \\
&= \mathrm{Re}\{(\dot{x} - i\dot{y})(n_x + i n_y)\} \\
&= \mathrm{Re}\left(\bar{\dot{z}} \cdot \frac{1}{i}\frac{dz}{ds}\right) = \mathrm{Im}\left(\bar{\dot{z}} \frac{dz}{ds}\right).
\end{aligned}
$$

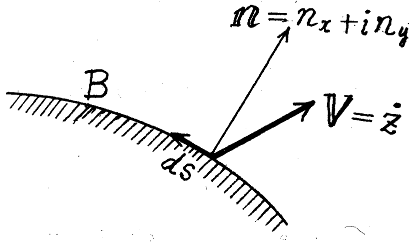

図1

流速の法線成分は $v_n = \dfrac{\partial \Psi}{\partial s}$ である. $v_n = V_n$ を s について積分すれば

$$\Psi = \mathrm{Im}\int_B \bar{\dot{z}}\, dz \qquad \text{B 上で} \tag{3.1}$$

となる. いまのばあい Ψ は (2.9) で与えられるから

$$\mathrm{Im}\, f(z) = \frac{\omega}{4} z\bar{z} + \mathrm{Im}\int_B \bar{\dot{z}}\, dz \qquad \text{B 上で} \tag{3.2}$$

が境界条件である. これによって $f(z)$ が決定される.

f がきまれば, (2.12) によって w が, (2.11) によって H が, したがって (2.2) によって p がきまる. その際 w, p が場所の1価関数であることが要求される. ふつう w の一価性は確かめられるが, p の一価性の検証も忘れてはならないのである. このことを'時間的に変化する Rankine 渦'について確かめよう.

§4. 非定常の Rankine 渦

1. 一様回転流の中の渦糸・すいこみ

$f(z)$ として

$$f(z) = (m + i\kappa)\log z \tag{4.1}$$

をとる．このとき，$z = re^{i\theta}$ とすれば

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (\dot{m} + i\dot{\kappa})\log z,$$

$$\mathrm{Im}\, f = \kappa \log r + m\theta, \qquad \mathrm{Re}\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{m}\log r - \dot{\kappa}\theta,$$

$$w = -\frac{i}{2}\omega\bar{z} + (m + i\kappa)\frac{1}{z},$$

$$H = \frac{\omega^2}{4}r^2 - (\omega\kappa + \dot{m})\log r + (\dot{\kappa} - m\omega)\theta.$$

w は1価であるが，H は一般には多価である．一価性を満足するためには，

$$\dot{\kappa} = m\omega \tag{4.2}$$

の条件を満足しなければならない．したがって，もし一様回転流中にすいこみ m があれば，自動的に渦糸（強さ κ）が発生する．

2. Rankine渦が，その中心からしだいに吸いとられて小さくなっていくばあいを考える．任意の瞬間における渦の半

径を a とすれば，$r<a$ では渦度は ω，$r>a$ では渦無しである（図2）．

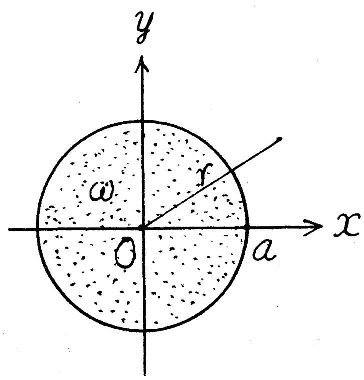

図2

(i) $r<a$ では，上の **1** により

$$f=(m+i\kappa)\log z,$$
$$w=-\frac{i}{2}\omega\bar{z}+(m+i\kappa)\frac{1}{z},$$
$$H=\frac{\omega^2}{4}r^2-(\omega\kappa+\dot{m})\log r,$$
$$\dot{\kappa}=m\omega \tag{4.3}$$

である．また

$$m=a\dot{a} \tag{4.4}$$

の関係がある．すなわち，すいこみによって円の半径が変化するからである．

(ii) $r>a$ では，渦無しであるから，流れは複素速度ポテンシャル $f(z)$ だけで表わされる：

$$f=\left\{m+i\left(\kappa-\frac{\omega}{2}a^2\right)\right\}\log z.$$

ただし，$r=a$ で w が連続的につながるように $\log z$ の係数がきめてある．これから

$$\mathrm{Re}\frac{\partial f}{\partial t}=\dot{m}\log a-(\dot{\kappa}-\omega a\dot{a})\theta \qquad (r=a)$$

(2.11) により $H=-\mathrm{Re}\dfrac{\partial f}{\partial t}$ であるから，H が1価であるためには $\dot{\kappa}=\omega a\dot{a}$ でなければならない．したがって

$$\varkappa = \frac{\omega}{2} a^2 + \text{const.} \tag{4.5}$$

したがって，Rankine渦の半径 a が時間的に変化しても，渦の外部での循環の値 $-2\pi(\varkappa - \frac{\omega}{2}a^2)$ は一定に保たれる。なお注意すべきは，このばあい（4.3）と（4.4）から（4.5）が導かれる。すなわち，（4.3），（4.4）の条件によって渦の外部（$r > a$）での圧力 p の一価性が保証されるのである。

§5. Kirchhoff の楕円渦

一様な渦度分布をもつ楕円形の渦が静止流体中で一定の角速度で回転することが Kirchhoff によって見出された。（たとえば Lamb [1] 参照。）この問題を上に述べた複素形式でとり扱ってみよう。

図3に示す楕円の外部の領域は

$$z = e^{i\chi} g(\zeta), \tag{5.1}$$

$$g(\zeta) = A\zeta + \frac{B}{\zeta} \tag{5.2}$$

によって，ζ 平面の単位円 $|\zeta| = 1$ の外部の領域に写像される。ただし

$$A = \frac{1}{2}(a+b), \quad B = \frac{1}{2}(a-b).$$

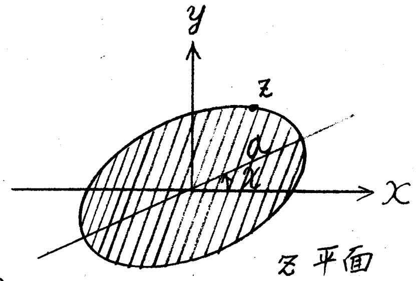

図3

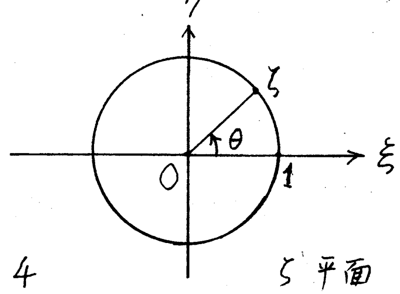

図4

a, b は楕円の長半径および短半径である．また，χ は楕円の長軸が x 軸となす角度である．とくに楕円上の点は，$\zeta = e^{i\theta}$ とおいて，

$$z = e^{i\chi}\left(Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta}\right) \tag{5.3}$$

で与えられる．

<u>(i) 楕円の外部</u>　流れは楕円柱の回転による渦無しの流れである．これはすでによく知られている．たとえば，今井[2] p.411 により

$$f = -iAB\dot{\chi}\frac{1}{\zeta^2} - i\kappa \log\zeta. \tag{5.4}$$

κ は循環定数である．これより

$$w = \frac{df}{d\zeta}\Big/\frac{dz}{d\zeta} = -i\kappa\frac{e^{-i\chi}}{A\zeta}\,\frac{1 - 2\dfrac{AB\dot{\chi}}{\kappa}\dfrac{1}{\zeta^2}}{1 - \dfrac{B}{A}\dfrac{1}{\zeta^2}}.$$

この流速が楕円内部の流れと連続的につながらなければならない．楕円上で $\zeta = e^{i\theta}$ であることを考えて，上式の右辺の分数式が消えるように定数の値を決める．すなわち

$$2\frac{AB\dot{\chi}}{\kappa} = \frac{B}{A} \quad \text{i.e.} \quad \kappa = 2A^2\dot{\chi}. \tag{5.5}$$

このとき

$$w = -2\dot{\chi}Ae^{-i\chi}\frac{1}{\zeta} \tag{5.6}$$

である．つぎに H を求める．$\dot{\chi}, A, B$ が t によらないことに注意して

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{d\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -i\dot{\chi} w z .$$

したがって，(2.11) により

$$\begin{aligned} H &= -\mathrm{Re}\frac{\partial f}{\partial t} = 2A\dot{\chi}^2 \,\mathrm{Im}\frac{g(\zeta)}{\zeta} \\ &= 2A\dot{\chi}^2 \,\mathrm{Re}\left(A + \frac{B}{\zeta^2}\right) \\ &= 2AB\dot{\chi}^2 \cos 2\theta + \mathrm{const} \qquad (\zeta = e^{i\theta}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

これから圧力 p が求まる．

(ii) __楕円の内部__　流速が x, y の1次式であると推定する．（この推定によって所望の結果が得られる．）すなわち

$$w = \alpha z + \beta \bar{z}, \tag{5.8}$$

$$\omega = 2i\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 2i\beta. \tag{5.9}$$

楕円上では，(5.3) により，

$$w = (\alpha A e^{i\chi} + \beta B e^{-i\chi})e^{i\theta} + (\alpha B e^{i\chi} + \beta A e^{-i\chi})e^{-i\theta}.$$

これと (5.6) とが一致すべきことから α, β がつぎのように決定される．

$$\alpha = 2i\frac{AB\dot{\chi}}{A^2-B^2}e^{-2i\chi}, \quad \beta = -2i\frac{A^2\dot{\chi}}{A^2-B^2}. \tag{5.10}$$

したがって，(5.5)，(5.9) を考えあわせると

$$\dot{\chi} = \frac{A^2-B^2}{4A^2}\omega = \frac{ab}{(a+b)^2}\omega \tag{5.11}$$

が得られる．また H は

$$\begin{aligned} H &= \frac{\omega^2}{4}z\bar{z} - \omega\,\mathrm{Im} f - \mathrm{Re}\frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\omega^2}{4}z\bar{z} - \omega\,\mathrm{Im}\left(\frac{\alpha}{2}z^2\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{\dot{\alpha}}{2}z^2\right) \\ &= \omega^2\frac{B}{8A^3}(A^2-B^2)\cos 2\theta \qquad (\zeta = e^{i\theta}) \end{aligned} \tag{5.12}$$

のように求められる．これは (5.7) と一致する．すなわち，圧力も連続的につながる．

流速については Lamb [1] の本に計算があるが，圧力についてはなんら言及していない．Villat [4] の本には圧力の詳しい計算がされているが，pp. 187～198 に及ぶ大計算である．ここで提案した複素形式による方法は計算を見通しよくする点できわめて便利なものと信ずる．

§6. ひずみ流の中の楕円渦

木田 [3] は一様な渦度とひずみのある流れの中に別の一様な渦度をもつ楕円渦が存在するばあいに，渦が楕円形を保ち

ながら自由に行動することを示した．ただし，楕円の形は時間的に変化する．木田のとり扱いは，Kirchhoff の楕円渦と一様なひずみ流との重ね合せとして問題の流れが得られるという考え方に立つものである．§1で述べたように，渦運動においては流れの重ね合せは必ずしも可能ではないから，この‘重ね合せ’を前提としないとり扱いが望ましいと筆者は考える．そこで，§5の Kirchhoff の楕円渦のとり扱いをそのままこの問題に適用することにした．

問題はつぎのように定式化される．

$$w \sim \alpha z + \beta \bar{z}, \quad z \to \infty \tag{6.1}$$

$$w = -\frac{i}{2}\omega \bar{z} + f'(z), \quad |\zeta| > 1 \tag{6.2}$$

$$w = \gamma z + \delta \bar{z}, \quad \text{楕円の内部} \tag{6.3}$$

$$w \text{ は } |\zeta| = 1 \text{ で連続} \tag{6.4}$$

ここで，α は一様なひずみを表わす定数で $\alpha=$実数と仮定しておいても一般性を損なわない．ω は一様な渦度．

$$\omega = 2i\beta, \quad \omega' = 2i\delta. \tag{6.5}$$

ω' は楕円の内部の渦度である．ω, ω', α を与えたとき，上の定式化によって $f(z), \alpha, \beta, \gamma, \delta$ がすべて定まることが期待される．

(6.1) を考慮して

$$f(z) = \frac{\alpha}{2} z^2 + f_0(z) \tag{6.6}$$

とおけば，境界条件 (3.2) は

$$\mathrm{Im}\, f_0 = -\mathrm{Im}\left(\frac{\alpha}{2} z^2\right) + \frac{\omega}{4} z\bar{z} + \mathrm{Im}\int_B \bar{\dot{z}}\, dz, \quad (\zeta = e^{i\theta}) \tag{6.7}$$

となる．ただし

$$z = e^{i\chi}(A\zeta + B\zeta^{-1}).$$

(6.7) の右辺の最後の項は，静止流体中で楕円柱が変形しながら回転するときの渦無しの流れを決定するときに現われるもので，それに対する f_0 は既知である（今井 [2] p.413).

$\zeta \to \infty$ のとき $f_0' \to 0$ であるから，(6.7) の右辺のはじめの2項に相当する f_0 も容易に求められる．けっきょく

$$f_0 = i\kappa \log\zeta + \left\{ \frac{1}{2}(\bar{\alpha} A^2 e^{-2i\chi} - \alpha B^2 e^{2i\chi}) + \frac{i}{2}(\omega - 2\dot{\chi})AB - \frac{1}{2}(A\dot{B} - \dot{A}B) \right\} \frac{1}{\zeta^2} + \mathrm{const.} \tag{6.8}$$

循環定数 κ はさしあたり任意である．この f_0 を用いた w が楕円の内部での流速 $w = \gamma z + \delta\bar{z}$ に連続的につながるためには，$df_0/dz = (df_0/d\zeta)\cdot(dz/d\zeta)^{-1}$ が $\zeta = e^{i\theta}$ で ζ^{-1} の1次式でなければならない．この条件から

$$\kappa = -i\frac{A}{B}\{(\bar{\alpha} A^2 e^{-2i\chi} - \alpha B^2 e^{2i\chi}) + i(\omega - 2\dot{\chi})AB - (A\dot{B} - \dot{A}B).$$

これを実数部と虚数部に分けると，

$$\kappa = -\alpha \frac{A}{B}(A^2+B^2)\sin 2\chi + (\omega - 2\dot{\chi})A^2, \tag{6.9}$$

$$\alpha(A^2-B^2)\cos 2\chi = A\dot{B} - A\dot{B} \tag{6.10}$$

の関係が得られる．なお，(6.3) の条件は

$$\kappa = \frac{1}{2}(\omega - \omega')(A^2-B^2) \tag{6.11}$$

を与える．A, B を a, b で表わし，$ab = const$（楕円の面積 πab は一定である！）を考慮すると，上の式から

$$\alpha \cos 2\chi = \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{b}}{b}, \tag{6.12}$$

$$2\dot{\chi} - \omega = -2\alpha \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\sin 2\chi + \frac{2ab}{(a+b)^2}(\omega' - \omega) \tag{6.13}$$

が得られる．これらの式は，ω, ω', α が与えられたとき，$a(t), b(t), \chi(t)$ の時間的変化を定める微分方程式である．記号のちがいを考慮すれば，これは木田の式と完全に一致する．すなわち，‘重ね合せ’を仮定した木田のとり扱いは，けっきょく正しい結果を導くことが確かめられたわけである．

なお，われわれの方法では流れの場に対する具体的な表式が得られる．これはひとつの利点であるといえるだろう．

(i) 楕円渦の外部

$$\Psi = -\frac{\omega}{4} z\bar{z} + \mathrm{Im}\, f(z),$$

$$f(z) = \frac{\alpha}{2} z^2 + f_0(\zeta),$$

$$f_0(\zeta) = i\kappa\left(\log\zeta + \frac{a-b}{a+b}\frac{1}{\zeta}\right),$$

$$w = \alpha z - \frac{i}{2}\omega\bar{z} + i\frac{2\kappa}{a+b}e^{-i\chi}\frac{1}{\zeta},$$

$$\kappa = -\frac{ab}{2}(\omega'-\omega).$$

(ii) 楕円渦の内部

$$w = \gamma z + \delta\bar{z} = \left\{\alpha + \frac{i}{2}\frac{a-b}{a+b}(\omega'-\omega)e^{-2i\chi}\right\}z - \frac{i}{2}\omega'\bar{z}.$$

圧力の分布も (2.11) を使えば計算できるが，長くなるのでここではその表式を示さない．ただ，楕円渦の内外を通じて圧力が連続的に変化することを注意しておく．

§7. むすび

縮まない流体の2次元の非定常な渦運動では，もし渦度分布が一様であれば，各点での流速と圧力が1つの正則関数 $f(z)$ を用いて具体的に表わされる．$f(z)$ は渦無しの流れに対する複素速度ポテンシャルに相当するものである．$f(z)$ を決めるための境界条件を具体的に与えた．この方法は，一様な渦度分布をもつ流れの中で任意の物体が任意の非定常運動をするばあいに応用できる．しかし，この論文ではそのようなとり扱いは行なわず，楕円渦の運動についてとり扱いの

方法を具体的に示した．この問題は前に木田[3]が別の方法でとり扱ったものである．

文献

[1] Lamb, H.: *Hydrodynamics* (Cambridge Univ. Press, 1932) pp. 232~3

[2] 今井功：流体力学（前編）（裳華房，1973）

[3] Kida, S.: J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 3517~20

[4] Villat, H.: *Leçons sur la théorie des tourbillons* (Gauthiers-Villars, 1930)

付記　数理研の講演会の際には，変形する楕円渦は一般には存在しないと述べた．これは講演の直後，原稿を見直しているうちに，(6.8) に相当する式につまらない見落しがあるためであることに気づき，木田氏の結果と一致することが確かめられた．しかし，楕円渦の内外で圧力分布の表式を導いたものの，それが連続的につながることを検証することは怠っていた．講演の後，巽友正教授から講演要旨を在英中の木田氏に送られたところ，木田氏はさっそく圧力の計算をして楕円渦の内外で圧力が連続的につながることを確かめられた．9月上旬，「乱流・カオス」国際シンポ

ジウムの機会に木田氏が一時帰国されたので，その機会を利用して筆者はこの問題について木田氏と話しあうことができたのは幸いであった．渦の内外で流速が連続的につながるとき，圧力の連続性も自動的に成り立つのか？　これが実は筆者のかねてからの疑問であった．この事実は直観的にはいかにももっともらしく見える．しかしはっきりした証明は見当らない．木田氏と話しあった結果，この点を明確にしておくことが筆者にはますます重要と思われるようになった．最近，Kelvinの循環定理に関係のある1つの定理が得られ，その1つの応用例として上の問題を肯定的に解決することができた．これについては別の機会に報告したいと思う．

筆者の講演に興味をもち木田氏との談論の機会を与えてくださった巽教授と，熱心に議論してくださった木田氏に，心から感謝するしだいである．